Πρόταση: Έστω $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ ακριβής. (α 1-1, β επί και $\ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$)
M Noether (ή Artin) $\Leftrightarrow$ M' και M'' Noether (ή Artin)

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο για Noether. Η Artin είναι παρόμοια.

$\Rightarrow$: α 1-1 $\Rightarrow$ $\alpha(M') \leq M$. Εφόσον M Noether $\Rightarrow$ $\alpha(M') \cong M'$ Noether.

και $M'' \cong M/\alpha(M')$ Noether.

Μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M' είναι αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M και μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του $M'' \cong M/\alpha(M')$ είναι της μορφής $M_1/\alpha(M') \subseteq M_2/\alpha(M') \subseteq \ldots$ όπου $\alpha(M') \leq M_i \leq M$ και $M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \ldots$ σταματά.

($\Leftarrow$) Έστω M' και M'' Noether.
Έστω $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ αύξουσα στο M.
Τότε $\alpha^{-1}(M_1) \subseteq \alpha^{-1}(M_2) \subseteq \ldots$ αύξουσα στο M' (Noether), άρα σταματά.
Ομοίως $\beta(M_1) \subseteq \beta(M_2) \subseteq \ldots$ αύξουσα στο M'' (Noether), άρα σταματά.

Τότε $\exists$ n. θετ. ακέραιος με
$a^{-1}(M_n) = a^{-1}(M_{n+1}) = \dots$ και
$b(M_n) = b(M_{n+1}) = \dots$

Έστω $K = a^{-1}(M_n) \subseteq M'$ και $L = b(M_n) \subseteq M''$.

Έχουμε! Έστω $m \geq n$.

Εφόσον $K = a^{-1}(M_m)$ και
$a(K) \subseteq M_m$. (1),

Θεωρούμε τον περιορισμό $\overline{a} = a|_K : K \to M_m$
που είναι 1-1 επειδή a 1-1.

$L = b(M_m) \subseteq M''$. Θεωρούμε τον περιορισμό
$\overline{b} = b|_{M_m}$ του b στο M_m. Άρα $L = \overline{b}(M_m)$
και $\overline{b}$ επί.

$0 \to K \xrightarrow{\overline{a}} M_m \xrightarrow{\overline{b}} L \to 0$.

Εφόσον $\overline{b} = b|_{M_m}$, αν $x \in Ker\, \overline{b} \subseteq M_m$, τότε
$\overline{b}(x) = b(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\, b = Im\, a$. Άρα
$\exists$ μοναδικό $y \in M'$ με $a(y) = x \in M_m \Rightarrow$
$\Rightarrow y \in a^{-1}(M_m) = K$. Άρα $x = a(y) = \overline{a}(y)$
Άρα $Ker\, \overline{b} \subseteq Im\, \overline{a}$.

Προφανώς $\overline{b}\overline{a}(K) = ba(K) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{a}(K) = Im\, \overline{a} \subseteq Ker\, \overline{b}$. $\quad a(K) \subseteq a(M') = Ker\, b$.

Άρα $0 \to K \xrightarrow{\overline{a}} M_m \xrightarrow{\overline{b}} L \to 0$ ακριβής
και $M_m/K \cong L$. Επειδή τα K, L

Είναι σταθερά ⇒ Μη σταθερό $\forall\, m \geq n$.

Πόρισμα: Αν M_i Noether (Artin) A-πρότυπα τότε και το $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ είναι Noether (Artin)

Αποδ.:
$$0 \to M_n \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0$$

$$\alpha(x) = (0, 0, \dots, 0, x)$$

$$\beta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, α 1-1 και β επί.

Υποθέτουμε $n=2$.

$$0 \to M_2 \xrightarrow{\alpha} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\beta} M_1 \to 0$$

Άρα, αν M_1, M_2 Noether (Artin) τότε και $M_1 \oplus M_2$ Noether (Artin)

Έστω $n \geq 2$ και έχουμε αποδείξει ότι $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ είναι Noether (Artin)

Με βάση το προηγούμενο, επειδή M_n Noether (Artin) προκύπτει ότι $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ Noether (Artin)

<u>Πρόταση!</u> Έστω A Noether (Artin) και M πεπερ. παραγόμενο A-πρότυπο. Τότε M Noether (Artin)

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $M = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n$. Θεωρούμε το $\bigoplus_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{n \text{ φορές}}$ (το A ως A-πρότυπο). Άρα A Noether (Artin)

Έστω $f : \bigoplus_{i=1}^{n} A \to M$ με $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto$
$\mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ επιμορφισμός A-προτύπων. ~~γιατί~~ $\bigoplus_{i=1}^{n} A$ Noether (Artin) με βάση το προηγούμενο.

