

Διάζηση 91. Σχέση της GNS Ανωτατότητας

$$(1) \quad \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

με την ισοπεριμετρική ανισότητα

Για $p=1$ έχουμε

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

$u \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$

Ο χώρος BV(Ω)

Εστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό, και εστω $f \in L^1(\Omega)$

Ορισμός

$$(2) \quad \int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{g} \, dx \mid \vec{g} = (g_1, \dots, g_n) \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \right. \\ \left. \text{και } |\vec{g}(x)| \leq 1, x \in \Omega \right\}$$

$$\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$$

Παρατήρηση : Εστω $f \in C^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} \left(f \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f g_i) - \nabla f \cdot \vec{g} \, dx$$

$$= - \int_{\Omega} \nabla f \cdot g \, dx \quad \left(\text{διωτ.} \int_{\Omega} \operatorname{div} (f \vec{g}) = \int_{\partial \Omega} f \vec{g} \cdot \vec{\nu} = 0 \right. \\ \left. g \in C_0^1(\Omega) \right)$$

Κατα συνέπεια

$$(3) \quad \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx = \int_{\Omega} |Df| \quad \text{για } f \in C^1(\Omega)$$

Τελικότερα με μια επιχείρησα πικιοτυρε έχω ότι

για $f \in W^{1,1}(\Omega)$ ισχύει η (3) όταν ∇f η Sobolev

παράγωγος.

Ορισμός

$f \in L^1(\Omega)$ λέγεται ότι έχει φραγμένη έκταση αν

$$\int_{\Omega} |Df| < \infty. \quad BV(\Omega) \text{ είναι ο χώρος των οριζεται}$$

μεσω της νόρμας

$$(4) \quad \|f\|_{BV(\Omega)} := \int_{\Omega} |Df|.$$

Έχουμε ότι

$$(5) \quad W^{1,1}(\Omega) \subseteq BV(\Omega).$$

Θα δείξουμε ότι

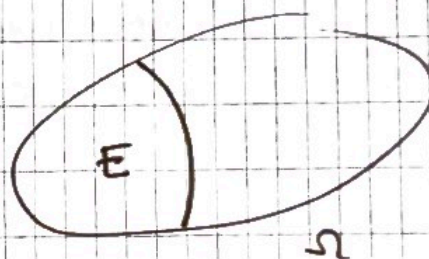
$$(6) \quad W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega)$$

μεσω παραδείγματος:

Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$, $\partial E \in C^0$, χ_E η χαρακτηριστική του E

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

Εντός έστω το E γράφητο.



$$(7) \quad \int_{\Omega} \chi_E(x) dx = \mathcal{L}^n(E \cap \Omega)$$

Για $g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$(8) \quad \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} g \, dx = \int_E \operatorname{div} g \, dx = \int_{\partial E} g \cdot \nu \, d\mathcal{H}_{n-1} \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$

($\mathcal{H}_{n-1}$ = μέτρο Hausdorff $n-1$)

Κατά συνέπεια

$$(9) \quad \int_{\Omega} |\operatorname{div} \chi_E| = \sup \left\{ \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} \vec{g} \, dx \mid \vec{g} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |\vec{g}(x)| \leq 1 \right\} \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

$$\therefore \chi_E \in BV(\Omega).$$

Άσκηση 12*

Δείτε ότι

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega), \quad \partial E \in C^2$$

(Υπόθεση: Επέκταση της $\vec{\nu}$ στο Ω , $\vec{\nu} \perp \partial E$, $|\vec{\nu}|=1$)

Άσκηση 13*

Δείτε ότι η φ_B δεν είναι Sobolev.

Θεώρημα (Ανισότητα PWS για BV συναρτήσεις)

Εστω $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, γιτ f ορίζεται

Τότε ισχύει

$$(10) \quad \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Df\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Σημ. Δεν θα αποδείξαμε την (10). Η απόδειξη είναι μέσω του τελεστή Riesz χρησιμοποιώντας ιδιότητες που ισχύουν διότι οι $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ δεν είναι πυκνές στον $BV(\mathbb{R}^n)$ (βλ. της σχέσης $f \in \overline{W^{1,1}(\mathbb{R}^n)} = BV(\mathbb{R}^n)$ - βλ. (3), 669)

$$\overline{C_0^1(\mathbb{R}^n)}^{BV} = W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$$

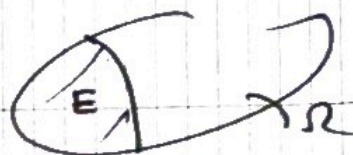
Ισχύει όμως ότι δεδομένη $f \in BV \exists \{f_k\} \subset C_0^1$
τ.ω.

