

Εστω $u \neq M$.

Θεωρούμε το

$$V = \{x \in U \mid u(x) < M\}$$

Επιλέγουμε $y \in V$ π.ω. $\text{dist}(y, \zeta) < \text{dist}(y, \partial U)$
(γιατί $\exists$ τέτοιο;)

Θεωρούμε την περιοχή B με κέντρο το y και

έντος της V , και εστω $x_0 \in \partial B$ όπως στο σχήμα.

Θα εφαρμόσουμε το ανωριακό Λήμμα στην B :

$$\begin{cases} 1. u \leq 0 \text{ στην } B \\ u(x_0) = \max u = M, x_0 \in \partial B \\ u(x) < u(x_0) \quad \forall x \in B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0$$

Αποπο διότι

$$\nabla u(x_0) = 0$$

(max).

□

Πορίσμα (Ισχύει Αρχή του Μέγιστου)

Εστω $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό

$$Lu = -a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} \leq 0 \quad (-\Delta u \leq 0)$$

και εστω ότι η u λαμβάνει το $M = \max_{\bar{U}} u$ σε

εσωτερικό σημείο

Συμπέρασμα

$u \equiv \text{σταθερά στο } U$.

Απ

$$C = \{x \in U \mid u(x) = M\} \quad C \neq \emptyset$$



$$\boxed{\bar{C} \neq \bar{U}}$$

(iv) Τέλος θα εξιστοήσουμε ότι

$$(9) \quad \frac{\partial \psi(x_0)}{\partial \lambda} < 0 \quad !$$

Πραγmati

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial \lambda} = \nabla \psi(x_0) \cdot \gamma(x_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{-\lambda |x|^2} - e^{-\lambda r^2} \right) = e^{-\lambda |x|^2} (-\lambda) \frac{d|x|}{|x|} \frac{x_i}{|x|} \\ &= -2\lambda e^{-\lambda |x|^2} x_i \end{aligned}$$

$$\gamma(x_0) = \frac{x^0}{|x^0|}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi(x_0)}{\partial \lambda} = -2\lambda e^{-\lambda |x|^2} \frac{x_i^0}{|x^0|} x_i^0 = -2\lambda e^{-\lambda |x|^2} r < 0$$

Συνεπως

$$(8), (9) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \lambda} > 0 \quad !$$

□

(150)

iii) Στο σημείο της διατύπωσης

$$(3) \quad u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B(0, \frac{1}{2})$$

για $\varepsilon > 0$, πάρω ($\partial B(0, \frac{1}{2})$ ολόκληρο, $\max_{\partial B(0, \frac{1}{2})} u < u(x_0)$)

από (3)

Επής

$$(4) \quad u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B(0, r)$$

(δυσκολία $v = 0$ στο $\partial B(0, r)$!).

$$\text{iii)} \quad (5) \quad \overset{\leq 0}{\perp} (u + \varepsilon v) = \overset{\leq 0}{\perp} u + \varepsilon \overset{\leq 0}{\perp} v \leq 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}$$

$$(6) \quad u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0) \leq 0 \quad \text{στο } \partial \mathbb{R}$$

Από την Αρχή Μέγιστου $\Rightarrow$

$$(7) \quad u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0) \leq 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}$$

$$u(x_0) + \varepsilon v(x_0) - u(x_0) = 0, \quad \text{στο } x_0$$

$\Rightarrow$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} (u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)) \geq 0$$

Δηλ

$$(8)' \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \geq 0$$

(149)

↓ Διότι
8 at camp18:45
3:45

(Παρατηρείται ότι η v , αν θεωρούμε ως σφαιρικό φερόμενο,

$$v_{|x|} = e^{-\lambda x^2} - e^{-\lambda r^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(*)

$$v'_{|x|} = 2e^{-\lambda x^2} \lambda [2\lambda x^2 - 1]$$

Ανάλυση κριτηρίου στο $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

$$(1) \Delta v = -a^{ij} v_{x_i x_j} + b^i v_{x_i}$$

$$= e^{-\lambda |x|^2} a^{ij} (-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda \delta_{ij})$$

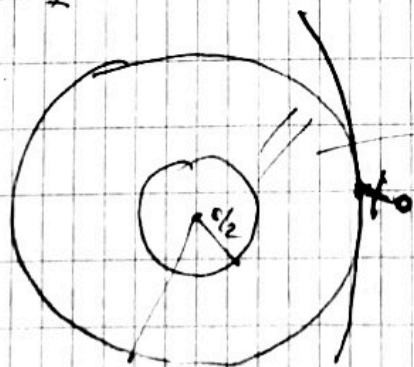
$$- e^{-\lambda |x|^2} b^i 2\lambda x_i$$

$$\vec{b} = (b^1, \dots, b^n)$$

$$\leq e^{-\lambda |x|^2} [-4\lambda^2 |x|^2 + 2\lambda a^{ij} \delta_{ij} + 2\lambda |b| |x|]$$

Παρατηρείται $a^{ij} \delta_{ij} = a^{ii} = \text{tr} A$

$$= e^{-\lambda |x|^2} [-4\lambda^2 |x|^2 + 2\lambda \text{tr} A + 2\lambda |b| |x|]$$



$$R = B(0, r) - B(0, r/2)$$

$$\frac{r}{2} \leq |x| \leq r$$

$$R = \text{Σφαίριον}$$

$$(2) \Delta v \leq e^{-\lambda |x|^2} [\text{---}] \leq 0, \quad \text{για } \lambda \gg 1$$

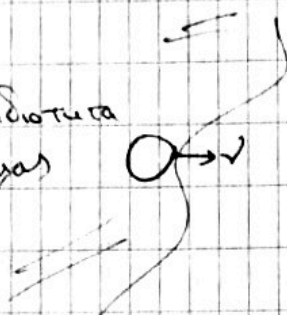
(Διότι ο όρος λ^2 με $\ominus$ κερδίζει. Η κρισιμότητα στην (*)
αφαιρείται $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \leq r/2$)

ΔΙΑΛΕΞΗ 21 Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ HOPF

Άσκησης Επώνυμ, Κεφ: 16, 17, 18, 19, 21,
Υποενότητες 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12

$$\textcircled{1} \begin{cases} u \in C^2(\bar{U}) \cap C^1(\bar{U}), \\ Lu = -a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} \leq 0 \quad \text{στο } U \\ a^{ij}, b^i \in C(\bar{U}), \quad a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ U έχει την ιδιότητα της εδ. φράγας



$\delta = \text{προς τα εσω (της φράγας)}$
ψαχάκια κενέτος.

$\textcircled{3} \exists x_0 \in \partial U \text{ τ.ω.}$

$$u(x_0) > u(x), \quad \forall x \in U$$

Συμπέρασμα

Ισχύει

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0, \quad \nu \perp \partial U$$

Παράτημα

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{αποτέλεσμα!}$$

Απ (Βλέπε σχήματα 6.147, διαφέρει 20)

ii) Βολντικίσι ανώτατα

$$v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-x^2}, \quad \text{στο } B$$

$\lambda > 0$ θα ελεγχθεί.