Άρα $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A / \text{Kerf}$ πηλίκο Noether (Artin), άρα Noether (Artin)

<u>Πόρισμα:</u> A δακτύλιος Noether (Artin) και I ιδεώδες του A. Άρα I A-πρότυπο. Τότε A/I Noether (Artin) A-πρότυπο $\Rightarrow$ A/I Noether (Artin) A/I-πρότυπο

<u>Απόδειξη:</u> Τα ιδεώδη του A/I είναι της μορφής J/I όπου J ιδεώδες του A και $I \subseteq J \subseteq A$.

Άρα $J_1/I \subseteq J_2/I \subseteq J_3/I \subseteq \dots \to$

$\Rightarrow J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ (Για Noether)

Αν $J_1/I \supseteq J_2/I \supseteq \dots \Rightarrow J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$ (Για Artin).

Ορισμός! Αλυσίδα υποπροτύπων. (5)

Έστω M ένα A-πρότυπο.
Μια αλυσίδα (chain) του M είναι μια πεπερασμένη ακολουθία.

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0.$$ (γνήσιος εγκλεισμός)

Το k λέγεται μήκος της αλυσίδας.

Αν $M = \{0\}$ τότε $M = 0$. και το μήκος είναι 0.

Ορισμός: Μια "συνθετική σειρά" (composition series) είναι μια αλυσίδα

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0$$ με

$0 \neq M_{i-1}/M_i$ απλό πρότυπο. (δεν υπάρχουν ενδιάμεσα πρότυπα $M_i \subsetneq N \subsetneq M_{i-1}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ M_i μέγιστο στο M_{i-1}. $\forall\, i = 1, \ldots, k$.

Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι το A-πρότυπο M έχει μια συνθετική σειρά μήκους $n \geq 1$. Τότε

1) Κάθε συνθετική σειρά του M έχει μήκος n.

2) Κάθε αλυσίδα του M επεκτείνεται με παρεμβολή ενδιάμεσων υποπροτύπων σε μια συνθετική σειρά του M.

<u>Απόδειξη</u>. Εφόσον το M έχει μια συνθετική σειρά μήκους n, θεωρούμε μια συνθετική σειρά του M ελαχίστου μήκους k. Προφανώς $k \leq n$. Θέτουμε $\ell(M)=k$.

1) Αν $N \subsetneq M$, τότε $\ell(N) < \ell(M)$.

Έστω $M=M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0$ μια συνθετική σειρά του M μήκους $k=\ell(M)$.

Θεωρούμε την ακολουθία

$$N = M\cap N = M_0\cap N \supseteq M_1\cap N \supseteq M_2\cap N \supseteq \cdots \supseteq M_k\cap N = 0.$$

<u>Ισχυρισμός</u>: $\dfrac{M_{i-1}\cap N}{M_i\cap N} \xhookrightarrow{\text{υποπρότυπο}} \dfrac{M_{i-1}}{M_i}$

<u>Απόδ. Ισχυρ.</u> Έστω $x\in M_{i-1}\cap N$.

Θέτουμε $\lambda(x+M_i\cap N) = x+M_i$.

α) λ καλά ορισμένη

Αν $x+M_i\cap N = y+M_i\cap N \Rightarrow x-y\in M_i\cap N \subseteq$
$\subseteq M_i \Rightarrow x+M_i = y+M_i$

β) λ <u>μονομορφισμός</u>.

Έστω $x\in M_{i-1}\cap N$, με

$x+M_i = 0_{M_{i-1}/M_i} = M_i$

$\Rightarrow x\in M_i$. Αλλά $x\in M_{i-1}\cap N\subseteq N$.

Άρα $x\in M_i\cap N \Rightarrow x+M_i\cap N = 0_{(M_{i-1}\cap N)/(M_i\cap N)}$

Εφόσον M_{i-1}/M_i απλό, έπεται ότι $\dfrac{M_{i-1}\cap N}{M_i\cap N} = 0$ ή $\dfrac{M_{i-1}\cap N}{M_i\cap N} \cong \dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ απλό

Αν $\frac{M_{i-1}\cap N}{M_i \cap N} \cong \frac{M_{i-1}}{M_i}$ $\forall i=1,2,\dots,k$.

Τότε παίρνουμε τη συνθετική σειρά.

