ΔΙΑΛΕΞΗ 16

A. Εναλλακτική Αρχή Fredholm

$K : X \to Y$, X, Y χώροι Banach

① K συμπαγής: $\{u_i\}$ φραγμένη στο $X \Rightarrow \{Ku_i\}$ (σχετικά) συμπαγής στο Y.

Παρατήρηση

Έστω $X = Y =$ Χώρος Hilbert H , $(\cdot,\cdot)$ εσ. γινόμενο

② $h_\nu \xrightarrow{w} h \Leftrightarrow (h_\nu, y) \to (h, y) \quad \forall y \in H$

$\therefore \; Kh_\nu \to Kh$

Απ ②

$Kh_{\nu'} \to \xi$ $\quad$ ($\{h_{\nu'}\}$ υπακολουθία $\{h_\nu\}$)

$(Kh_{\nu'}, y) = (h_{\nu'}, \overset{\text{συζυγής}}{K^* y}) \overset{②}{\to} (h, K^* y) = (Kh, y)$ ③

$(Kh_{\nu'}, y) \to (\xi, y)$

③ $\Rightarrow \quad Kh = \xi$ (ανεξάρτητο της υπακολουθίας).

$\square$

<u>Λημμα</u>

Αν $K: H \to H$, $K \in \mathcal{L}(H,H)$, και συμπαγης, τοτε K^* συμπαγης

<u>Αποδειξη</u>

Εστω $\{h_\kappa\}$ φραγμενη στο H. Απο ασθενη συμπαγεια της $\{h \in H \mid \|h\| \leq 1\}$

$\Rightarrow \exists$ ασθενως συγκλινουσα υπακολουθια $h_{\kappa_j} \to h$

Θα δειξουμε οτι

(3) $$K^* h_{\kappa_j} \to K^* h$$

(Σημ (4) Banach-Steinhaus: αν $\{u_\kappa\}$ ασθενως συγκλινουσα
$\Rightarrow \{u_\kappa\}$ φραγμενη)

Πραγματι

$$\|K^* h_{\kappa_j} - K^* h\|^2 = \left(K^* h_{\kappa_j} - K^* h,\ K^*(h_{\kappa_j} - h)\right)$$

$$= \left(K(K^* h_{\kappa_j} - K^* h),\ (h_{\kappa_j} - h)\right)$$

$\overset{(2)}{=}$ $K(K^* h_{\kappa_j} - K^* h) \to 0$

(4) $\|h_{\kappa_j} - h\| < C$

$\Rightarrow$ (Cauchy-Schwartz)

$\therefore$

$$K^* h_{\kappa_j} \to K^* h$$

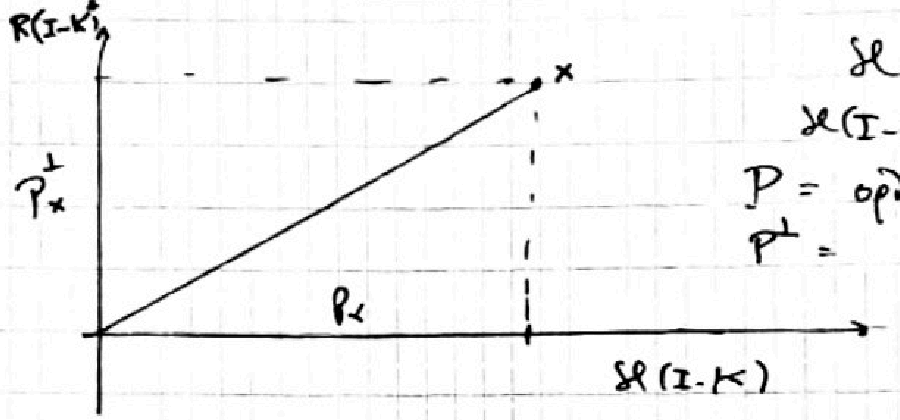
□

Θεώρημα Fredholm

H χώρος Hilbert, $K: H \to H$ συμπαγής

Επίλυση της εξίσωσης

(5) $$\boxed{(I-K)x = y}$$ (δοθέντος $y \in H$)



