

Διάλεξη 61. Σχολία επί της 6.31

- 1) Παρατηρούμε ότι ο φορέας της $v^E = \eta_E * u_E$ περιέχεται ουσιαστικά στο V :

$$v^E(x) = \int_V \eta_E(x-y) u_E(y) dy, \quad \text{φορέας } v^E \text{ εντός}$$

ε-περιχώσεως των V_E / άρα ουσιαστικά εντός των V .

$$\text{Συνεπώς} \quad v^E(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_E(x-y) u_E(y) dy$$

$$\Rightarrow v^E \in C^\infty(\bar{V}).$$

- 2) Παρατηρούμε ότι $u_E \in W^{k,p}(V)$. Ας δείξουμε ότι $u \in W^{k,p}(V)$.
 Η συνάρτηση δοκιμής με φορέα εντός V

$$\int_V u_E(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx$$

$$= \int_V u(x + \lambda e_n) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx, \quad y = x + \lambda e_n$$

$$= \int_{V_E} u(y) \frac{\partial \phi(y - \lambda e_n)}{\partial y_i} dy, \quad y \rightarrow \phi(y - \lambda e_n)$$

ουσιαστικός φορέας
στο V_E

$$= - \int_{V_E} \frac{\partial u}{\partial y_i} \phi(y - \lambda e_n) dy \quad (\text{ορισμός αδυναμίας})$$

$$= - \int_V \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi(x) dx.$$

3) Επικεντρωμένα στον όρο

$$(\eta_\varepsilon * u - u)$$

στο β). Παρατηρούμε ότι

$$\|\eta_\varepsilon * u - u\|_{L^p(V)} = \|\eta_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

όπου u έχει επεκταθεί με $u=0$ εκτός του V

$$(\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_V \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

Κανονισμός χύμης του θεωρήματος 6.11 έχουμε

$$\|\eta_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Περαιτέρω :

$$D^\alpha \eta_\varepsilon * u = \dots + (\eta_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u) - \dots$$

επικεντρωμένα των L^p αντιστοιχεί $D^\alpha u$ με μηδέν εκτός V

#

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΣ $E: W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

(4) Υποθέσεις : $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$, λεπτό

Θεώρημα 1

$\exists$ πραγματικός τελεστής $E = W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$
 τέτοιο $U(x) = (Eu)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall E \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

C ανεξάρτητη σταθερά από το u ,

και

$$U = u \quad \text{a.e. στο } U$$

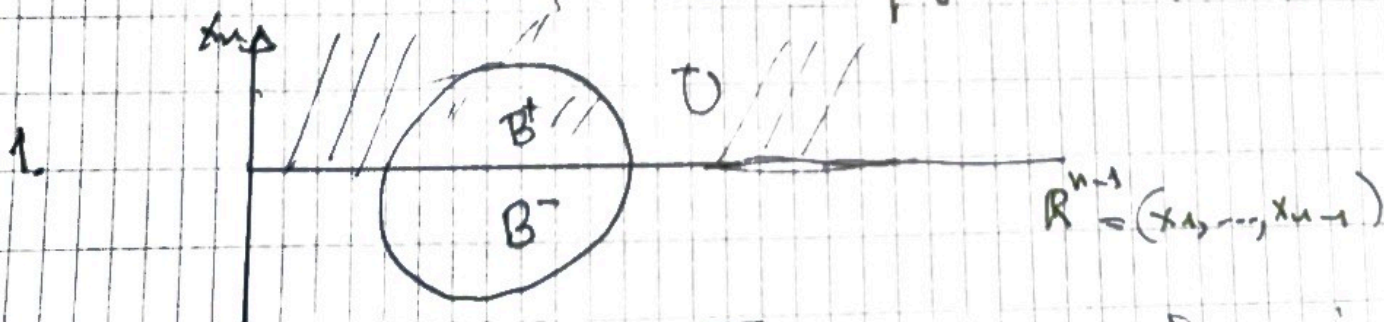
Τέλος όλοι οι φορείς των Eu περιέχονται σε

κάποιο ανοικτό, φραγμένο $V \supset U$.

