

Διάλεξη 5

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΥΚΝΟΤΗΤΟΣ ΕΝΑΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δείγμα

A) Έστω $u \in W^{r,p}(U)$, $1 \leq p < \infty$, U ανοικτό, $U \subset \mathbb{R}^n$
 τότε $\exists \{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(U)$, τ.ω. $u^\varepsilon \rightarrow u$ στο $W^{r,p}_{loc}(U)$

B) Επίσης δείγμα το ισχυρότερο (Θ. 1 και II) ότι αν
 U ανοικτό, φραγμένο, $U \subset \mathbb{R}^n$ και $u \in W^{r,p}(U)$,
 τότε $\exists \{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(\bar{U}) \cap W^{r,p}(U)$ τ.ω. $u^\varepsilon \rightarrow u$
 στο $W^{r,p}(U)$.

Θ. προσέγγιση u^ε είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $W^{r,p}(U)$:

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{r,p}(U)} = o(1) \Rightarrow \|u^\varepsilon\|_{W^{r,p}(U)} = \|u\|_{W^{r,p}(U)} + o(1), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Τέλος θα δείξουμε ότι αν το ∂U είναι αρκετά ομαλό
 οι C^∞ συναρτήσεις μπορεί να εγγεγραφούν $C^\infty(\bar{U})$

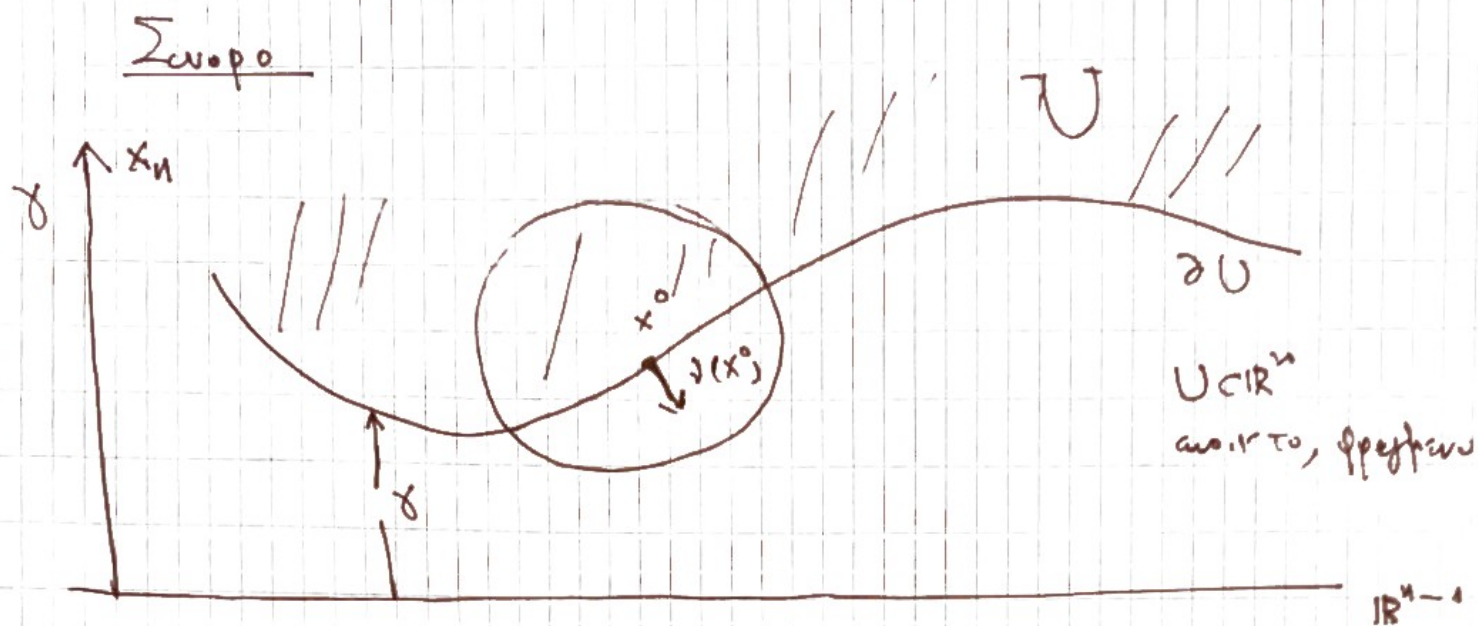
Lipschitz χάρτα ο.κ.



Όχι όμως

for others!



