

### Ασκήση 3

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  AC (απολυτά συνεχής) αν  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

T.W.  $\sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$

( $\forall N, \delta$  δειν ανδέεται με το  $N$ )

Θεώρημα (Προϋπόθεση A.V.)

Αν  $g \in L^1(\mathbb{R}^1)$  και  $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$

$\Rightarrow f \in AC, f' = g$  a.e.

### Σχόλιο

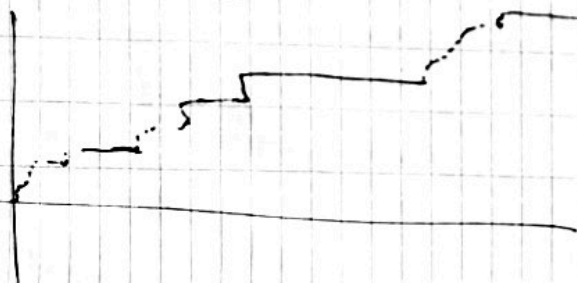
Οι AC συναρτήσεις είναι <sup>συνεχώς</sup> ~~ακέραιες~~ για τις οποίες ισχύει το θεώρημα του Απειρώτου και:

Θεωρήματα

(\*)  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$

Ερώτηση: Έστω  $f$  συνεχής στο  $[a, b]$ ,  $f$  διαφορίσιμη π.ε. με εξοικονομημένο παράγωγο  $f' \in L^1(a, b)$ . Ισχύει η (\*);

Απάντηση: ΟΧΙ. Θεωρούμε την συνάρτηση Cantor η οποία είναι συνεχής, αυξανόμενη,  $f' = 0$  σχεδόν παντού (αλλά ΟΧΙ ΣΤΑΘΕΡΗ!).



Σχολιο

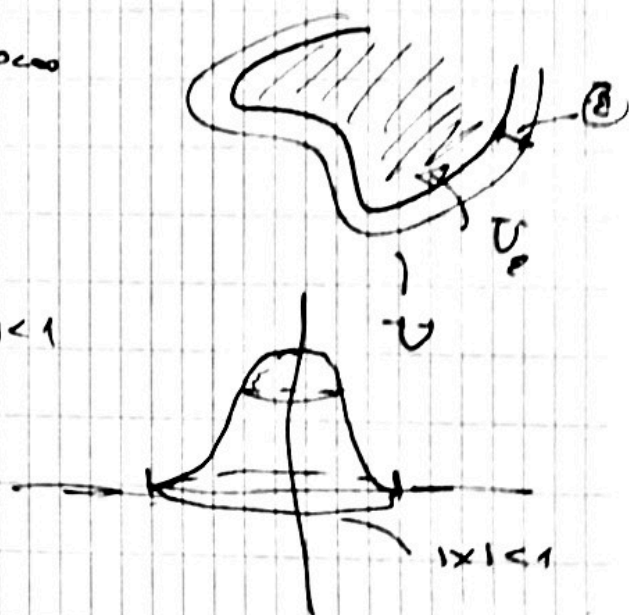
Αν στο Ερώτημα υποθέσουμε ότι  $\nabla \Delta$  διαφορίζεται  $\forall x$ !  
Τότε ισχύει η (x)!

2. Προσγγισμοί Συναρτήσεων Sobolev Μεσω Αρχών Συναρτήσεων  
(mollifiers τα Friedrich's - Courant 1950's)

$U \subset \mathbb{R}^n$ , ανοικτό, φραγμένο,  $1 \leq p < \infty$

$$U_\varepsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$\int \eta(x) dx = 1, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Θεώρημα (Εσωτερικές Προσγγίσεις)

Εστω  $u \in W^{r,p}(U)$ ,  $1 \leq p < \infty$   
 $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$

Ισχύουν τα ακόλουθα

(i)  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$   $\forall \varepsilon > 0$

(ii)  $u^\varepsilon \rightarrow u$   $W^{r,p}_{loc}(U)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$

# Απόδειξη

(i) Θα δείξουμε ότι αν  $f \in L^p(U) \Rightarrow f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \in C_c^\infty(U_\varepsilon)$   
Υπενθύμιση (Πραγματική)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int g(x,t) dx = \int \frac{\partial g(x,t)}{\partial x_i} dx$$

$$\textcircled{+} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \exists \eta \frac{\partial g}{\partial x_i} \text{ a.e.} \\ \textcircled{2} \int \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| dx < +\infty \end{array} \right.$$

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy$$

Για  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  εφαρμόζουμε το  $\textcircled{+}$

(ii) •  $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$  στο  $U_\varepsilon$

$$|\alpha| \leq k$$

( $D^\alpha$  αδυναμ παράγωγος)

Πρώτον η  $u^\varepsilon$  είναι διαφορίσιμη καθώς όπως η  
 καθώς παράγωγος  $\frac{\partial^{|\alpha|} u^\varepsilon}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = D^\alpha u^\varepsilon$   
 (αδυναμ)

$$D^\alpha u^\varepsilon = \frac{\partial^{|\alpha|} u^\varepsilon}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \int \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(*)}{=} \int \frac{\partial^{|\alpha|} \eta_\varepsilon(x-y)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(y) dy \\ & = (-1)^{|\alpha|} \int \frac{\partial^{|\alpha|} \eta_\varepsilon(x-y)}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} u(y) dy \\ & \quad (\eta_\varepsilon(y) \in C_c^\infty(U)) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{2\alpha} \int_U \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y) dy$$

$$= \int_U \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y) dy$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \downarrow \quad L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$D^\alpha u$$

Isodwerte

$$u^\varepsilon \rightarrow u$$

$$W^{k,p}_{loc}(U)$$

□

Алгоритм 3 — Франс р 306

$$U = \{ |x_1| < 1, |x_2| < 1 \}$$

$$u(x) = \begin{cases} 1-x_1, & x_1 > 0, |x_2| < x_1 \\ 1+x_1, & x_1 < 0, |x_2| < -x_1 \\ 1-x_2, & x_2 > 0, |x_1| < x_2 \\ 1+x_2, & x_2 < 0, |x_1| < -x_2 \end{cases}$$

Γα ίδια  $p \in [1, \infty]$  και  $u \in W^{1,p}(0,1)$  ??