

Ασκήσεις Μεταθετικής Άλγεβρας-1

1. Έστω x ένα μηδενοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου A . Να δείξετε ότι το $1 + x$ είναι αντιστρέψιμο στο A . Να συμπεράνετε ότι το άθροισμα ενός μηδενοδύναμου στοιχείου και ενός αντιστρέψιμου είναι αντιστρέψιμο.

2. Έστω A δακτύλιος και $A[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων σε μια μεταβλητή x , με συντελεστές από το A . Έστω $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το f είναι αντιστρέψιμο στο $A[x] \Leftrightarrow a_0$ είναι αντιστρέψιμο στο A και $a_1, \dots, a_n$ είναι μηδενοδύναμα.

β) Το f είναι μηδενοδύναμο $\Leftrightarrow$ όλα τα $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι μηδενοδύναμα.

γ) Το f είναι μηδενοδιαίρετης $\Leftrightarrow$ υπάρχει $a \neq 0$ στο A ώστε $af = 0$.

3. Στον δακτύλιο $A[x]$, το ριζικό Jacobson είναι ίσο με το $\text{nil}(A[x])$.

4. Έστω A δακτύλιος και $A[[x]]$ ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ με συντελεστές στο A . Να δείξετε ότι:

α) Το f είναι αντιστρέψιμο στο $A[[x]] \Leftrightarrow$ το a_0 είναι αντιστρέψιμο στο A .

β) Αν το f είναι μηδενοδύναμο, τότε το a_n είναι μηδενοδύναμο για κάθε $n \geq 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

γ) Το f ανήκει στο ριζικό Jacobson του $A[[x]] \Leftrightarrow$ το a_0 ανήκει στο ριζικό Jacobson του A .

δ) Η τομή ενός μέγιστου ιδεώδους I του $A[[x]]$ με τον A είναι μέγιστο ιδεώδες του A , και το I δημιουργείται από το I^c και το x .

ε) Κάθε πρώτο ιδεώδες του A είναι τομή πρώτου ιδεώδους του $A[[x]]$ με τον A .

5. Έστω A δακτύλιος τέτοιος ώστε κάθε ιδεώδες που δεν περιέχεται στο $\text{nil}(A)$ περιέχει ένα μη μηδενικό αυτοδύναμο στοιχείο (δηλαδή, ένα στοιχείο e τέτοιο ώστε $e^2 = e \neq 0$). Να αποδείξετε ότι το $\text{nil}(A)$ και το ριζικό Jacobson του A είναι ίσα.

6. Έστω A δακτύλιος στον οποίο κάθε στοιχείο x ικανοποιεί $x^n = x$ για κάποιο $n > 1$ (ανάλογα με το x). Να δείξετε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του A είναι μέγιστο.

7. Έστω A δακτύλιος με $A \neq 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του A έχει ελάχιστα στοιχεία ως προς τη σχέση $\subseteq$.

8. Έστω I ιδεώδες με $I \neq A$, όπου A δακτύλιος. Να δείξετε ότι $I = \sqrt{I} \Leftrightarrow I$ είναι τομή πρώτων ιδεωδών.

9. Έστω A δακτύλιος και $J = \text{nil}(A) = \sqrt{0}$. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) Το A έχει ακριβώς ένα πρώτο ιδεώδες.

β) Κάθε στοιχείο του A είναι είτε αντιστρέψιμο είτε μηδενοδύναμο.

γ) Το πηλίκο A/J είναι σώμα.

10. Ένας δακτύλιος A λέγεται Boolean αν $x^2 = x$ για κάθε $x \in A$. Σε έναν Boolean δακτύλιο A , να δείξετε ότι:

α) $2x = 0$ για κάθε $x \in A$.

β) Κάθε πρώτο ιδεώδες P είναι μέγιστο, και το A/P είναι σώμα με δύο στοιχεία.

γ) Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες του A είναι κύριο.

11. Ένας τοπικός δακτύλιος δεν περιέχει αυτοδύναμο στοιχείο διαφορετικό του 0 ή του 1.

12. Έστω A υποδακτύλιος ενός δακτυλίου B τέτοιος ώστε ο B είναι ακέραιος πάνω από τον A , και έστω $f : A \rightarrow \Omega$ ομομορφισμός του A σε αλγεβρικά κλειστό σώμα Ω . Να δείξετε ότι ο f μπορεί να επεκταθεί σε ομομορφισμό του B στο Ω .

13. Έστω A υποδακτύλιος ενός δακτυλίου B τέτοιος ώστε ο B είναι ακέραιος πάνω από τον A . Έστω J μέγιστο ιδεώδες του B , και $I = J \cap A$ το αντίστοιχο μέγιστο ιδεώδες του A . Είναι απαραίτητα ο B_J ακέραιος πάνω από τον A_I ; (Υπόδειξη: Εξετάστε τον υποδακτύλιο $A = K[x^2 - 1]$ του $B = K[x]$, όπου K σώμα, και έστω $J = (x - 1)$. Είναι το στοιχείο $1/(x + 1)$ ακέραιο;)

14. Έστω $A \subseteq B$ δακτύλιοι, με τον B ακέραιο πάνω από τον A .

α) Αν $x \in A$ είναι αντιστρέψιμο στο B , τότε είναι αντιστρέψιμο και στο A .

β) Το ριζικό Jacobson του A είναι η τομή του ριζικού Jacobson του B με τον A .

15. Έστω $B_1, \dots, B_n$ ακέραιες επί του A , A -άλγεβρες. Να δείξετε ότι το $\prod_{i=1}^n B_i$ είναι ακέραια επί του A , A -άλγεβρα.

16. Έστω A υποδακτύλιος ενός δακτυλίου B , τέτοιος ώστε το σύνολο $S = B \setminus A$ να είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό. Να δείξετε ότι ο A είναι ακέραια κλειστός στον B .

17. α) Έστω M Noetherian A -πρότυπο και $u : M \rightarrow M$ ομομορφισμός A -προτύπων. Αν ο u είναι επί, τότε είναι ισομορφισμός.

β) Αν το M είναι Artinian και ο u είναι 1-1, τότε και πάλι είναι ισομορφισμός.

18. Έστω M πρότυπο πάνω από τον A . Αν κάθε μη κενό σύνολο πεπερασμένα παραγόμενων υπόπροτύπων του M έχει μέγιστο στοιχείο, τότε το M είναι Noetherian.

19. Έστω M πρότυπο πάνω από τον A , και έστω N_1, N_2 υπόπροτυπα του M . Αν τα πηλικά M/N_1 και M/N_2 είναι Noetherian, τότε και το $M/(N_1 \cap N_2)$ είναι Noetherian. Ανάλογα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το Noetherian με το Artinian.

20. Έστω M Noetherian A -πρότυπο και έστω $I = \text{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$ ο μηδενιστής (annihilator) του M στον A . Να αποδείξετε ότι το A/I είναι Noetherian δακτύλιος.