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Στρατηγική : Αρκεί να υποδείξουμε ότι το
 ∂U τοπικά είναι C^1 - ορίσμος E

Χρησιμ. αμφιδιμορφίας και αναγωγή σε $B(x_0, r) \cap \mathbb{R}^n$
 Δοκιμάζοντας την φωνάδα. Θα δείξουμε με $C^1(\bar{U})$
 συνάρτηση ϕ που αντιστοιχεί



$$B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\} \subset U, \quad B^- = B \cap \{x_n < 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

2.

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_n, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) & , x \in B^- \end{cases}$$

3. Check that $\bar{u} \in C^1(\bar{B})$

• $\forall u \in C^1(B) \rightarrow -3u(\xi, 0) + 4u(\xi, 0) = u(\xi, 0)$

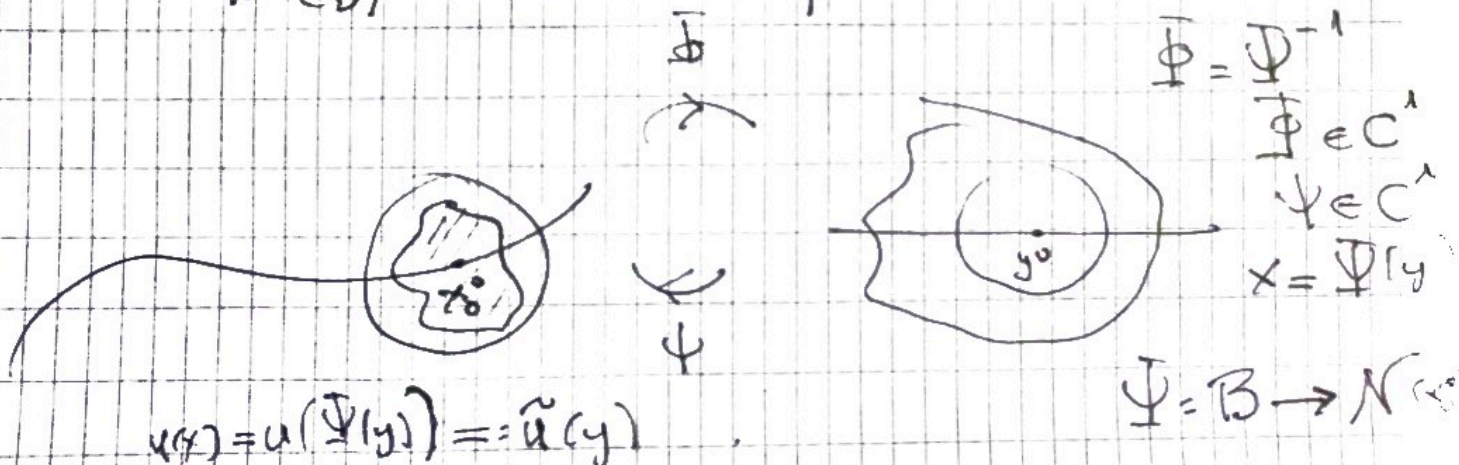
• Διαφορίσιμότητα $\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(\xi, 0) = -3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, 0) + 4 \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, 0), & i=1, \dots, n-1 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, 0) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, 0) \end{cases}$

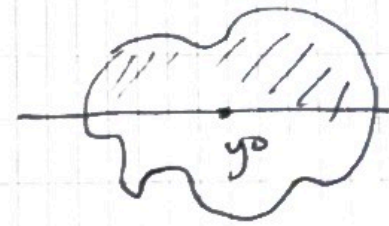
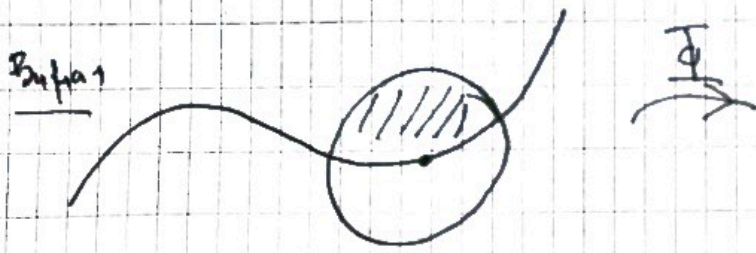
$\therefore \bar{u} \in C^1(\bar{B})$

4. $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = -3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, -x_n) + 4 \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, -\frac{x_n}{2}), \quad i=1, \dots, n-1$
 $(\xi, x_n) = x \in B^-$
 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, -\frac{x_n}{2})$

