

Διάλεξη 2 (Παράγωγος της δ -Συνέλιξης - Ομαδοποίηση)

1. Op (δ -Ακολουθία)

$\{w_\varepsilon\}$ δ -ακολουθία

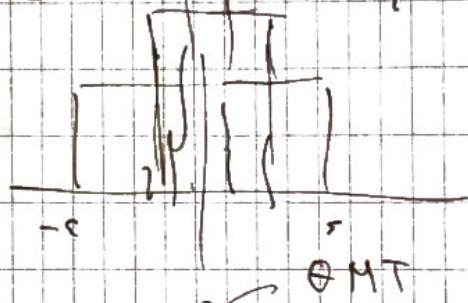
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int w_\varepsilon(x-y) f(y) dy = f(x), \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R})$$

Πορφυρίστικα: $w_\varepsilon(x-\cdot) \rightarrow \delta_x(\cdot)$

$$\int w_\varepsilon(x-y) f(y) dy \rightarrow \int \delta_x(y) f(y) dy$$

Παρά 1

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$



Εμβαδά φεγγαρί

$$\int w_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(y) dy = \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi) \rightarrow f(x)$$

Σημ: Συνελίξεις είναι ήσσος προς το-πικά:

$$\int w_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int w_\varepsilon(y) f(x-y) dy \approx \sum_k f(x-y_k) w_\varepsilon(y_k) \Delta y$$

Κανονικοποίηση $\int w(y) dy = 1 \iff \sum w_\varepsilon(y_k) \Delta y = 1$.

Μέρος προς ΟΜΑΛΟΤΗΤΗ

Παρά 2

Εστω $\int_{\mathbb{R}} w(x) dx = 1$, $w \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C_c(\mathbb{R})$, $w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} w(\frac{x}{\varepsilon})$

$\Rightarrow \{w_\varepsilon\}$ δ -ακολουθία.

(Σημείωση)

(Διατυπεί
ομοιομορφία)

Απ

$$\begin{aligned} \int w_\varepsilon(y) f(x-y) dy - f(x) &= \int w_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \\ &= \int \frac{1}{\varepsilon} w\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) [f(x-y) - f(x)] dy = \int \frac{1}{\varepsilon} w(z) [f(x-\varepsilon z) - f(x)] \varepsilon dz \\ &\quad \left(\frac{y}{\varepsilon} = z\right) \\ &= \int w(z) [f(x-\varepsilon z) - f(x)] dz \end{aligned}$$

f συνεχής σε συμπαγείς ($f \in C_c(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ ομοιόμορφα συνεχής

$\Rightarrow |f(x-\varepsilon z) - f(x)| \rightarrow 0$, ομοιόμορφα $z \in \mathbb{R}$

$$\max_x \left[\left| \int w_\varepsilon(y) f(x-y) dy - f(x) \right| \right]$$

$$\leq \left(\max_x |f(x-\varepsilon z) - f(x)| \right) \int_{\mathbb{R}} |w(z)| dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Σημ: Ομοιόμορφα συνεχής - χρειαζόμαστε f !

Παράδειγμα

Εστω $w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} w dx = 1$, $w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Κρίσιμα σημείο
αλλαγής + $\int_{\mathbb{R}^n} |w| dx$

Εστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε ισχύει

① $1 \leq p < \infty \Rightarrow f * w_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$

② $p = \infty$ $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow f * w_\varepsilon \rightarrow f$
ομοιόμορφα στο K

Απ

A. Άμψα

Τία $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$y \rightarrow f_x(y) := f(x+y)$$

Εστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

Τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|f_x - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Σημ. (Δεν ισχύει για $p = \infty$, εκτός εάν $f \in \text{συνεχής}$)

Απόδειξη

① Εστω g συνεχής με συνθροχίση (συντ. σ. συνεχής)

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(y)|^p dy = 0$$

(Εντο: $\max_y |g(x+y) - g(y)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, y σε οποιονδήποτε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(y)|^p dy = \int_K |g(x+y) - g(y)|^p dy$$

$$\leq \max_y |g(x+y) - g(y)|^p \int_K dy \rightarrow 0$$

(K οποιονδήποτε $|x| \leq 1$)

② Δόξουν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{Από Luzin})$$

$$\|f_x - g_x\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\text{μεταφορά αμεσώμετο})$$

$$\therefore \|f_x - g_x\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \|f_x - f\|_{L^p} &\leq \|f_x - g_x\|_{L^p} + \|g_x - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_x - g\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{από } ① \end{aligned}$$

B. Απόδειξη Riemann-Lebesgue

$$\begin{aligned} (f * w_\varepsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) w_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(y)] w(y) dy \end{aligned}$$

α) $1 \leq p < \infty$

Μinkowski

$$\|f * w_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{-y} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |w(y)| dy \quad (**)$$

Αυτο το βήμα κανείς ως εξής:

Trippate off

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p}$$

Τώρα πάλι αδειάζουμε Riemann:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-z) - f(z)] w(z) dz \sim \sum_k [f(x-z_k) - f(z_k)] w(z_k) \Delta z$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(\cdot - z) - f(z)] w(z) dz \right\|_{L^p} &\leq \sum_k \|f(\cdot - z_k) - f(z_k)\|_{L^p} |w(z_k)| \Delta z \\ &\approx \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{-z} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |w(z)| dz, \text{ για } n \text{ (**)} \text{ και } \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Τώρα θα παραβεί στο όριο στην (**), $\epsilon \rightarrow 0$, πάλι

Lebesgue:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_{-z} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \text{Αντίφαση.}$$

$$\begin{aligned} \|f_{-z} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |w(z)| &\leq (\|f_{-z}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) |w(z)| \\ &= 2 \|f\|_{L^p} |w(z)|, \quad w \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{-z} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |w(z)| dz = 0$$

(Κυριαρχία Συναρτήσεων)

3) $p = \infty$, $f \in \mathcal{C}_0^\infty$. Όπως στο Παρ 2).

□