

ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ 2^{ος} ΤΑΞΗΣ

ΑΡΧΗ ΜΕΤΙΣΤΟΥ - ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ & ΙΔΙΩΝΑ

$$(1) \begin{cases} Lu = f & , x \in U \subset \mathbb{R}^n, \text{ανοικτό, φραγμένο} \\ u = 0 & , x \in \partial U \end{cases}$$

f δοθείσα, $u = u(x)$ άγνωστη, $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2) \quad Lu = - \frac{2}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (a)$$

(μορφή απίκρισης)

$$- a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (b)$$

$$x) \quad a^{ij}(x) \in C^1(U), \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Σημαντικές Εξισώσεις - Το Πρότυπο:

$$a^{ij}(x) = \delta^{ij}, \quad L = -\Delta$$

Παρατήρηση

Λόγω των $a^{ij} \in C^1(U)$ η (b) μπορεί να γραφεί σε μορφή απίκρισης:

$$a^{ij} u_{x_i x_j} = (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} - (a^{ij})_{x_j} u_{x_i}$$

Για $a^{ij} \in L^\infty$ αυτό δεν γίνεται. Η $a^{ij} \in L^\infty$ είναι σημαντική περίπτωση για την μελέτη ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ, $a^{ij} = a^{ij}(x, u, \nabla u)$, ενώ η φαινομενικά πιο εύκολη είναι γνωστή α priori.

Σημείωση Μορφής Απίκρισης (Ολοκλήρωση κατά μέρος) $a^{ij}(x, u, \nabla u)$
quasi linear

$$(3) \quad \int_U (Lu) \varphi \, dx = - \int_U \frac{2}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \varphi + b^i u_{x_i} \varphi + c u \varphi$$

(φ σφαιρική δοκιμασία / αλλαγή μορφή)

$$= \int_U a^{ij} u_{x_j} \varphi_{x_i} + \dots = \int_U f \varphi$$

Απόδειξη Λέμα: Η (3) ισχύει $\forall \varphi \in C_c^1(U)$.

$$A(x) = (a^{ij}(x)) \quad A = A^T$$

Θεώρημα (Ελλειπτικότητα)

$$(4) \quad \langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \theta |\xi|^2, \quad \langle, \rangle = \text{Ευκλείδειο σκ.}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\theta > 0$, ανεξάρτητη των x

Για $\varphi = u$ στην (3)

$$(5) \quad \int_U (Lu) u \, dx = \int_U a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx + \dots$$

$$\geq \theta \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \dots$$

Θρ (Τετραγωνική Μορφή)

$$(6) \quad T[u, u] := \int_U a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx$$

$$T: W_0^{1,2}(U) \times W_0^{1,2}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Θεωρία Οριζώντων

Σημ

Η ελλειπτικότητα σχετίζεται με την οριστικότητα

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\Delta u$$

Μαθαίνει από τη σχέση οριστικότητας πως η κερνή συσχετίζεται με τη δεύτερη οριζότητα (2ος νόμος διατήρησης ενέργειας).

ΑπόδειξηΜερος I

✓ φέρουμε $u \in H$, $v \mapsto B[u, v] \in H^*$ από (i)

$$\Rightarrow \exists! w_u \text{ τ.ω.}$$

$$(1) \quad B[u, v] = (w_u, v) \quad (\text{Από Riesz})$$

Ορίζεται

$$(2) \quad Au := w_u, \quad A: H \rightarrow H$$

Θεωρούμε $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ και αναπτύσσεται $\langle Au, \cdot \rangle \in H^*$

$$(3) \quad B[u, v] = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in H$$

Μερος II : Μεγιστη τω $A: H \rightarrow H$

$$\bullet A \in \mathcal{L}(H, H) \quad [\text{σπρεττικός, φραγμένος}]$$

Σπρεττικότητα(1) $\Rightarrow$

$$B[u, v] = (Au, v)$$

$$\begin{aligned} (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\ &= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v) \end{aligned}$$

 $\forall v$

LAX-MILGRAM

H χώρος Hilbert με σκελετικό εσ. γινόμενο $(\cdot, \cdot)$

Έστω $f \in H^*$ (δυνατός) Δεν ταυτίζονται τον H με τον H^*
μέσω της ισοτιμίας του Riesz