$\mathcal{N}$ = null space

$\mathcal{N}(I-K) = \{x \in H \mid (I-K)x = 0\}$

P = ορθογώνια προβολή

$P^{\perp}$ = — " — στο συμπλήρωμα

Υπενθυμίζουμε: $\forall$ M, κλειστό υπόχωρο, $H = M \oplus M^{\perp}$,
δηλαδή για $x \in H$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$, μοναδικά
$= Px + P^{\perp}x_2$

Επίσης για M (γραμμικό) υπόχωρο $\Rightarrow$ $M^{\perp}$ πάντα κλειστός.

Θεώρημα

Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\dim \mathcal{N}(I-K) < \infty$

(ii) $R(I-K)$ κλειστό

(iii) $R(I-K) = \mathcal{N}(I-K^*)^{\perp}$

(iv) $\mathcal{N}(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-K) = H$

(v) $\dim \mathcal{N}(I-K) = \dim \mathcal{N}(I-K^*)$

Το Θεώρημα είναι γνωστό και ως Θεώρημα Διχοτομίας του Fredholm

> Ένα από τα εξής δύο συμβαίνει:
>
> $x - Kx = y$ έχει μοναδική λύση $\forall y \in H$. K συμπαγής γραμμικός
>
> $x - Kx = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις

Απόδειξη

(i) Με Άτοπο.

Έστω $\dim \mathcal{N}(I-K) = +\infty$

Μέσω Gram-Schmidt $\exists$ ορθοκανονικό $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}(I-K)$

(6) $(u_n, u_m) = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$, $Ku_n = u_n$

(7) $\|u_n - u_m\|^2 = (u_n - u_m, u_n - u_m) = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2$ $\quad (m \neq n)$

(8) $\|Ku_n - Ku_m\|^2 = \|u_n - u_m\|^2$

(7), (8) $\to$ $\nexists$ συγκλίνουσα υπακολουθία του $\{Ku_n\}$, Άτοπο!

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

(9) $\|u - Ku\| \geq \gamma \|u\|$,
για $u \in \mathcal{N}^{\perp}(I-K)$

Εξακριβώστε

Έστω $\{v_n\} \subset R(I-K)$, και έστω $v_n \to v$

Τότε αν ισχύει η (9) $\Rightarrow$ θα δείξουμε ότι $v \in R(I-K)$

Επιχείρημα :

(10) $v_n = (I-K)u_n = (I-K)[Pu_n + P^{\perp}u_n]$

P — ορθογώνιο προβολή στο $\mathcal{N}(I-K)$ [$\dim \mathcal{N}(I-K) < \infty \Rightarrow I-K$ κλειστ.

$P^{\perp}$ — — " ——— $\mathcal{N}^{\perp}(I-K)$

(11) $\Rightarrow$ $v_n = (I-K)P^{\perp}u_n$

Παρατηρούμε ότι ο $(I-K)P^{\perp}$ είναι 1-1 και αντιστρέψιμος στο $\mathcal{N}^{\perp}(I-K)$ από (9), με

(12) $\| [(I-K)P^{\perp}]^{-1} \| \leq \frac{1}{\gamma}$

Συνεπώς από (11)

$$u_n = [(I-K)P^{\perp}]^{-1} v_n$$

και εφόσον $v_n \to v \Rightarrow u_n \to [(I-K)P^{\perp}]^{-1} v =: u$

$\Leftrightarrow (I-K)P^{\perp}u = v$,

δηλ. $v \in R(I-K)$.

Απόδειξη της 9

Με άτοπο:

$\exists \quad \{u_k\} \subset \mathcal{N}^{\perp}(I-K)$ τ.ω.