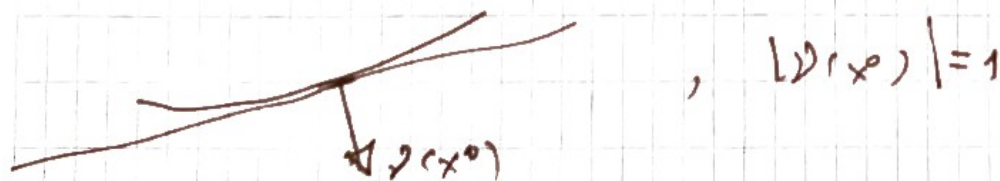


Op : $\partial U \in C^k$ αν $\forall x^0 \in \partial U \exists r > 0$ και C^k συνάρτηση $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε μετά ενδεχομένως από $(x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}))$ είναι αναμετατρέψιμο των αξιών τους αντεταγμένων το σωρο είναι γραφίδα της γ σε περίχρη τα x^0 :

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

∂U αναγνιστικό σωρο αν η γ είναι προφανώς αναγνιστική.

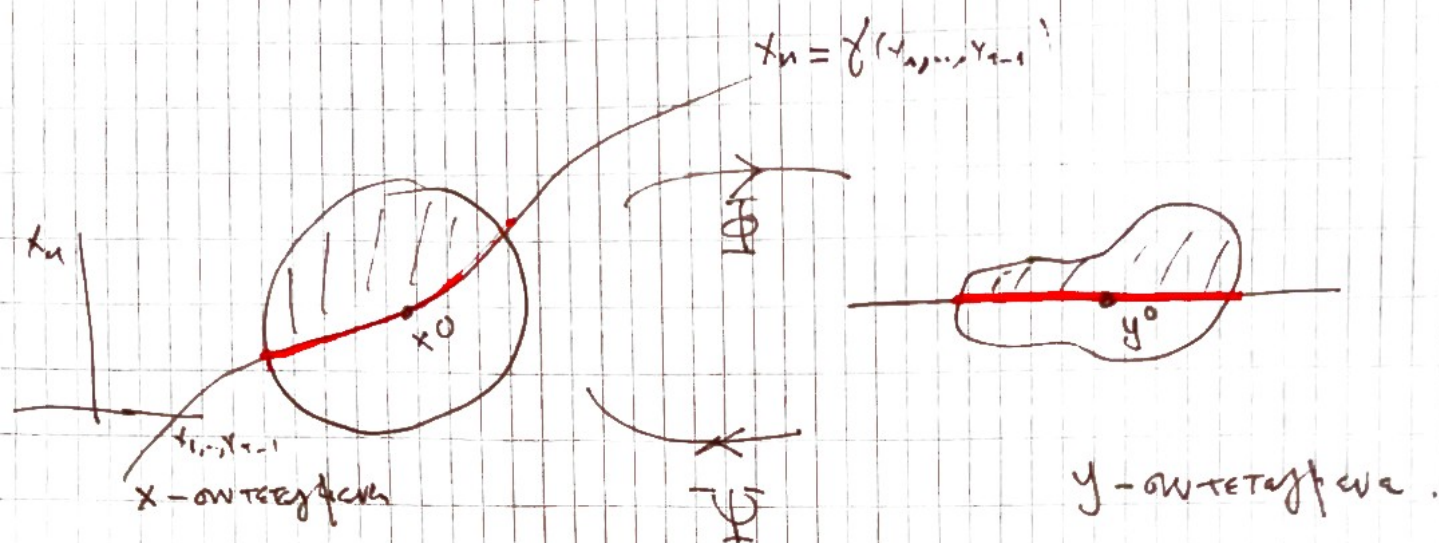
Op : (i) Αν $\partial U \in C^1$ τότε ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο των ∂U , και η προς τα εξω κάθετος



$$|n(x^0)| = 1$$

(ii) Αν $u \in C^1(\bar{U})$ τότε $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$.

Επιπεδοποίηση των Σωμάτων



$$x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$y_i = x_i =: \Phi^i(x), \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x) \end{cases} \Leftrightarrow y = \Phi(x)$$

Ποσοδοποίηση.

$$\boxed{\Psi = \Phi^{-1}}$$

$$\begin{cases} x_i = y_i = \Phi^i(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \Leftrightarrow x = \Psi(y)$$

$$\text{Jacobian: } \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \gamma}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j} \right) = 1$$

3. Παρατηρήση

$$v^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{στο } W^{k,p}(V) \quad , \quad v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$$

Παρατήρησι

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \rightarrow 0$$

Εξέταση =

α) $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \rightarrow 0$ λόγω συνέχειας της L^p ως προς την μετατόπιση.

