

ΔΙΑΛΕΞΗ 19 (Συμμετρικοί τελεστές, $L=L^*$, μεταβολικός Χαρακτηρισμός)

$$Lu = - (a^{ij} u_{x_i})_{x_j}, \quad a^{ij} \in C^\infty(\bar{U}), \quad a^{ij} = a^{ji} \in \mathbb{R}$$

$$a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad \theta > 0$$

$$B[u, v] = \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}$$

Θεωρήματα

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

(1) λ_1 αληθινή ιδιοτιμή, με αντιστοιχία ιδιοσυνάρτηση w_1 , $w_1 > 0$ στο $\bar{U}$

(2) $\lambda_1 = \min \{ B[u, u] \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_2 = 1 \}$

(Rayleigh's formula)

Απ

1. Έστω $\{w_k\} \leftrightarrow \{\lambda_k\}$, ιδιοσυνάρτησεις, ιδιοτιμές

Ορθογώνιο σύστημα: $(w_k, w_l) = \delta_{kl}$

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k \\ w_k|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

$$3) B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|_2^2 = \lambda_k,$$

$$(4) B[w_k, w_l] = (Lw_k, w_l)_2 = \lambda_k (w_k, w_l)_2 = 0, \quad k \neq l$$

(Ολα αυτά μέσω του $L^{-1} = K$, αθρογώς στο $L^2(U)$

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}, \quad \mu_k \text{ ιδιοτιμή των } K$$

$\{w_k\}$ πηλίκος ορθοκανονικός στην $L^2(U)$.

2. Για $u \in H_0^1(U)$ έχουμε

$$(5) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k \quad \text{στην } L^2(U)$$

$$(6) \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

3. Από (5), (6) $\Rightarrow \{w_k\}$ ορθώνιο στην $H_0^1(U)$, ως προς

το εσω. γινόμενο $B[u, v]$ που ορίζεται νοήμα

ισοδυναμικά με την $H_0^1(U)$:

$$B[u, u] = \int_U a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \geq \theta \int_U |\nabla u|^2$$

$$B[u, u] \leq \max_{ij} |a^{ij}| \int_U |\nabla u|^2$$

$$(7) \quad \left\{ \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}} \right\} \quad \text{κανονικοποιημένο.}$$

Θα δείξουμε ότι είναι και βάση (πληρότητα) στον $H_0^1(U)$.

Εστω

$$B[w_k, u] = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$B[w_k, u] = (Lw_k, u)_{L^2} = \lambda_k (w_k, u)_{L^2}, \quad (\lambda_k \geq \lambda_1 > 0)$$

και από πληρότητα στην $L^2(U)$ καταγράφουμε ότι $u=0$

στην $L^2(U)$ και συνεπώς στην $H_0^1(U)$.

(139)

Αρα έχουμε για $u \in H_0^1(\Omega)$

$$(8) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}$$

όπου b_k οι συντελεστές Fourier ως προς το $B[\cdot, \cdot]$,
δηλαδή

$$(9) \quad b_k = B\left[u, \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}\right] = \left(u, \frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}\right)_{L^2} = \left(u, \frac{1}{\lambda_k^{1/2}}\right)_{L^2} = \lambda_k^{1/2} d_k$$

Παρατήρηση

Για $u \in L^2(\Omega)$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < +\infty$

Για $u \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε το ισχυρότερο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k d_k^2 < +\infty \quad (\text{Χαρακτηριστικό της } H_0^1)$$

($\lambda_k \rightarrow +\infty$).

$$4. \quad B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k d_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \lambda_1,$$

για $\|u\|_2 = 1$. Επίσης $B[w_1, w_1] = \lambda_1$,

Συνεπώς αποδειχθεί το (2)

(138)

5. Στην συνέχεια πρέπει να χαρακτηρίσουμε την W_1 ως
 γεισιόμορφο των $B[u, u]$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_2 = 1$