$$\int |f_k| \rightarrow \int |f|$$

$$\int |Df_k| \rightarrow \int |Df|.$$

□

Πορίσματα (Ισομετριστική Αιτιότητα)



Θεωρούμε την $\varphi_{\frac{E}{\Omega}}$. Εφαρμόζοντας την (10) έχουμε

$$(iii) \quad \left(\varphi^n(E) \right) \leq C_1 H_{n-1}(\partial E \cap \Omega), \quad \partial E \in C^2.$$

Σημ: Για ομοία φράγματα περιμέτρου δω ισχύει εν γένει ότι $\int |\nabla \varphi_E| = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$. Εδώ χρειάζεται η έννοια του Ω Reduced Boundary.

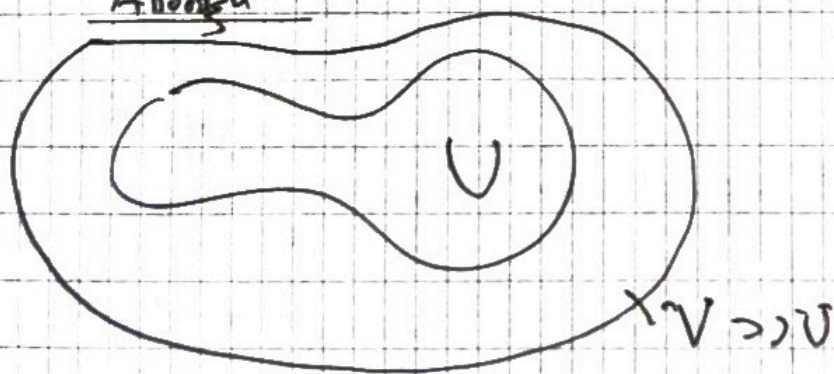
2. H (GNS) αιτιότητα σε φράγματα χυρία

A. Θεώρημα 1 ($1 \leq p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$)
 $U \subset \mathbb{R}^n$, $\partial U \in C^1$, U φραγμένο.

Ισχύει

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} W^{1,p}(U) \subset L^{p^*}(U) \\ \|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{array} \right. \quad C = C(p, n, U)$$

Απόδειξη



Εφαρμόζουμε τα τελεστή επεκτάσεως $E: W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\text{s.t. } Eu \subset V, \forall u \in W^{1,p}(U)$$

$$(i) \quad \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

$$\bar{u} := Eu = u, \quad x \in U, \quad u \in C_c^1(U)$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &\leq C_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{aligned}$$

Επίσης

$$(14) \quad \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^* = \|\tilde{u}\|_{L^p(V)}^* \Rightarrow \|\tilde{u}\|_{L^p(U)}^* = \|u\|_{L^p(U)}^*$$

(13), (14) $\Rightarrow$

$$(15) \quad \left\| \|u\|_{L^p(U)}^* \leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)} \right\} \quad \text{Q.E.D.}$$

B.

□

Θεώρημα 2 $(1 \leq p < \infty)$

Ισχύει

$$(16) \quad \|u\|_{L^q(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}, \quad u \in W_0^{1,p}(U)$$

$$C = C(p, q, n), \quad \forall q \in [1, p^*], \quad U \text{ ανοικτό}$$

Απόδειξη

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } W_0^{1,p}(U) = \overline{C_0^\infty(U)}^{W^{1,p}(U)}$$

Αρκεί λοιπόν να επαληθεύουμε την (16) για $u \in C_c^1(U)$.
Παρατηρούμε ότι η $u \in C_c^1(U)$ μπορεί να επεκταθεί τετριπτά
στο $\mathbb{R}^n$ θέτοντας μηδέν εκτός του φορέα της

$$\tilde{u} := \begin{cases} u, & x \in \text{supp } u \\ 0, & x \notin \text{supp } u \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$

$$(17) \|u\|_{L^p(\Omega)}^* = \|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Τέλος να επιβεβαιώσουμε το $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}^*$

μεσω των Hölder:

$$\begin{aligned} \int_U |u|^p dx &\leq \left(\int_U |u|^{pq} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_U 1^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_U |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} |U|^{1 - \frac{p}{p^*}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= 1 \\ q \text{ τ.ω.} & \\ pq &= p^* \\ \frac{1}{r} &= 1 - \frac{1}{p^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^* |U|^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{p}{p^*}\right)} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)}^* \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \end{aligned}$$

O.E.D.

Πορισμα (Ανισότητα Poincaré)

Ω φραγμένο, ανοικτό (έχει αναγκαστικά όριο)

$$C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

($q = p^*$)

□