13 $\quad \|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k}\|u_k\| \iff$

12' $\quad \|\hat{u}_k - K\hat{u}_k\| < \frac{1}{k} \qquad \left(\hat{u}_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}\right)$

$\boxed{\|\hat{u}_k\| = 1} \Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\{\hat{u}_{k_n}\} \xrightarrow{w} \hat{u}$

$\Rightarrow \quad K\hat{u}_{k_n} \to K\hat{u} \qquad$ (συμπάγεια)

$\overset{13}{\Rightarrow}$

$\hat{u} - K\hat{u} = 0$,

$\Rightarrow \quad \hat{u} \in \mathcal{N}(I-K) \qquad$ 14

Παρατηρούμε από 12' ότι εφόσον $K\hat{u}_{k_n} \to Ku$ (ισχυρά)

$\therefore \quad \hat{u}_{k_n} \to K\hat{u} = \hat{u}$ ισχυρά

Άρα $\boxed{\|\hat{u}\| = 1}$ 14

Τέλος $\{\hat{u}_{k_n}\} \subset \mathcal{N}^{\perp}(I-K) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{N}^{\perp}(I-K) \qquad$ 15

Όμως $\mathcal{N}(I-K) \cap \mathcal{N}^{\perp}(I-K) = \{0\}$, άτοπο λόγω 14

#

(iii) Απορροια απο
$$\forall A \in \mathcal{L}(H,H) \qquad \overline{R(A)} = \ker(A^*)^{\perp}$$
και (ii)

#

(iv) Με εις ατοπον απαγωγη:

Εστω $\ker(I-K) = \{0\}$, και εστω

(16) $$H_1 := (I-K)(H) \subsetneq H$$

Απο (9) εχουμε οτι H_1 κλειστο, και $I-K$ 1-1.

$$(I-K)(H_1) = (I-K)^2(H) \subsetneq (I-K)H$$
$$\| \quad H_2$$

(διοτι αν $(I-K)^2(H) = (I-K)(H)$
$$\Leftrightarrow (I-K)^{-1}(I-K)^2(H) = H$$
$$\Leftrightarrow (I-K)(H) = H \quad)$$

Παρομοιως

$$H_k := (I-K)^k(H), \qquad H_{k+1} \subsetneq H_k$$

Εχουμε εντος των H_k

(17) $$H_{k+1} \oplus H_{k+1}^{\perp(H_k)} = H_k$$ (ορθογωνιο συμπληρωμα εντος H_k)

Επιλέγουμε $u_k \in H_k^{\perp(H_k)}$, $\|u_k\| = 1$

(18) $K u_k - K u_\ell = -(u_k - K u_k) + (u_\ell - K u_\ell) + (u_k - u_\ell)$

$k > \ell$

$H_{k+1} \subsetneq H_k \subsetneq H_{\ell+1} \subsetneq H_\ell$.

$(I-K) u_k \in H_{k+1} \subset H_{\ell+1}$

$(I-K) u_\ell \in H_{\ell+1}$, $u_\ell \in H_{\ell+1}^{\perp}$, $\|u_\ell\| = 1$

$u_k \in H_k \subset H_{\ell+1}$

$\overset{(18)}{\Longrightarrow}$

$$\| K u_k - K u_\ell \| \geq 1$$

Συγκρούεται με συμπάγεια $\{K u_k\}$!

Δείξαμε

$$\ker(I-K) = \{0\} \Rightarrow R(I-K) = H.$$

Αντίστροφα

Έστω $R(I-K) = H$

(iii) $\Rightarrow$

$$\mathcal{N}(I-K^*)^{\perp} = H$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{N}(I-K^*) = \{0\}$$

Από $(iv)_1$ $\Rightarrow$

$$(I-K^*)(H) = H$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\mathcal{R}(I-K^*)\right)^{\perp} = \{0\}.$$

Από (iii) για K^*

$$\mathcal{N}(I-K) = \{0\}.$$

#

Το (v) το αφήνουμε στον αναγνώστη (βλ. Evans Ap D).