

ΚΑΤ' ΟΙΚΟΝ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΜΔΕ II
Μέρος Α (Χώροι Sobolev)
 (7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

Ασκηση 1 ($q > p > 1$)

Εστω

$$g(x) := U(f)(x) := \int_{\Omega} K(x,y) f(y) dy, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \int_{\Omega} f(y) dy = 1$$

Εστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

$$(1) \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^r dy \right]^{1/r} \leq C_1 \quad (\text{ανεξάρτητη του } x)$$

$$(2) \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^s dx \right]^{1/s} \leq C_2 \quad (\text{— — — του } y)$$

$$(3) \quad q \geq p, \quad q \geq s, \quad (1 - \frac{s}{q})p' \leq r \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

Τότε ισχύει ότι ο τελεστής $U: L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$
 είναι φραγμένος με νόρμα

$$(*) \quad \|U\| \leq C_1^{1-\frac{s}{q}} C_2^{\frac{s}{q}}$$

Δείξτε την (*) δικαιολογώντας λεπτομερώς τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα I

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_{\Omega} |K(x,y)| |f(y)| dy \\ &\leq \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^s |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\Omega} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^{p(1-\frac{s}{q})} dy \right]^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Βήμα II

$$\leq \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^s |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\Omega} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} C_1^{1-\frac{s}{q}}$$

$$= \left[\int_{\Omega} |K(x,y)|^{\frac{r}{1-\sigma}} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{p}{r}} C_1^{1-\frac{\sigma}{r}}$$

Βήμα III

$$\|g\|_{L^q(\Omega)} \leq C_2 C_1^{\frac{r}{q}} C_1^{1-\frac{\sigma}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

//

Άσκηση 2

Δεξτε ότι ο τελεστής U εξακολουθεί να είναι φραγμένος
($U: L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$)

(i) η υπόθεση $q \geq \sigma$ ΔΕΝ ισχύει

(ii) η υπόθεση $q \geq p$ ΔΕΝ ισχύει αλλα αντικαθιστάει
από την

$$p' \left(1 - \frac{\sigma}{p}\right) \leq r$$

(iii) Δεξτε ότι για $p=1$ ο τελεστής

$$U: L^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

εξακολουθεί να είναι φραγμένος κάτω από τις εξής
πρόποσιções (απενδύσεις):

Άρκει η υπόθεση

$$(1)' \quad \left(\int_{\Omega} |K(x,y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2$$

μεγ. $p \in \text{των}$ (2) για $\sigma = q$.

Το συμπέρασμα είναι $\|U\| \leq C_2$, και η απόδειξη

αποφασίζεται (Απλ. Hölder!).

(iv) $q = \infty$. Σε αυτή την περίπτωση

$$V: L^p(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

αυτή (1) ικανοποιείται για $r \geq p'$.

Το συμπέρασμα είναι

$$\|V\| \leq C_1.$$

Άσκηση 3

Δείξτε την ανισότητα

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$1 \leq p \leq n, \quad (n-p)q \leq np$$

$$1 \leq p \leq n, \quad (n-p)q \leq np$$

Δικαιολογώντας τα εξής σημεία:

Βήμα I

Για $u \in C_0^1(\Omega)$ ισχύει η

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\int_{B_1} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy} \int_{B_1} |\nabla u(y)| dy \quad (B_1 = \{ |x| < 1 \})$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Υπόδειξη: Για $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$

$$u(0) = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial r}(r\bar{\omega}) dr, \quad \forall \bar{\omega} \in S^{n-1} \quad (r\bar{\omega} = 1)$$

$$\Rightarrow \int_{|\bar{\omega}|=1} u(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = - \int_{|\bar{\omega}|=1} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial u(r\bar{\omega})}{\partial r} dr \right) d\bar{\omega}$$

$$= - \frac{1}{f^n(B_1)} \int_{\mathbb{R}^n} r^{1-n} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy$$

και παρομοια

$$u(x) = - \frac{1}{f^n(B_1)} \int_{\mathbb{R}^n} r^{1-n} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy$$