$\|u\|_{W^{1,p}(\bar{B})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}, \quad C \text{ avg. } u.$

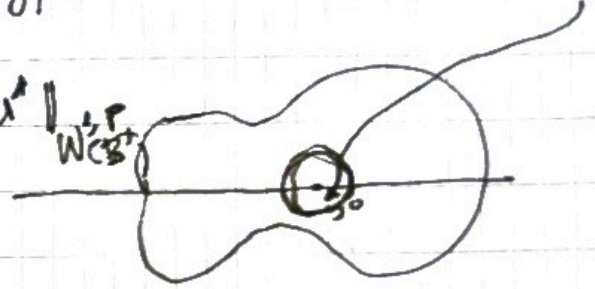
5.





Βήμα 2 = Επειδή στις y -απειροστικές ομές στο z , y , στο B

(Προσέγγιση: Μπορούμε με $\|u'\|_{W^{1,p}(B)} < \epsilon \|u'\|_{W^{1,p}(B)}$
 x και y , Στις 6.39
 y -απειροστικές το όμοιο)

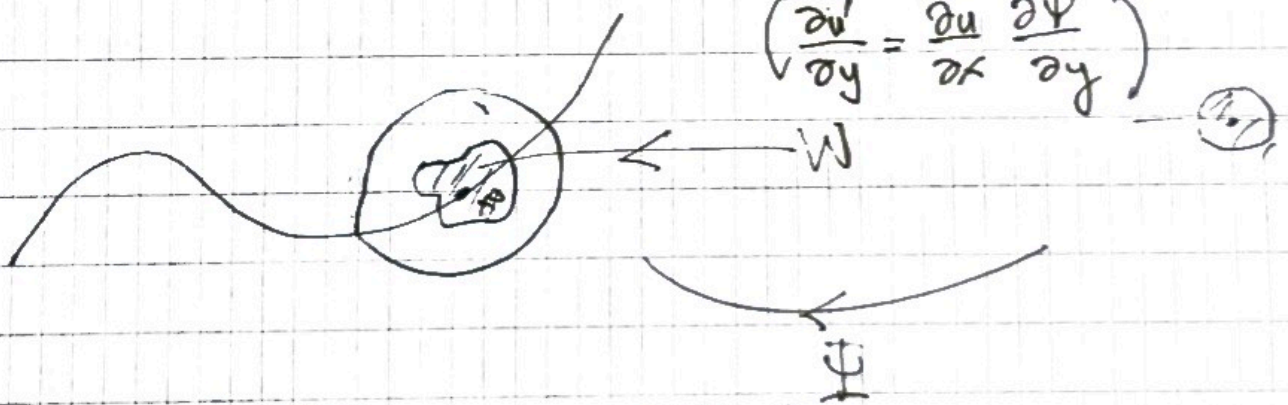


Βήμα 3 = Απειροστική $\Phi(y) = x$

$$\Phi(B) = W$$

u' - y η απειροστική

$\bar{u}'$ - εφελκυσμός



$$\left(\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

6. Διαφορές των Μονοδύναμων



∂U ομοιογενής, $x_1^0, \dots, x_N^0$

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N W_i$$

$$\left\{ \frac{1}{\epsilon_i} \right\}_{i=0}^N, \bar{u}_0 = 0$$

"Τύπος" $W_0 \subset U$

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N z_i \bar{u}_i$$

$$\left(\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \sum z_i(x) \bar{u}_i(x), \quad x \in U \Rightarrow \bar{u}_i(x) = u(x), \\ \sum z_i(x) u(x) &= u(x) \end{aligned} \right)$$

Επίσης προω των z_i , $\text{s.t. } \bar{u} \in C^1 V$

7. Coda

Εστω $1 \leq p < \infty$

Λόγω $u \in W^{1,p}(U) \ni u_m \in C^1(\bar{U})$ τ.μ.

$$u_m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$$

(Θεωρημα Poincaré)

Ε. χαρακτηρισ. πράξεις — επιεκτείνονται στον πεδίο $\mathbb{R}^n$
(μικροί — ανεξάρτητα των ακεραίων).

$$\|Eu_m - Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)}$$

$\{Eu_m\}$ Cauchy

$$Eu := \lim_{m \rightarrow \infty} Eu_m$$

$$\boxed{p \geq \infty} \quad \boxed{?} \quad \boxed{\square}$$