Συνταγοποιεί:

$$f(x) = \langle f, x \rangle, \quad \| \cdot \| \text{ νόρμα}$$

Θεώρημα

Έστω $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, δ. γραμμικός, τ.ω.

$$(i) \quad |B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$$

$$(ii) \quad B(u, u) \gg \beta \|u\|^2$$

$B[u, v]$ δ. γραμμικός
 $\Leftrightarrow$

$u \rightarrow B[u, v]$
γραμμικός

$v \rightarrow B[u, v]$
γραμμικός

$\exists! \quad u_f \in H \quad \text{τ.ω.}$

$$B[u_f, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

Σχόλιο

Στις περιπτώσεις που η δ. γραμμική μορφή είναι συμμετρική τότε
το

$$B[u, v]$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο H , με ισοδυναμία νόρμα

Από Riesz το Θεώρημα προκύπτει. Κατά συνέπεια στο

L-M χρειαζόμαστε όταν $\nexists$ συμμετρία, δηλ. $B[u, v] \neq B[v, u]$.

Σημ: $\int Lu v = \int uLv$ ισχύει για (a) αν $b \equiv 0, c \equiv 0$
Δεν ισχύει για (b)

$$(4) \quad A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2$$

Προτάσεις

$$(5) \quad \|Au\|^2 = (Au, Au) \\ \stackrel{(2)}{=} (u, Au) \\ \stackrel{(3)}{=} B[u, Au] \\ \stackrel{(1)}{\leq} \alpha \|u\| \|Au\|$$

$$(6) \quad \|Au\| \leq \alpha \|u\| \Rightarrow \|A\| \leq \alpha.$$

Μεσος III

$$(x1) \bullet \begin{cases} A \text{ 1-1} \\ R(A) \text{ κλειστό στο } H \end{cases}$$

$$(7) \quad \beta \|u\|^2 \leq B[u, u] = (u, u) = (Au, u) \stackrel{CS}{\leq} \|Au\| \|u\|$$

$$(8) \quad \|Au\| \geq \beta \|u\|, \quad (A \text{ γροφτικός})$$

$$\Rightarrow Au = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\therefore A \text{ 1-1}, \text{ και } \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta} \quad (9)$$

$$(10) \quad D(A^{-1}) = R(A)$$

Μεσω γροφτικότητας + (9)

$$(11) \quad D(A^{-1}) = D(A^{-1}) \Leftrightarrow R(A) = \overline{R(A)}$$

Μερος IV

⊙2 • $R(A) = H$

Με ατοπο :

Εστω $R(A) \neq H \Rightarrow [R(A)]^\perp \neq \emptyset$

Εστω $\hat{w} \in [R(A)]^\perp \Rightarrow (A\hat{w}, \hat{w}) = 0$

$$0 = (A\hat{w}, \hat{w}) \stackrel{(i) \text{ (ii)}}{=} B[\hat{w}, \hat{w}] \stackrel{(iii)}{\geq} \beta \|\hat{w}\|^2$$

$\therefore$

$$\hat{w} = 0, \quad \text{✗}$$

Μερος V

Απο Riesz

$$\langle f, v \rangle = (w_f, v) \quad \forall v \in H$$

Απο ⊙1, ⊙2 $\exists!$ u_f τ.ω. $Au = w_f$:

$$B[u_f, v] = (Au_f, v) = (w_f, v) = \langle f, v \rangle.$$

□

Motivation

u cont. in Ω , Ω ^{open} bdd.,
 u harmonic $\Leftrightarrow$

① Viscosity soln

(Πρόβλημα ΔΙΑΔΕΞΗΣ 14)

(i) If $u-\varphi$ has a local max at $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C^2(\Omega) \Rightarrow \Delta\varphi(x_0) \geq 0$ (sub)

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{If } u-\varphi \text{ has a local min at } x_0 \in \Omega, \varphi \in C^2(\Omega) \Rightarrow \Delta\varphi(x_0) \leq 0 \text{ (sup)} \\ \text{(ii)} \end{array} \right.$

Pf

A) Suppose u is harmonic and suppose $u-\varphi$ has a local max at $x_0 \in \Omega$, i.e. $v(x) = u(x) - \varphi(x)$ has a local max at x_0 .
If $\Delta\varphi(x_0) < 0 \Rightarrow \Delta v > 0$ in a ball $B(x_0; \varepsilon)$,
subharmonic, can not have an interior max.
Similarly for (ii).

