

Άσκηση 1.17 (Gaussian Bine'')Δείξτε $\sqrt{\pi}$ ισχύει η

$$(*) \quad 2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} f^2(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} |\nabla f(x)|^2 dx$$

για $f \in C^1$ και φραγμένη, με φραγμένο παραγόμενο 1^ο τάξης.

και

$$(\dagger) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} f(x) dx = 0.$$

Υπόδειξη

Τα (Hermite) πολυώνυμα H_n στην $\mathbb{R}$, ($n=1$)

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \right) H_n = n H_n$$

είναι ορθοκανονική βάση στο $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$.α) Απόδειξη για $n=1$ της $(*)$ μέσω Σειρών Fourier.β) Για αυθαίρετο n , i υποδείκτες $(i_1, \dots, i_n)$, $H_i(x) = \prod_{k=1}^n H_{i_k}(x_k)$.
Είναι ορθοκανονική βάση στο $L^2(\mathbb{R}^n, \exp(-|x|^2))$.

• Είναι σωστή απόδειξη της

$$(*)' \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} f^2(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} |\nabla f(x)|^2 dx, \text{ και } (\dagger)$$

με επεκτείνηση εις ατομικών αλγεβρών (2)

(121)

Θεωρημα Υποερής Μοναδικότητας (II)

Κατασκευάσαμε το Πόρισμα του Θεωρήματος του Fredholm.

Πόρισμα (Εκβακτηρια Αρχή του Fredholm)

Ⓘ

(α) $\forall \underline{f} \in H$ η εξίσωση

$$(1) \quad u - Ku = \underline{f}$$

έχει ~~ακριβώς~~ μοναδική λύση

(β) $\nexists$ ομογενής εξίσωση

$$(2) \quad u - Ku = 0$$

έχει μη τετριμμένη λύση

$$(\mathcal{R}(I - K) = \{0\} \iff \mathcal{R}(I - K) = H)$$

Παρατηρούμε ότι αν ισχύει (α) τότε λόγω (β), η λύση $\forall f$ της (1) είναι μοναδική.

Ⓙ Λόγω (β) αν $\mathcal{R}(I - K) \neq \{0\}$ τότε η (1) έχει

λύση αν και μόνο αν $f \in [\mathcal{R}(I - K^*)]^\perp$

5) Τελικός Συμμετρισμός I*

Θεωρούμε την τελεστή $Lu = - \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u$

(Προϋπόθεση αμοιβαίου). Έστω $u, v \in C_c^2(U)$. Θα υπολογίσουμε κατά μέλην

όπου να παραβούμε τις παραγώγους από την u στην v :

$$\int_U (Lu) v \, dx = \int_U - \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v \, dx$$

$$+ \int_U b^i(x) u_{x_i} v \, dx + \int_U c(x) u v \, dx = I + II + III$$

$$II = \int_U b^i(x) u_{x_i} v \, dx = \int_U \frac{\partial}{\partial x_i} (u b^i(x) v) \, dx - \int_U u \frac{\partial}{\partial x_i} (b^i(x) v) \, dx$$

$$I = \int_U - \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v \, dx = \int_U \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \right] + \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} \, dx$$

$$= \int_U a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_U \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) u \right] \, dx$$

$$- \int_U \frac{\partial}{\partial x_j} (a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}) u \, dx$$

Καταγράφουμε λοιπόν:

$$\int_U (Lu) v \, dx = \int_U \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) u + \left[c(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} (b^i(x) v) \right] u \right\} \, dx$$

$$= \int_U \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) u - b^i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} u + \left[c(x) - \frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} \right] u \right\} \, dx$$

$$= \int_U (L^* \sigma) u \, dx.$$

Ορισμοί

$$(i) \quad L^* \sigma = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) - b^i(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \left[c(x) - \frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} \right] \sigma$$

L^* = (τυπικός) συζυγής του L

(ii) Η συζυγής διαφόρων μορφών $B^* = H_0^1(U) \times H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$

ορίζεται μέσω της σχέσης

$$B^*[\sigma, u] := B[u, \sigma] \quad \forall u, \sigma \in H_0^1(U)$$

(iii) Ορισμός αδρανούς L και των συζυγών προβλημάτων

$$(3) \quad \begin{cases} L^* \sigma = f & \text{στο } U \\ \sigma = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(4) \quad B^*[\sigma, u] = (f, u), \quad f \in L^2, \quad (\cdot, \cdot)_{L^2} \text{ εσωτερικό γινόμενο}$$

$$\forall u \in H_0^1(U)$$

$L = L^*$ (αυτοσυζυγής) $\Leftrightarrow b^i \equiv 0$

Θεώρημα Νταρξους - Μινσκόφσκας II

Έχουμε την εξής διχοτομία

$$(α) \quad \begin{cases} Lu = f, \text{ στο } U \\ u = 0, \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

έχει μια $\neq f \in L^2(U)$

$$(β) \quad \begin{cases} Lu = 0, \text{ στο } U \\ u = 0, \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

έχει μία τετριμμένη λύση.

