

ΔΙΑΛΕΞΗ 18 : ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΕΛΕΓΓΙΜΟΥΣ 2^{ος} ΤΑΞΗΣΠρώτος Στάδιος

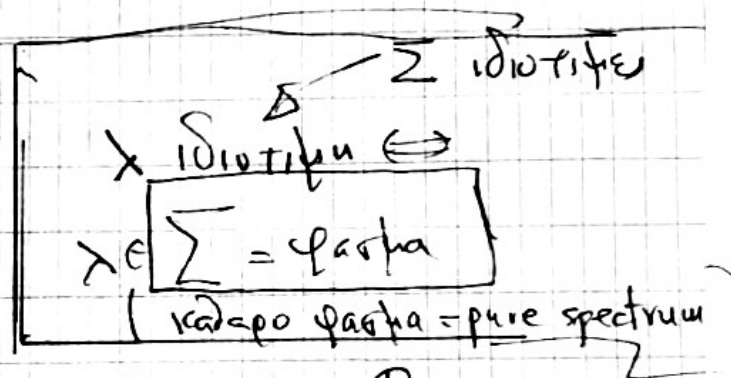
Εστω $Lu = - \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij} u_{x_j}) + b^i u_{x_i} + c u$, ελεγχτικότητα 020

$a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό, φραγμένο

Π.χ. $L = -\Delta$

Πρόβλημα Ιδιοτιμών

$$(EVP) \begin{cases} L\varphi = \lambda \varphi, \text{ στο } U \\ \varphi|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$



λ ιδιοτιμή αν (EVP) έχει $\varphi \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$
 φ αντιστοιχεί ιδιοσυνάρτηση. $\neq$ $\Re_{\lambda} > 0$ ιδιοχυρός,

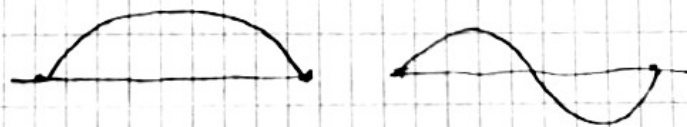
Θεώρημα

Το Φ άσμα είναι διακριτό και με πηλίκο ∞ .
 Διακρινάμε περιπτώσεις:

(α) Για $n=1$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow +\infty$$

$$\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = 1$$



(Θεώρημα Sturm-Liouville, βλ. Αλγεβρα - Γωργουλιώτης
 Κεφ. 9)

(β) Για $n \geq 2$ στην περίπτωση που $L = L^*$ (αυτοσυζυγής)
(δλ. $b^i = 0$) το φάσμα είναι πραγματικό

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

$$\dim \mathcal{H}_{\lambda_1} = 1, \dim \mathcal{H}_{\lambda_i} < \infty, i=2,3,\dots$$

(γ) Στην γενική περίπτωση τεσσάρων L

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i=2,\dots$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i \geq \lambda_1, |\lambda_k| \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

$$|x_i| \text{ όπως καταναγκάζουν } \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_3 \leq \dots$$

(δ) Η κυρία ιδιότητα είναι πραγματική με πολλαπλότητα (εγ)

λ , δλ. $\dim \mathcal{H}_{\lambda_1} = 1$, και η κυρία ιδιοσημείωση

μπορεί να επιλεγεί θετική στο $U =$



$\varphi_1 > 0$ στο U .

Σημ

Ότι $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, με $\varphi_1 > 0$, είναι απορροια ενώ αποτελεί την
έναν που έχει τα τέσσερα χαρακτηριστικά, δηλαδή, που αατφεν
καμία διάταξη, το θεωρημα Koen - Putman που ααμωσφντε
ααμωσφντε.

(13)

ΛΕΓΩΜΕ

$u \equiv 0$ η παραγωγή της (4) $\Leftrightarrow$

$$(5) \quad \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ δεν είναι δαπάνη τω } K$$

$\Leftrightarrow$ η (5) ισχύει

3. Γνωρίζουμε από Σ.Α. ότι

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda_k} \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\lambda_k| \rightarrow +\infty$$

□

Σημ: Το $Lu + pu = f$ έχει πάντα λύση για $p \geq \gamma$,

αρα για την (β) σημαίνει το πρώτο είναι φραγμένο

από κάτω.

