ΔΙΑΛΕΞΗ 13

Άσκηση 1.13 (Ανισότητα του Nash) [βλ. §5.8.5. Evans]

Δείξτε για $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ την ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 dx\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|\, dx\right)^{4/n}$$

Υποδείξεις

1) v ομαλή με συμπαγή φορέα

2) Χρήση Μετασχηματισμού Fourier:

- $\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} v(x)\, dx \quad \left(\Rightarrow |\hat{v}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|\, dx\right)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \quad$ (Plancherel)
- $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \quad$ (— " —)

3) Εκτιμήστε ξεχωριστά $\int_{|\xi|\leq\rho} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi$, $\int_{|\xi|\geq\rho} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi$.

#

Απορροές Εμφύτευσης στο Χώρο των ανισοτήτων (Επιχειρήματα Με Ατο...

Poincaré Ανισότητα

Θ1: U φραγμένο, συνεκτικό, ανοικτό στο $\mathbb{R}^n$, $\partial U \in C^1$, κ.ρ.ε.ν.

$\exists\, C = C(n,p,U)$ τ.ω.

$$(1) \qquad \left\| u - \fint_U u \right\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

Απ

Με άτοπο : $\exists \{u_k\} \subset W^{1,p}(U)$, $(u)_U := \fint_U u$

(1) $\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p} > k \|\nabla u_k\|_{L^p}$

Κανονικοποίηση

(2) $v_k := \dfrac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p}}$

(3) $(v_k)_U = 0$, $\|v_k\|_{L^p} = 1$

(4) $\|\nabla v_k\|_{L^p} < \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \{v_k\}$ φραγμένη στο $W^{1,p}(U)$

$W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p^*}(U)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (Ισχύει για $\partial U \in C^1$ το Rellich-Kondra...

Έχουμε $p^* > p \Rightarrow L^{p^*}(U) \hookrightarrow L^p(U)$

$\therefore$

(5) $W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$

$\therefore$ $\exists$ υπακολουθία

(6) $v_{k_j} \xrightarrow{L^p} v$ — $\fint_U v = 0$, $\|v\|_{L^p} = 1$

Παρατήρηση : $\nabla v = 0$ a.e.

Γράφουμε

(95)

(7) $\int_U v \varphi_{x_i} dx = \lim \int_U v_k \varphi_{x_i} dx = -\lim \int_U \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \varphi \, dx \xrightarrow{(6)} 0$

$\therefore$ (Άσκηση 11)

(8) $v \equiv$ σταθερά

$\xRightarrow{(6)(ii)} \boxed{v \equiv 0}$

Συγκρούεται με $(6)_{(ii)}$!

Πόρισμα (Poincaré στην Μπάλα) $[1 \le p \le \infty]$

(9) $\| u - ⨍_{B(x_0,r)} u \|_{L^p(B(x_0,r))} \le C r \| \nabla u \|_{L^p(B(x_0,r))}$

Απ

(10) $\| u - ⨍_{B(0,1)} u \|_{L^p(B(0,1))} \le C \| \nabla u \|_{L^p(B(0,1))}$

(Από (1), $U = B(0,1)$)

Γενική περίπτωση αλλάζουμε συντεταγμένες:

Δοθείσης $u : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ θέτουμε

$v(y) = u(ry)$, $|y| \le 1$

$\| v - ⨍_{B(0,1)} v \|_{L^p(B(0,1))} \overset{(10)}{\le} C \| \nabla v \|_{L^p(B(0,1))}$

$\nabla_y v = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = r \nabla_x u$

$\left(\int_{|y|<1} |\nabla_y v|^p dy\right)^{1/p} = \left(\int_{|x|<r} |r \nabla_x u|^p \frac{dy}{dx} dx\right)^{1/p} = r^{1-\frac{n}{p}} \| \nabla u \|_{L^p(B(0,r))}$ (11)

$$\fint_{B(0,1)} v\,dy = \fint_{B(0,r)} u\,dx \qquad (12)$$

$\therefore$

$$\| v - \fint_{B(0,1)} v \|_{L^p(B(0,1))} = \| u - \fint_{B(0,r)} u \|_{L^p(B(0,r))} \, r^{-\frac{n}{p}} \qquad (13)$$

$\therefore$

$$\boxed{\| u - \fint_{B(0,r)} u \|_{L^p(B(0,r))} \le r \, \| \nabla u \|_{L^p(B(0,r))}} \qquad (14)$$

$\square$

Σχόλιο επί των χώρων $W^{1,n}$ και BMO

Παρατηρήσεις

1) Το $\int_\Omega |\nabla u|^n dx$ είναι αναλλοίωτο κάτω από αλλαγές κλίμακος, $x = \lambda y$. $(0 \in \Omega)$

Πράγματι αν $v(y) = u(\lambda x)$ τότε

$$\int_\Omega |\nabla u|^n dx = \int_{\frac{1}{\lambda}\Omega} |\nabla v|^n dy$$

Σημαντικό στην γεωμετρία η $\boxed{n=2}$ που αντιστοιχεί με το Dirichlet ολοκλήρωμα. Οι δύο διαστάσεις είναι ιδιαίτερες στην γεωμετρική ανάλυση, και σε αυτό παίζει ρόλο το αναλλοίωτο του Dirichlet.

2) Στην ελαστικότητα η ενέργεια δίνεται από την

$$\int_\Omega W(F)\,dx, \quad \text{όπου} \quad F = \nabla u.$$

$W(F) = \det F$ είναι ένα παράδειγμα.