Εστω λοιπόν ότι για u ισχύει

$$(10) \quad B[u, u] = \lambda_1 = \min_{\|v\|_2=1} B[v, v]$$

Θα δείξουμε ότι η u είναι ριζόμορφο του

$$(11) \quad \begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε για } d_k = (u, w_k) \quad \left(\|u\|_2 = 1 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1 = B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0$$

$$(12) \quad \Rightarrow d_k = (u, w_k) = 0 \quad \text{αν } \lambda_k > \lambda_1.$$

Παρατηρούμε ότι λ_1 πεπερασμένος πολλαπλασιαστής

$$(13) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k, \quad \text{επειδή αν}$$

(139)

$$\begin{aligned}
 (14) \quad Lu &= \sum_{k=1}^m (u, w_k) \perp w_k \\
 &= \sum_{k=1}^m (u, w_k) \lambda_k w_k \\
 &= \lambda_1 u.
 \end{aligned}$$

(δεν υπάρχει όριο
συνεχούς)

6. Έστω $u \in H_0^1(U)$ μια εσθνής της

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & , \text{ στο } U \\ u = 0 & , \text{ στο } \partial U. \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι η u χαρακτηρίζεται ως ελάχιστο ποινής
τύπου

$$B[u, u], \quad \|u\| = 1.$$

$$\text{Έστω} \quad u^+(x) = \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$$

$$\therefore \quad u(x) = u^+(x) - u^-(x)$$

Από Lemma 18, Evans, Κεφ 5, § 308

$$(15) \quad u^+, u^- \in W^{1,2}(U) \Rightarrow u^+, u^- \in H_0^1(U) \quad (u^\pm|_{\partial U} = 0).$$

$$(16) \quad Du^+ = \begin{cases} Du & \text{στο } \{u > 0\} \\ 0 & \text{στο } \{u \leq 0\} \end{cases}, \quad Du^- = \begin{cases} 0 & , \{u > 0\}^{\partial U} \\ -Du, & u \leq 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε

(14)

$$B[u^+, u^-] = 0$$

$$(17) \quad \lambda_1 = B[u, u] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-]$$

$$\geq \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 + \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2 \quad (\text{Χαρακτηριστικός } \lambda_1)$$

$$= \lambda_1 [\|u^+\|_{L^2}^2 + \|u^-\|_{L^2}^2] = \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2 = \lambda_1$$

$$\therefore \quad B[u^+, u^+] = \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2$$

$$B[u^-, u^-] = \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2$$

} (18)

Κατ' συνέπεια από 5.

$$(19) \quad \begin{cases} Lu^+ = \lambda_1 u^+ & \text{στο } U \\ u^+ = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} Lu^- = \lambda_1 u^- & \text{στο } U \\ u^- = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Από παραπάνω (δεν έχουμε καθίσει) συμπεραίνουμε
 ότι $u^+, u^- \in C^1(U) \cap C^1(\bar{U})$.

$$(19) \Rightarrow \int u^+ \geq 0 \quad (14)$$

δηλαδή u^+ υπερδύει

Από την ισχύον αρχή τη φέρνεται προκύπτει ότι αν $u^+ \neq 0$

τότε $u^+ > 0$ στο Ω . Παρομοίως και φέρνεται u^-

Άρα αν u εφίγει σφαιρικά την (11)

$$\text{ή } u^- \equiv 0 \quad \text{ή } u^+ \equiv 0.$$

Τέλος θα δούμε την απλοτική της κύρια ιδιότητα.

Εστω $u, \bar{u}$ δύο μη τετριμμένες λύσεις της (11).

Από τα προηγούμενα

$$(21) \quad \int_{\Omega} \bar{u} dx \neq 0 \quad (\text{ή } \bar{u} > 0 \text{ ή } \bar{u} < 0)$$

Επιλεγούμε χ τ.ω.

$$(22) \quad \int_{\Omega} (u - \chi \bar{u}) dx = 0$$

Επίσης $u - \chi \bar{u}$ εφίγει την (11),

$$\text{όρα} \quad \begin{cases} \text{ή } u \geq \chi \bar{u} \\ \text{ή } u < \chi \bar{u} \end{cases} \quad (23)$$

να συγκρίνεται με την (22). Αποδείχεται και η απλοτική της ιδιότητας.

□