

ΔΙΑΛΕΞΗ 20 - ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

1) $\frac{\text{Απειροστικός}}{[u \in C^2]}$
 $\boxed{\nabla u(x_0) = 0, \text{ Τοπικό Μέγιστο}}$ $\left(\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \leq 0$ (αρνητικά ορισμένο)
 $\boxed{\text{ιδιοτιμές}}$

$\Sigma_{\text{ηφ}} : x \rightarrow u(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, \dots, x_n^0)$, τοπ. μεγ.
 $\partial^2 u(x_0) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)$

$Lu := -a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} + cu$

$a^{ij}, b^i, c \in C(\bar{U})$ $\sum_{i,j} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$
 για $\xi = e_k \Rightarrow a_{kk} \geq \theta, k=1, \dots, n$

2) Αόδυνος Αρχή Μεγίστου

U ανοικτό, φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$

θ_1
 $\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(U) \cap C(\bar{U}) \\ c(x) \equiv 0 \end{array} \right.$



(i) $Lu \leq 0$ στο U (υπομν.)

$\Rightarrow$

$\max_U u = \max_{\partial U} u$

(ii) $Lu \geq 0$ στο U

$\min_U u = \min_{\partial U} u$

Απόδειξη

(i)

1. Εστω $Lu < 0$ στο U ,

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u,$$

και εστω $x_0 \in U$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla u(x_0) = 0 \\ \partial^2 u(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

2. $A := (a^{ij}(x_0))$, συμμετρικός, γνησία definites, $\lambda_1 > 0$

$$O A O^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad O O^T = O^T O = I.$$

$$O = (O_{ij})$$

$$x_0 = 0 \quad (\text{χ.β.γ.})$$

Αλλαγή Μεταβλητών : $y = O x$, $x = O^T y$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = u_{y_k} O_{ki} \quad (\text{αδροστικα substitution})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{y_k} O_{ki}) = \frac{\partial}{\partial y_l} (u_{y_k} O_{ki}) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \\ &= u_{y_k y_l} O_{ki} O_{lj} \end{aligned}$$

Στο $x_0 = 0$:

$$(1) \quad a^{ij}(0) u_{x_i x_j}(0) = a^{ij} u_{y_k y_l} \delta_{ki} \delta_{lj} \leq 0$$

Εξυπαράστα :

Παρατηρούμε : $a^{ij} \delta_{ki} \delta_{lj} = \delta_{kl} \lambda_l$

$$(\delta A \delta^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

$$a^{ij} u_{y_k y_l} \delta_{ki} \delta_{lj} = u_{y_k y_k} \delta_{kk} \lambda_k$$

$$= u_{y_k y_k} \lambda_k$$

$$= u_{y_1 y_1} \lambda_1 + \dots + u_{y_n y_n} \lambda_n$$

Εκπνέει από Σηφ ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(0) \leq 0$, $i=1, \dots, n$

και $\lambda_j > 0$, $j=1, 2, \dots, n$.

$$\geq \quad Lu(0) = -a^{ij} u_{x_i x_j}(0) + b^i(0) u_{x_i}(0) \stackrel{(1)}{\geq} 0$$

Παρ σύγκρινεται με την υποθέση $Lu \leq 0$ στο U .

Αρα σε αυτή την περίπτωση

α. θεωρούμε τώρα ότι ισχύει

$$\boxed{x_0 \in \partial U.} \quad (*)$$

$$Lu \leq 0 \quad \text{στο } U$$

Ελέγουμε την βασική συνθήκη

$$(2) \quad u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}, \quad \lambda, \varepsilon > 0 \text{ να επιλεγούν.}$$

$$Lu^\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1})$$

$$\leq \varepsilon L(e^{\lambda x_1})$$

$$= \varepsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 a'' + \lambda b']$$

$$\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 \theta + \lambda \|b'\|_{L^\infty}]$$

$$< 0 \quad \text{για } \lambda \gg 1. \quad \text{στο } U, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Άρα με το (x)

$$(3) \quad \max_U u^\varepsilon = \max_{\partial U} u^\varepsilon$$

Παρατηρούμε τώρα

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{και καταγράφουμε.}$$

5. Η περίπτωση (ii) αναφέρεται στην (i):
 $L(-u) \leq 0.$

□

Η Ισχυρή Αρχή του Μέγιστου (Hopf)