Έχουμε από Γ.Α.

$$|\det \nabla u| \le c\,|\nabla u|^n$$

3) Ο χώρος BMO εισήχθη από τους John και Nirenberg σε σχέση με την ελαστικότητα.

Έστω $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\not\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\quad (u)_{x,r} = \fint_{B(x,r)} u\,dy$

$$\int_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|\,dy \overset{(14)}{\le} Cr \int_{B(x,r)} |\nabla u|\,dy$$

$\Longrightarrow$

$$\fint_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|\,dy \le r \fint_{B(x,r)} |\nabla u|\,dy = \frac{r}{|B(x,r)|}\left(\int_{B_r} |\nabla u|^n dy\right)^{1/n} |B_r|^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\le C r \left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u|^n dy\right)^{1/n}$$

$$= C\left(r^n \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |\nabla u|^n dy\right)^{1/n}$$

$$\le C\left(\int_{B_r} |\nabla u|^n dy\right)^{1/n} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n dy\right)^{1/n} \qquad \square$$

BMO = Χώρος φραγμένης μέσης ταλάντωσης.

Ημινόρμα $[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r)} \left\{ ⨍_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|dy \right\}$

Σημείωση

$u(x) = \ln|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$

Η $\ln|x|$ είναι αντιπροσωπευτική BMO. Δείχνει την διαφορά
$BMO(\mathbb{R}^n) \supsetneq L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Ισχύει το ακόλουθο :

Αν $g \in BMO \Rightarrow \int_K e^{c|g(x)|}dx < \infty$, $\forall\, 0 \leq c < 1$.

#

$\boxed{\text{Ασκηση 15 Evans}}$

Συναρτήσεις Lipschitz και $W^{1,\infty}$

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός του $W^{1,\infty}$)

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, $\partial U \in C^1$.

$u: U \to \mathbb{R}$ Lipschitz $\Longleftrightarrow u \in W^{1,\infty}(U)$.

BMO = Χώρος φραγμένης μέσης ταλάντωσης.

Ημινόρμα $[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r)} \left\{ ⨍_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|\,dy \right\}$

Σημείωση

$u(x) = \ln|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$

Η $\ln|x|$ είναι αντιπροσωπευτική BMO. Δείχνει την διαφορά

$$BMO(\mathbb{R}^n) \supsetneq L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Ισχύει το ακόλουθο:

$$\text{Αν } g \in BMO \Rightarrow \int_K e^{c|g(x)|}\,dx < \infty \,, \quad \forall\, 0 \le c < 1 .$$

$\#$

$\boxed{\text{Άσκηση 15 Evans}}$

Συναρτήσεις Lipschitz και $W^{1,\infty}$

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός του $W^{1,\infty}$)

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, $\partial U \in C^1$.

$$u: U \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz} \iff u \in W^{1,\infty}(U).$$

Απ

1. $U = \mathbb{R}^n$ και spt u συμπαγές, και έστω $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

Θέτουμε

$$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$$

Έχουμε

$$\begin{cases} u^\varepsilon \to u \quad a.e. \quad (i) \\ \\ \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|Du\|_{L^\infty} \quad (ii) \end{cases}$$

$$\left(\|u^\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \quad , \quad u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \Rightarrow Du^\varepsilon = \eta_\varepsilon * Du \right)$$

$\therefore$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ $u^\varepsilon(x) \to \bar{u}(x)$ $\forall x$, $\therefore$ $u = \bar{u}$ a.e.

Έστω $x \neq y$

$$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (1-t)y)\, dt$$

$$= \int_0^1 \nabla u^\varepsilon(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)\, dt$$

$\Rightarrow$

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|Du\|_{L^\infty} |x-y|$$

$$\downarrow$$

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq \|Du\| \, |x-y|$$

(Υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις Sobolev ορίζονται μέχρι συνόλου μέτρου μηδέν, δηλαδή u και $\bar{u}$ ταυτίζονται).

(100)

2. Αντιστρόφως έστω η u Lipschitz, με σταθερά Lipschitz $Lip(u)$

Θεωρούμε το πηλίκο διαφορών

$$D_i^{-h} u(x) = \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h}$$

$$\| D_i^{-h} u \|_{L^\infty} \leq Lip(u) \implies \| D_i^{-h} u \|_{L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)} \leq C, \quad \forall p \geq 1 \quad (*)$$

ως προς h.

ομοιόμορφα ως προς h και ως προς p.

Ασθενώς συμπάγεια $\implies$

$$D_i^{-h_k} u \longrightarrow v_i \text{ ασθενώς στον } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad (\ast\ast)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \varphi_{x_i} \, dx = \lim_{h_k \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u D_i^{h_k} \varphi \, dx$$

$$= -\lim_{h_k \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k} u \, \varphi \, dx$$

$$\overset{(\ast\ast)}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} v_i \varphi \, dx$$

$$\therefore \quad v_i = u_{x_i}$$

$$(\ast\ast) \implies \underline{\lim} \| D_i^{-h_k} u \|_{L^p} \geq \| v_i \|_{L^p} \quad (\ast\ast\ast)$$

Έπεται από $(*)$ $\implies \| v_i \|_{L^p} \leq C \quad \forall p \geq 1 \implies \boxed{p = \infty}$

3. Στην γενική περίπτωση της U φραγμένο, $\partial U \in C^1$, επεκτείνουμε την u μέσω του τελεστή επέκτασης $Eu = \bar{u}$, και εφαρμόζουμε το επιχείρημα στην $\bar{u}$. $\square$