$N = M\cap N = M_0\cap N \supsetneq \dots\dots M_1\cap N \supsetneq \dots \supsetneq M_k\cap N = 0$

$\Rightarrow \boxed{N = M\cap N} \Rightarrow M \subseteq N$, άτοπο.

Άρα και λοιποί όροι $\frac{M_{i-1}\cap N}{M_i\cap N} = 0 \Leftrightarrow \boxed{M_{i-1}\cap N = M_i\cap N}$.

διαγράφοντας τους

επαναλαμβανόμενους όρους παίρνουμε μια συνθετική σειρά του N με μήκος $< k = \ell(M)$

2). Κάθε αλυσίδα του M έχει μήκος $\leq \ell(M) = k$

Έστω $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_\lambda = 0$

Τότε $\ell(M_\lambda) < \ell(M_{\lambda-1}) < \dots < \ell(M_0) = \ell(M) = k$

Άρα $\ell(M) = k \geq \ell(M_1) + 1 \geq \ell(M_2) + 2 \geq \dots \geq$
$\geq \ell(M_\lambda) + \lambda = \lambda$.

3) Έστω $M = M_0' \supsetneq M_1' \supsetneq \dots \supsetneq M_\lambda' = 0$ μια συνθετική σειρά του M. Τότε αυτή είναι αλυσίδα του M και άρα έχει μήκος $\leq k = \ell(M)$.

Από την άλλη, το $k = \ell(M)$ είναι το ελάχιστο μήκος συνθετικής σειράς. Άρα $\lambda \geq k$.

Συμπεραίνουμε $\boxed{\lambda = k = \ell(M)}$

Όλες οι συνθετικές σειρές έχουν το ίδιο μήκος

Άρα το $k = \ell(M) = n$.

4) Έστω $M = M_0' \supsetneq M_1' \supsetneq \dots \supsetneq M_\lambda' = 0$
μια αλυσίδα με μήκος $\lambda \leq k$.

Πράγματι, αν $\lambda < k$, τότε από το 3) δεν μπορεί να είναι συνθετική σειρά.
Άρα μπορούμε να παρεμβάλουμε ανάμεσα στα M_i' νέα υποπρότυπα (γιατί M_{i-1}'/M_i' δεν είναι όλα απλά) ώστε να φτιάξουμε μια συνθετική σειρά μήκους k.
Αν πάλι $\lambda = k$, τότε αυτή είναι συνθετική σειρά, γιατί αλλιώς μπορούμε να παρεμβάλουμε ανάμεσα στα M_i' νέους όρους και να πάρουμε αλυσίδα μήκους $> k = \ell(M)$, άτοπο.

Πρόταση: Αν M ένα A-πρότυπο με συνθετική σειρά $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0$ τότε M Noether και Artin ταυτόχρονα.

Απόδειξη

Από το 1) προκύπτει ότι κάθε υποπρότυπο N του M έχει συνθετική σειρά διαγράφοντας τους όρους $N \cap M_i$ που επαναλαμβάνονται.
Έστω $N = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \cdots$ μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του M.
Τότε $\ell(M) = k \geq \ell(N) > \ell(N_1) > \ell(N_2) > \cdots$? Αν η ακολουθία δεν σταματά μπορούμε να βρούμε $m > k$ όρους
$k = \ell(M) \geq \ell(N) > \ell(N_1) > \cdots > \ell(N_m) > \ell(N_{m+1}) > 0$
άτοπο. Άρα $\nexists$ γνησίως φθίνουσα ακολουθία άρα M Artin.
Ανάλογα αν $N = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots$
$k \geq \ell(N) < \ell(N_1) < \ell(N_2) < \cdots \to +\infty$
Άρα και M Noether

Πρόταση: Έστω $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$

ακριβής και τα M' και M'' έχουν συνθετικές σειρές μήκους $\ell(M') = k$, $\ell(M'') = \lambda$.

Τότε το M έχει συνθετική σειρά μήκους

$$k+\lambda = \ell(M') + \ell(M'')$$

Έστω $0 = M'_k \subsetneq M'_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq M'_0 = M'$ συνθετική σειρά του M'

και $0 = M''_\lambda \subsetneq M''_{\lambda-1} \subsetneq \cdots \subsetneq M''_0 = M''$ συνθετική σειρά του M''.

Τότε επειδή α 1-1 η

$0 \subsetneq \alpha(M'_k) \subsetneq \alpha(M'_{k-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq \alpha(M'_0) = \alpha(M') \subseteq M$ είναι συνθετική σειρά του $\alpha(M') \subseteq M$.

Το $M'' \cong M/\alpha(M')$ έχει συνθετική σειρά.