Βηθη II

Εφαρμόστε στην ασκ. την Ασκηση 1

$$(g(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy, \quad |u(x)| \leq g(x))$$

~~///~~

Άσκηση 4

Υποδείξτε τα δύο κριτήρια συμπεριφοράς :

Arzela - Ascoli

Εστω Ω φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$. Το ένα υποσύνολο $S \subset C(\bar{\Omega})$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς την $\|u\| = \max |u(x)|$ αν και μόνο αν είναι φραγμένο και τα $\bar{\Omega}$ στοιχεία της S είναι ισομετρικά

M. Riesz - Tamarkin

Εστω Ω φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$. Το $S \subset L^p(\Omega)$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν

(i) S φραγμένο στην L^p νόρμα

(ii) $\forall f \in S, \|f(x+y) - f(x)\|_p \rightarrow 0, |y| \rightarrow 0$

αποσπασμα για $f \in S$

Δείξτε ότι $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), q \leq \frac{np}{n-p}, p < n$
 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $f \in C^1$ ανωρό

Δικαιολογώντας βήτο-βήτο τα εξής βήματα:

Βήμα 1

Δείξτε ότι $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$
 (μπορείτε να κάνετε χρήση κριτηρίων συμπεριφοράς)

Βήμα 2

Έστω $q \in (p, \frac{np}{n-p})$

Από το Theorem 2, p 279 Evans, συμπεραίνει ότι

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), p^* := \frac{np}{n-p}$$

Από λογισμικά κυρτότητα της $L^3(\Omega)$ νόρμας

$$(\psi(s) := \ln \|f\|_{L^s(\Omega)}^s \text{ κυρτή})$$

$$q = \alpha p + (1-\alpha) \frac{np}{n-p} = \alpha p + (1-\alpha) p^*$$

$$(\text{***}) \|f_n - f_0\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \|f_n - f_0\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha p} \|f_n - f_0\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{(1-\alpha)p^*}$$

Έστω $\{f_n\}$ αδρανής ακολουθία στην f_0 στην $W^{1,p}(\Omega)$:

$$f_n \xrightarrow{W^{1,p}} f_0$$

Επεται ότι $\{f_n\}$ φραγμένη στη $L^p(\Omega)$
 Βήμα 1 $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ ισχύει στη $L^p(\Omega)$
 Μέσω της (**) κατασκευάζει ότι
 $f_n \rightarrow f$ ισχύει στον $L^q(\Omega)$.

//

Άσκηση 5

(i) Έστω ότι ισχύει η

$$(1) \|u\|_{L^r} \leq C_\alpha \|u\|_{L^s}^{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p}^{1-\alpha}$$

C_α σταθερά, $\forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, C_α ανεξάρτητη των φορμα-
 της u (και της n εν γένει).

Δείξτε ότι αναγκαστικά

$$(2) \frac{1}{r} = \alpha \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{s}.$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists C(\varepsilon, p)$ τ.ω.

$$(3) \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^p(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}$$

$$u \in W^{1,p}(0,1), p > 1$$

Δείξτε την (3) και δείξτε ότι δεν ισχύει για
 $p=1$ ($u_n(x) = x^n$).

(iii) $1 \leq q < \infty$. $\forall \varepsilon > 0 \exists C = C(\varepsilon, q)$ τ.ω.

$$(4) \|u\|_{L^q(0,1)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^1(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}, u \in W^{1,1}(0,1).$$

Άσκηση 6

$$I = (0, 1), \quad u: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R}, x \notin I \end{cases}$$

(i) Αν $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
 Αντίστροφα, $u \in L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$, και $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow u \in W_0^{1,p}(I)$.

(ii) Αν $u \in L^p(I)$, $1 < p < \infty$, δείξτε ότι

$$u \in W_0^{1,p}(I) \Leftrightarrow \exists C \text{ τ.ω.}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \bar{u} \phi' dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})},$$

$$\forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

Άσκηση 7

(i) $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Αν $u(0) = 0 \Rightarrow \frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$ και

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

(ii) Αντίστροφα, αν $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, και

$$\frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$$

$$\Rightarrow u(0) = 0$$

$\equiv$