B) Suppose (*) holds. We will show that u is harmonic.
Proceed by contradiction. So assume it is not harmonic.
By Poincaré $\exists v \leq u$ on $\partial\Omega$, $\Delta v \geq 0$ in Ω ,
and

$$(1) \max_{\Omega} (v-u) = u(\bar{x}) - v(\bar{x}) > 0, \quad \bar{x} \in \Omega$$

Case 1: $\Delta v > 0$ in Ω

$v-u$ has local max at $x=\bar{x} \Leftrightarrow u-v$ has local min at $x=\bar{x}$,

hence by (*) (ii) $\Delta v \leq 0$, ~~contradiction~~.

(2)

Case (B) : $\Delta v \geq 0$ in Ω

Choose $\varepsilon > 0$ small s.t. $\max_{x \in \partial\Omega} \varepsilon |x - \bar{x}| < v(\bar{x}) - u(\bar{x})$ (2)

Let

$$\hat{v}(x) = v(x) + \varepsilon |x - \bar{x}|^2, \quad \Delta \hat{v} > 0 \text{ in } \Omega$$

$$\max_{\Omega} [\hat{v} - u] = \max_{\Omega} [(v(x) + \varepsilon |x - \bar{x}|^2) - u(x)] \geq v(\bar{x}) - u(\bar{x})$$

$$\max_{\partial\Omega} [(v(x) + \varepsilon |x - \bar{x}|^2) - u(x)] \leq \max_{\partial\Omega} (\varepsilon |x - \bar{x}|^2)$$

Hence by (2)

$$\max_{\Omega} [\hat{v} - u] = \hat{v}(x_0) - u(x_0), \quad x_0 \in \Omega$$

But $\Delta \hat{v} > 0$ in Ω , contradiction by Case (i).

#

Perman : $\sup$ subsolution $\rightarrow$ (2) (iii)
 $\inf$ supersolution $\rightarrow$ (2) (i)

$$F(D^2 u(x), x) = f(x)$$

u continuous in Ω

$$F(M, x), F: S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

elliptic

viscosity subsolution if $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C^2(\Omega)$
 and $u - \varphi$ has a local max at x_0 , then

$$F(D^2 \varphi(x_0), x_0) \geq f(x_0).$$

(supersolution ... local min at x_0)

↑ symmetric

(3)

Ex: $u(x) = \begin{array}{c} \text{V} \\ \text{---} \end{array}$

u subsolution for $u'' = 0$

at $x=0$, trivially ($\exists \varphi$ s.t. $u-\varphi$ has local max
at $x=0$ ($u(x) \leq \varphi(x)$)), o.k. otherwise

Weak Subsolution in $W^{1,2}$

$$\int_U \nabla u \nabla \varphi \leq 0, \quad \forall \varphi \geq 0, \quad \varphi \in C_c^1(U)$$

$$\left(\int_U \Delta u \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \int_U \nabla u \nabla \varphi \leq 0 \right)$$

For $u(x) = |x|$ is weak subsolution

$$\int_{-1}^1 u' \varphi' = \int_{-1}^0 (-1) \varphi' + \int_0^1 (1) \varphi' = -2\varphi(0)$$

□

Ellipticity

$F = F(M, x)$, uniformly elliptic if $\exists \quad 0 < \lambda \leq \Lambda$ s.t. for $M \leq S, x \in \Omega$

$$\lambda \|N\| \leq F(M+N, x) - F(M, x) \leq \Lambda \|N\|$$

$N \geq 0$ nonnegative definite ^{sym} matrix ($\|M\| = \sup_{|x| \leq 1} |Mx| = \max \text{ e. value}$)

Def: A cont. fn u in Ω is a viscosity sub solution (resp. supersolution) of $F(D^2 u(x), x) = f(x)$ in Ω when the following condition holds:
IF $x_0 \in \Omega$, IF $\varphi \in C^2(\Omega)$ and $u-\varphi$ has a local max at x_0 ,
then

$$F(D^2 \varphi(x_0), x_0) \geq f(x_0)$$

[resp. $u-\varphi$ local min $\Rightarrow \square \leq \square$]