

Διάλεξη 8 Εφαρμογές Sobolev

Ι) Ερώτηση : $W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό
 Ισχύει και για $q > p$?

Συμπέρασμα : $\subset$

Διότι : $W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$ (υποσέτα)

και $i : W^{1,p}(U) \rightarrow L^q(U)$ συνεχής , $i(u) = u$ (ταυτοτική)

$$\text{δηλ. } \|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

II) Ερώτηση : $W^{1,p}(U) \subset C^\alpha(U)$ Ισχύει ?

$$C^\alpha(U) = \boxed{\text{Hölder Χώρος}}$$

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (*)$$

$$\|u\|_{C^\alpha} = \sup_U |u(x)| + \sup_U \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Τιμολογούμε ότι για $U = (a, b)$

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p dt \right)^{1/p}$$

(Αφ' (4) είναι).

Θ: I, II ισχύουν υπό προϋποθέσεις π.α. ανάλυσ. τα p, q και των διαστάσεων

Συμπέρασμα : $X \subset C \subset Y$ σημαίνει ότι η ταυτοτική $i(u) = u$ είναι συνεχής τελεστής. Έτσι πάντα ποσο αν U είναι φραγμένο ή μη.

(*) Σημ : Δείξτε ότι αν $\alpha > 1$ ανεξαρτήτως οι αν-τι-ες είναι σταθερές !

Ανέγκεια Σύνθεσης για Ερωτήματα (I) (Το Εμπνευσμένο Κρίμα)

Κατω από τους συνδυασμούς ισχύει η ανισότητα

$$(1) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$C = C(p, q, n)$ ανεξάρτητη

• της u

• των παραμέτρων της u

(??)

Παραδείγματα

Για $n=1$ η (1) ισχύει για $q=\infty, p=1$:

$$u \in C_c^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |u(x)| = \left| \int_{-\infty}^x u'(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)| dt.$$

Το Εμπνευσμένο της Κρίμα

Εστω ότι ισχύει η (1)

$$(2) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

Φοράμε το $u = u(x)$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ και θεωρούμε

$$(3) \quad u_\lambda(x) := u(\lambda x), \quad \lambda > 0. \quad \text{Έχουμε } u_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Σημαντικό ότι το πεδίο ορισμού αυξάνεται $x \rightarrow \lambda x$

THEOREM (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)

$$(6) \quad \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$$

 $\Leftrightarrow$

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$$

Aussagen (Nirenberg)

Aus der Aussage von (6) gilt $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1 ($p=1$) ($\frac{1}{p} = \frac{n}{n-1}$)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i$$

 $\Rightarrow$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i, \quad i=1, \dots, n$$

 $\Rightarrow$

$$(7) \quad |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integration w.r.t. x_1 :

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

Vervollständigt man Hölder ⁻⁶⁴⁻ (Ergans 2^{te} ed. Fort)

$$(*) \int_U |u_1 \dots u_m| d\xi \leq \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{p_k(U)}$$

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

$$\left(\int |uv| d\xi \leq \left(\int |u|^{p_1} d\xi \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int |v|^{p_2} d\xi \right)^{\frac{1}{p_2}} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 \right)$$

Man kann entsprechend was ergibt:

$$\hat{u}_2(x_1) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}, \dots, \hat{u}_n(x_1) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_n \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$dy_2 = dx_1$$

$$p_2 = p_3 = \dots = n-1$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_2|^{n-1} dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} = \|\hat{u}_2\|_{p_2(\mathbb{R})}$$

$$(9) \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \stackrel{(*)}{\leq} \left(\prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_i dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Στη συνέχεια ομαδοποιούμε ως προς x_2 :

(a) $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_i| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} |v_i| dx_i dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} dx_2$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_i| dx_i dy_i$ βρίσκεται εκτός

ομαδοποιούμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_i| dx_i dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \neq 2} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \quad (10)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |v_1| dy_1, \quad I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_i| dx_i dy_i, \quad i=3, \dots, n$$

Εφαρμόζουμε Hölder $\otimes$ στην (10):

$$\begin{aligned} (11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \neq 2} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2 &\stackrel{\otimes}{\leq} \prod_{i \neq 2} \|I_i^{\frac{1}{n-1}}\|_{n-1}(\mathbb{R}) \\ &= \prod_{i \neq 2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_i dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\prod_{i \neq 2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_i dx_2 \right) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_i dx_2 \right) \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{v}_n| dy_1 dx_2 \right) \left(\prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_i dx_i \right) \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Πάρε την ίδια στύλ (10) και ~~από τον~~ $\tau_n(11)$:

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\iint |\bar{v}_n| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\iint |\bar{v}_n| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\left(\prod_{i=3}^n \iint |\bar{v}_n| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Συμπάρε την (9) με την (12) α'ότιαν μέν

διαφαίνεται ότι αυξήσαν τις υ-εξαρτήσεις ως προς $x_3, \dots, x_n$

δε καταργούμε στύλ

$$(13) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{v}_n| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

και είναι η GNS για $p=1$.

Βύλη 2 (1000)

Θεωρούμε την (13) και θέτουμε $\delta = |u|^\delta$, όπου $\delta > 1$

Το επιθυμητό είναι να έχουμε:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\delta n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\delta| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} = \delta \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\delta-1} |\nabla u| dx$$

$$\left(\nabla |u|^\delta = \nabla (|u|^2)^{\frac{\delta}{2}} = \delta |u|^{\delta-2} u \nabla u \leq \delta |u|^{\delta-1} |\nabla u| \right)$$

$$\leq \delta \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\delta-1) \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Επιθυμούμε

$$(\delta-1) \frac{p}{p-1} = \frac{\delta n}{n-1} \Rightarrow \delta = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

$$\frac{\delta n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

□

Answers: 9, 10, 11 Exams