$0 = M''_\lambda \subsetneq M''_{\lambda-1} \subsetneq \cdots \subseteq M''_0 = M''$.

Αλλά $M''_i \cong N_i/\alpha(M')$ όπου $\alpha(M') \subseteq N_i \subseteq M$ και $M'' \cong M/\alpha(M')$ και $N_\lambda/\alpha(M') = 0$

$\Leftrightarrow N_\lambda = \alpha(M')$, $N_0/\alpha(M') = M/\alpha(M') \Rightarrow N_0 = M$

Άρα η

$$0 = \alpha(M'_k) \subsetneq \alpha(M'_{k-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq \alpha(M'_0) = \alpha(M') = N_\lambda \subsetneq N_{\lambda-1} \subsetneq \cdots \subsetneq N_0 = M$$

Αυτή είναι συνθετική σειρά του M μήκους $k+\lambda$.

Πρόταση: V δ.χ. επί του σώματος k.
Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1) $\dim V < \infty$.

2) $\ell(V)$ ως k-πρότυπο $< +\infty$.

3) Ο V ικανοποιεί τη συνθήκη αύξουσας ακολουθίας Noether.

4) Ο V ικανοποιεί τη συνθήκη φθίνουσας ακολουθίας Artin.

Απόδειξη: 1) $\Leftrightarrow$ 2) Το μήκος μιας συνθετικής σειράς ισούται με το πλήθος (πλην του μηδενικού) των ενδιάμεσων υποχώρων. (Τα υποπρότυπα είναι οι υπόχωροι)

1) $\Rightarrow$ 3) Έστω

Έστω $V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq \cdots$ αύξουσα ακολουθία υποχώρων.

Τότε $\dim V_1 \leq \dim V_2 \leq \dim V_3 \leq \cdots \leq \dim V$

Άρα $\exists\, n$ με $\dim V_n = \dim V_{n+1} = \cdots$

Άρα V Noether

3) $\Rightarrow$ 1) Έστω $\dim V = \infty$.

Τότε υπάρχουν $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ άπειρα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V.

Άρα $\langle x_1 \rangle \lneq \langle x_1, x_2 \rangle \lneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \lneq \cdots$ άτοπο γιατί V Noether

Ομοίως αποδεικνύουμε 1) $\Leftrightarrow$ 4)

Πόρισμα: Έστω A δακτύλιος και $I_1, I_2, \dots, I_n$ μέγιστα ιδεώδη (όχι αναγκαστικά διαφορετικά) με $I_1 I_2 \cdots I_n = 0$.
Τότε A Noether $\Leftrightarrow$ A Artin.
Απόδειξη. Αν $n=1$, τότε μέγιστο ιδεώδες $I_1 = 0$.
Άρα A σώμα $\to$ A Noether και Artin.
Έστω $n \geq 2$.

Παίρνουμε: $I_0 = A \supsetneq I_1 \supseteq I_1 I_2 \supseteq I_1 I_2 I_3 \supseteq \cdots$
$\cdots \supseteq I_1 I_2 \cdots I_n = 0$.
Αν A Noether. κάθε $I_1 I_2 \cdots I_{i-1} / I_1 I_2 \cdots I_{i-1} I_i$
είναι A/I_i - διανυσματικός χώρος
Εφόσον A Noether και A/I_i - Noether $\Rightarrow$
$\to \dots \; I_1 I_2 \cdots I_{i-1} / I_1 I_2 \cdots I_{i-1} I_i$ Noether
και Artin ταυτόχρονα.
Άρα $0 \to I_1 I_2 \cdots I_{i-1} I_i \to I_1 I_2 \cdots I_{i-1} \to$
$\to I_1 \cdots I_{i-1} / I_1 I_2 \cdots I_i \to 0$ Noether και Artin

σαν A/I_i − πρότυπο, άρα και σαν A−πρότυπο.

$$0 \to 0 = I_1 \cdots I_n \to I_1 I_2 \cdots I_{n-1} \to I_1 I_2 \cdots I_{n-1} / I_1 I_2 \cdots I_n \to 0$$

και Noether Artin

Άρα

Noether Artin

Noether Artin $\Updownarrow$ A/I_n −πρότυπο

$$0 \to I_1 I_2 \cdots I_{n-1} \to I_1 I_2 \cdots I_{n-2} \to I_1 \cdots I_{n-2} / I_1 \cdots I_{n-1} \to 0$$

Noether και Artin

Άρα

Noether και Artin

Noether $\Updownarrow$ Artin A/I_{n-1}