Θα δείξουμε ότι αν

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{στο } U$$

και το μέγιστο λαμβάνεται στο $\bar{U}$,

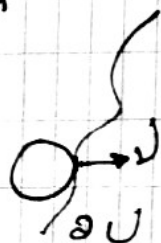
$$\text{δηλ.} \quad \max_{\bar{U}} u = u(x_0)$$

$\Rightarrow u(x) \equiv \text{σταθερά στο } U.$

Το Συμπέρασμα Λήμμα του Hopf (1925)

Υπ: ① $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $C \equiv 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$

$L = -a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i u_{x_i}$ u έχει την ιδιότητα της εδ. ή $\Delta u \leq 0$ στο U



③ και $\exists x_0 \in \partial U$ τ.ω.

$$u(x_0) > u(x), \quad \forall x \in U$$

Συμπέρασμα
Ισχύει

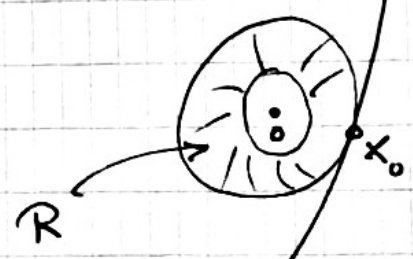
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \quad \nu \perp \partial U$$

ήτοι τα εξω

Idea της Απόδειξης (Lipshitz Hopf) 1925

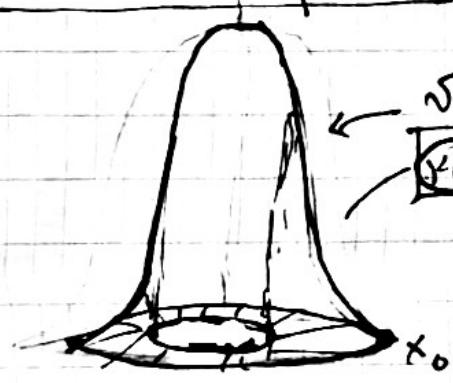
$$L = -a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i}$$

- (i) $L u \leq 0, x \in U$
- (ii) $u(x_0) > u(x), x \in U$



Τετρίπλευρα: $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq 0$
 Συμπέρασμα: $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0$ (*)

Βασική Συνάρτηση σ



$$\begin{matrix} \partial^- R & \partial^+ R \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{r}{2} \leq \rho \leq r \end{matrix}$$

$$-L\sigma \geq 0$$

(*) $\sigma > 0$ στο R , ακριβώς, $\sigma = 0$ στο $\partial^+ R$

$$\begin{matrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} < 0 \text{ στο } \partial^+ R \\ \Rightarrow \frac{\partial \sigma(x_0)}{\partial \nu} < 0 \end{matrix}$$

(3)

$u(x) + \epsilon \sigma(x) - u(x_0)$
 $-L\sigma \geq 0$ στο R
 $\Rightarrow -L(u + \epsilon \sigma) \geq 0$, στο $R \Rightarrow -L(u + \epsilon \sigma - u(x_0)) \geq 0$
 (Αόκμω) Αρχή Μεγίστου $\Rightarrow u + \epsilon \sigma - u(x_0) \leq 0$
 στο R .

$$u + \epsilon \sigma - u(x_0) \Big|_{x=x_0} = 0$$

Τετρίπλευρα $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \nu} (u + \epsilon \sigma - u(x_0)) \Big|_{x=x_0} \geq 0$, διότι $\nabla \perp \partial R$ στο x_0
 $\Rightarrow \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq 0$