Δύοση

ή το (α) ισχύει, ή το (β) ισχύει

Το ένα αποκλείει το άλλο, και ένα από τα δύο πάντα ισχύει.

• Στην περίπτωση που ισχύει το (α), η λύση είναι μοναδική.

• Στην περίπτωση που ισχύει το (β) η εφελκυστικότητα του (α) είναι άμεση μόνο στην περίπτωση που

$$(γ) \quad \begin{cases} f \perp \mathcal{H}(1^*), \perp \text{ στο } L^2(U) \\ \sigma = 0, \text{ στο } U \\ \sigma = 0, \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

(125)

είναι δε αυτήν την περίπτωση η λύση δεν είναι μοναδική διότι για οποιονδήποτε d

$$d = \dim \mathcal{H}(L) = \dim \mathcal{H}(L^*) < \infty.$$

Απόδειξη

1. Επιλέγουμε $\mu = \gamma$ στο θεωρήμα υπαρξης I (6.113)

$$B_\gamma[u, v] := B[u, v] + \gamma(u, v), \quad \Leftrightarrow \text{θεωρούμε τον}$$

$$L_\gamma u = Lu + \gamma u$$

$$Lu = f \Leftrightarrow L_\gamma u = \gamma u + f \quad \gamma \geq 0$$

Έχουμε ότι $\forall g \in L^2(U) \exists u \in H_0^1(U)$ π.ω.

$$(5) \quad B_\gamma[u, v] = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

$$(6) \quad u = L_\gamma^{-1} g$$

2. Εστω τώρα $u \in H_0^1(U)$ αόριστη λύση του (α)

$$(7) \quad B_\gamma[u, v] = (\gamma u + f, v), \quad \forall v \in H_0^1(U)$$



$$(8) \quad u = L_\gamma^{-1} (\gamma u + f)$$

(126)

Αποδείξτε συναρτήσει των (8)

$$(9) \quad u - Ku = h, \quad h := L_V^{-1} f, \quad Ku = \gamma L_V^{-1} u$$

3. Υποδείξτε ότι $K: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ είναι φραγμένος, συμπαγής τελεστής.

Προσέχουμε:

$$\begin{aligned} \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq B_\gamma[u, u] = (g, u) \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

∴

$$\|Kg\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (g \in L^2(\Omega))$$

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, και η συμπαγής προκύπτει.

4. Εφαρμόζουμε τώρα την θεωρία Fredholm :

Δύο πινάκες :

$$(a) \quad \begin{cases} \nexists h \in L^2(\Omega) \text{ η εξίσωση} \\ u - Ku = h \\ \text{σχετ. με κάποιο } u \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \forall h \in L^2(\Omega) \\ u - Ku = 0 \end{cases}$$

, 2, 1

(127)

περίπτωση (2) $\exists!$ στην (5) $\Leftrightarrow \exists!$ codimus

Λύση για το πρόβλημα (2) στην (124).

Στην περίπτωση που ισχύει η (β), τότε αναγκαστικά

$$\gamma \neq 0.$$

Διότι $Lu = f$ δεν έχει λύση $\forall f \in M$, άρα $\gamma = 0$ δεν αρκεί

Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι η διαδοχή των χώρων των λύσεων της (β), $u - Ku = 0$, είναι πεπερασμένη, και για με την διαδοχή των χώρων των λύσεων $\bar{u} - K^* \bar{u} = 0$, και η $u - Ku = 0$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη codimus λύσης για το (β) σ (124).

στο
L-M

5. Τέλος η (2) στην (128) έχει λύση αν και μόνο αν

$$(h, v) = 0, \quad \forall v \text{ λύση της}$$

$$\bar{u} - K^* \bar{u} = 0$$

Ισοδύναμα λοιπόν η (α) στην (124) έχει

λύση αν και μόνο αν

$$(f, v) = 0$$

$\forall v$ λύση της (δ), σ (124).

□