

ΔΙΑΛΕΞΗ 15

Ασκήσεις: 14, 18, Subolen, 6308, και 1, Kef6, 6365

Α. Μέθοδος Ενέργειας

Θεωρήστε τις συνθήκες για το $\perp$ ειδικά των εγγεγραμμένων,
 (4) Διαλέξη 14. Υποδείξτε τις αδύνατες συνθήκες για a^i, b^i, c
 για το Μέρος Α. Θεωρήστε την $\perp$ όπως στην (2) (α)
 Διαλέξη 14.

$$(1) \quad a^i \in L^\infty(U), \quad b^i \in L^\infty(U), \quad c \in L^\infty(U).$$

Ορίστε την διφρακτική μορφή

$$(2) \quad B[u, v] = \int_U (a^i \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + b^i \partial_{x_i} v + c u v) dx$$

Σκοπός : Επαγυρεύει, υπό συνθήκες, την lax-Milgram,
 για $H = W_0^{1,2}$, για επίλυση της (3), Διαλέξη 14.

Σημείωση

Το Π.Σ.Τ. (πρόβλημα ανομοιογενών τιμών)

$$(3) \quad \begin{cases} Lu = f & , x \in U \\ u = 0 & , x \in \partial U \end{cases}$$

δεν έχει λύση $\forall f$ εν γένει, χωρίς χίτρα συνθήκες

Αντιπαράδειγμα (Το 0 είναι ιδιοτιμή)

$$(4) \quad \begin{cases} u'' + u = 0 & , U = (0, \pi) \\ u(0) = 1, u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Πρώτα θα μετασχηματίσουμε το (4) σε μορφή (5)

Θέτουμε $v = u - [c_1 x + c_2]$, c_1, c_2 έτσι ώστε η v να ικανοποιεί Dirichlet Σ.Σ.'ς :

$$0 = v(0) = u(0) - c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 1}$$

$$0 = v(\pi) = u(\pi) - [c_1 \pi + 1] \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{a-1}{\pi}}$$

(4) $\Leftrightarrow$ (5) :

$$(5) \begin{cases} v'' + v = \frac{a-1}{\pi} + 1, & 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

(Προφανώς το (5) είναι εντός των ορίων (3), $Lu = -u'' - a$)
θα δείξουμε ότι

$$(6) \begin{cases} \text{(i)} \text{ Αν } a \neq -1 \text{ } \nexists \text{ λύση} \\ \text{(ii)} \text{ Αν } a = -1 \text{ έχει } \infty \text{ λύσεις.} \end{cases}$$

Επαγόμενα (6) :

Θέτουμε την μορφή (4). Η γενική λύση της εξίσωσης (αφαιρούμε) είναι

$$u(x) = A \cos x + B \sin x$$

$$\text{Χρυσή Σ.Σ. : } 1 = u(0) = A, \quad a = u(\pi) = \cos \pi = -1$$

□

Θεώρημα 1 (Προετοιμασία για Lax-Milgram)

Θεωρεί τις γραμμικές (2), με συντελεστές (1) + ευσταθιστικές (4), Διαφέρει 14.

$\exists$ σταθερές $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ π.ω.

$$(17) \quad (i) \quad |B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (W_0^{1,2} \equiv H_0^1)$$

$$(ii) \quad \beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Σημ: Το γ δεν είναι δυνατό να επιλεγεί πάντα $\gamma = 0$.
Εξαρτάται από το "εξωτερικό όρο" $c(x)$.

$$\text{Βλέπε (5): } B[u, u] = \int_{\Omega} [(u')^2 - c(x)u^2] dx,$$

$$B[\sin x, \sin x] = \int_{\Omega} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = 0 !$$

$\psi = \sin x$ ιδιοσυνάρτηση της $\lambda = 0$ ιδιοτιμής; $L\psi = \Delta\psi$.

Σημ

$$\text{Συμπληρωματικό } (H_0^1)^* \hookrightarrow H^{-1}.$$

Απ

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &= \left| \int_{\Omega} (a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + b^i u_{x_i} v + c u v) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (A(x) \nabla u, \nabla v) dx \right| \\ &\quad + \int_{\Omega} (b^i u_{x_i} |v| + |c| |u| |v|) dx \end{aligned}$$

Εχουμε

(111)

$$|\langle A(x) \nabla u, \nabla v \rangle| \stackrel{CS}{\leq} \|A(x) \nabla u\|_{E_{\nabla u}} \| \nabla v \|_{E_{\nabla v}} \\ \leq \|A\|_{L^\infty} |\nabla u| |\nabla v|$$

$$|b^i u_{x_i}| |v| \stackrel{CS}{\leq} (\sum |b^i|^2)^{1/2} (|\nabla u|) |v|$$

$$|c| |u| |v| \leq \|c\|_{L^\infty} |u| |v|$$

∴

$$|B[u, v]| \leq \|A\|_{L^\infty} \left(\int_U |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_U |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\sum \|b^i\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2} \int_U |\nabla u| |v| dx$$

$$+ \|c\|_{L^\infty} \int_U |u| |v| dx$$

$$\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2(U)} \|\nabla v\|_{L^2(U)} + \left(\sum \|b^i\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)}$$

$$+ \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)}$$

$$\leq \beta \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

Εξιστοσύνη (4)
Διαγέγραφή 14

2.

$$\Theta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq c \Theta \int_U |\nabla u|^2 dx \leq C \int_U \langle A(x) \nabla u, \nabla u \rangle dx$$

(Ανισότητα Poincaré, B.J. Ασκήση 15, 0 στην άκρη της B)

$$\stackrel{(2)}{=} C \left[B[u, u] - \int_U b^i u_{x_i} u dx - \int_U c u^2 dx \right]$$

$$\leq C \left[B[u, u] + \left(\sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

Therefore we get:

$$(8') \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

For $\gamma \omega \varepsilon \varepsilon \tau \omega$.

$$(9) \quad C \left(\sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2} \varepsilon < \frac{\theta}{2}$$

(8) $\Rightarrow$

$$(10) \quad \theta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq C B[u, u] + C \left(\sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\stackrel{(9)}{<} C B[u, u] + \frac{\theta}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 +$$

(10)
 $\Rightarrow$

$$C \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 \frac{C}{\varepsilon}$$

$$\frac{\theta}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq C B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2}^2.$$

□

Θεωρημα Υπαρξης - Μαρκοπουλιτός (I)

Θεωρούμε το Π.Σ.Τ.

$$(ii) \quad \begin{cases} Lu + fu = f, & f \in L^2(\Omega) \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Για $f \neq 0 \quad \exists!$ λύση
 κανονική $(\beta_1(3), \Delta \alpha \beta \gamma \delta 14, 6102)$.

Απ.

1. Η διγραμμική μορφή που αντιστοιχεί στον $L + fI$ είναι

$$B_f[u, v] = B[u, v] + f(u, v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(\cdot, \cdot) = L^2 \text{ εσω. γινόμενο.}$$

Συνέπει (i), (ii) Lax-Milgram ο.κ.

2. Για $f \in L^2$ το συναρτησιακό $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx$
 είναι γραμμικό στο $L^2(\Omega)$ και προφανώς στο $H_0^1(\Omega)$

$$\text{διότι } H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

$$\text{Αρα } \langle f, \cdot \rangle \in (H_0^1)^*.$$

$$L-M \Rightarrow \exists! \text{ λύση στο } H_0^1.$$

Άσκηση 1.15 : Δείξτε ότι για $c \geq 0, b^i = 0$ το
 είναι επιλύσιμο. Συνέπεια σε αυτή την περίπτωση $Lu = f$