#

γίνεται $(\beta), (\delta)$

(130)

.. θεωρούμε την δ όπως στο θεωρήμα στην 6.124, επιλέγουμε $\lambda > \delta$

2. Από Fredholm Alternative to (EVP) έχει μια λύση $\forall f \in L^2(U)$
 $\Leftrightarrow$

$$(1) \begin{cases} Lu - \lambda u = 0 \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0$$

$\Downarrow$

$$(2) \begin{cases} Lu = \lambda u \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 0$$

✓

$\Downarrow$

$$(3) \begin{cases} L + \delta u = (\delta + \lambda)u \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

✓

$\Downarrow$

$$(4) u = L_{\delta}^{-1} (\delta + \lambda)u = \frac{\delta + \lambda}{\delta} Ku$$

$$(Ku = \delta L_{\delta}^{-1} u)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$K: L^2(U) \rightarrow L^2(U), \text{ συμπαγής}$$

πα.
 10.10

$\lambda \in \Sigma$ (sing. λ οχι ιδιοτιμη) $\forall \lambda \in \Sigma$

$$(6) \begin{cases} Lu - \lambda u = f & (I - \lambda T)u = f \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

οχι παραδοχην $\forall f \in L^2(U)$, $\exists C > 0$

$$(7) \|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$$

Απ

Με αποπο:

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(U)$$

$$(7) \begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k, & U \\ u_k = 0, & \partial U \end{cases}$$

$$(8) \|u_k\|_{L^2(U)} > 0 \|f_k\|_{L^2(U)}$$

Οεταφε

$$(9) v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{L^2(U)}}, \quad L v_k = \lambda v_k + \frac{f_k}{\|u_k\|_{L^2(U)}} = \lambda v_k + g_k$$

$$\|v_k\| = 1, \quad \|g_k\| = \frac{\|f_k\|_{L^2(U)}}{\|u_k\|_{L^2(U)}} < \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

→ Χρησις για την γενικότερη στήν (7)

$$(10) \quad \|u_k\| = 1, \quad \|f_k\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

$$Lu_k = \lambda u_k + f_k \Leftrightarrow$$

$$(L + \gamma I)u_k = (\lambda + \gamma)u_k + f_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta \|u_k\|_{H_0^1}^2 &= ((L + \gamma I)u_k, u_k) = (\lambda + \gamma) \|u_k\|^2 + (f_k, u_k) \\ &= (\lambda + \gamma) + (f_k, u_k) \end{aligned}$$

$$\leq (\lambda + \gamma) + \|f_k\|_{L^2} \|u_k\|_{L^2}$$

$\therefore$

$$(11) \quad \|u_k\|_{H_0^1} \leq C$$

$\Rightarrow \exists$ υπαρκτή

$$(12) \quad \begin{cases} u_{k_j} \xrightarrow{w} u \text{ (εν } H_0^1(\mathbb{C}) \text{) } \text{τοπολογία} \Rightarrow u_{k_j} \xrightarrow{L^2(\mathbb{C})} u \\ ((L + \gamma I)u_k, \varphi) = (u_k, (L^* + \gamma I)\varphi) \rightarrow (u, (L^* + \gamma I)\varphi) \\ = ((L + \gamma I)u, \varphi) \end{cases}$$

(13)

(10) $\Rightarrow$

$$((L + \gamma I)u_k, \varphi) = (\lambda + \gamma)(u_k, \varphi) + (f_k, \varphi)$$

(12) $\downarrow$

$\downarrow$

$$((L + \gamma I)u, \varphi) = (\lambda + \gamma)(u, \varphi)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{key}} = \|u\|_{\underline{L}} = 1 \quad \left(\text{αου } u_k \xrightarrow{I^2} u \right).$$

Ατοπο !

□