Για τις παραγωγούς ομοίως.

$$\begin{aligned} \beta) \quad v^\varepsilon - u_\varepsilon &= [\eta_\varepsilon * u_\varepsilon] - [(u_\varepsilon - u) + u] \\ &= [\eta_\varepsilon * (u_\varepsilon - u) + \eta_\varepsilon * u] - (u_\varepsilon - u) - u \\ &= \eta_\varepsilon * (u_\varepsilon - u) + (\eta_\varepsilon * u - u) - (u_\varepsilon - u) \end{aligned}$$

Εχουμε $\|\eta_\varepsilon * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \Rightarrow$ ισχύς ομοσ. ο.κ.

$$\eta_\varepsilon * u \rightarrow u \quad L^p \quad (\text{mollifier})$$

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{από α').}$$

γ) Για παραγωγούς : $D^\alpha v_\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha v_\varepsilon$.

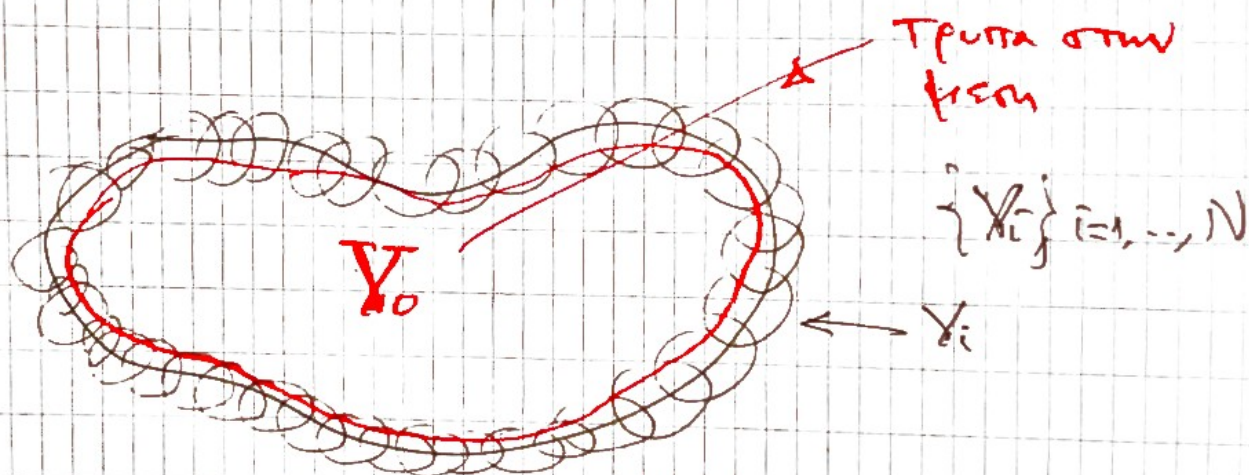
4. Επιλέγουμε $\delta > 0$ και αξιολογούμε ότι το ∂U σφίγγεται

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$$

$$V_i = U \cap B(x_i^0, \frac{r_i}{2}), \quad \delta_i^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V}_i), \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta)$$

$$\|D^{\alpha} \delta_i^\varepsilon - D^{\alpha} u\|_{L^p(V_i)} \leq \delta, \quad i=1, \dots, N$$

5. Τέλος της διατύπωσης των δεδομένων:



$$U \subset \bigcup_{i=0}^N V_i, \quad \{V_0, V_1, \dots, V_N\}$$

$$v = \sum_{i=0}^N \beta_i \delta_i^\varepsilon, \quad \sum \beta_i = 1$$

$$\text{Από } \forall 1 \quad \exists \delta_0 \in C^\infty(\bar{V}_0)$$

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(\bar{V}_0)} \leq \delta$$

Exemple 2.10.1

$$u = \left(\sum_{i=0}^N \beta_i \right) u = \sum_{i=0}^N \beta_i u, \quad \sigma = \sum_{i=0}^N \beta_i \sigma_i^\varepsilon$$

$$\|D_{\sigma}^{\alpha} - D_u^{\alpha}\|_{L^p(V)} \leq \sum_{i=0}^N \|D^{\alpha}(\beta_i \sigma_i^\varepsilon) - D_u^{\alpha}\|_{L^p(V_i)}$$

$$\leq C(N+1) \delta.$$

□