<u>Ορισμός:</u> Έστω Q γνήσιο ιδεώδες του δακτυλίου A.
Το Q λέγεται <u>πρωταρχικό</u>, αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha\beta \in Q \Leftrightarrow (\alpha \in Q \text{ ή } \beta \in \sqrt{Q})$$

<u>Ισοδύναμος ορισμός:</u> Q πρωταρχικό $\Leftrightarrow$ ($\alpha\beta \in Q \Leftrightarrow$ κάποιο από τα α, β ανήκουν στο Q ή <u>και</u> <u>τα δύο</u> ανήκουν στο $\sqrt{Q}$)

<u>Απόδειξη Ισοδυναμίας:</u> ($\Rightarrow$) Έστω $\alpha\beta \in Q$. Αν $\alpha \in Q$ τελειώσαμε. Έστω ότι $\alpha \notin Q$. Τότε $\beta \in \sqrt{Q}$. Αλλά $\alpha\beta = \beta\alpha \in Q$. Αν $\beta \notin Q$, τότε $\alpha \in \sqrt{Q}$. Αν λοιπόν $\alpha \notin Q$ και $\beta \in Q$, αναγκαστικά $\alpha \in \sqrt{Q}$ και $\beta \in \sqrt{Q}$.

($\Leftarrow$) Έστω πάλι $\alpha\beta \in Q$. Τότε κάποιο από τα α, β ανήκει στο Q ή και τα δύο ανήκουν στο $\sqrt{Q}$. Αν $\alpha \in Q$ τελειώσαμε. Αν $\alpha \notin Q$, τότε ή $\beta \in Q \subseteq \sqrt{Q}$ ή $\beta \notin Q$. Αν $\beta \in Q \subseteq \sqrt{Q}$ τελειώσαμε. Τέλος αν $\alpha \notin Q$ και $\beta \notin Q$, τότε $\alpha \in \sqrt{Q}$ και $\beta \in \sqrt{Q}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\alpha \notin Q$ και $\beta \in \sqrt{Q}$, σύμφωνα με τον ορισμό.

<u>Ισοδυναμία:</u> Q πρωταρχικό στον $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A/Q \neq \{0\}$ και κάθε μηδενοδιαιρέτης του A/Q είναι μηδενοδύναμος.

<u>Απόδειξη:</u> ($\Rightarrow$) Έστω Q πρωταρχικό.
Επειδή $Q \subsetneq A \Rightarrow A/Q \neq 0$.

Έστω $b+Q$ μηδενοδιαιρέτης του A/Q.
Άρα υπάρχει $a+Q \neq 0_{A/Q} = Q \Leftrightarrow a \notin Q$ με

$(a+Q)(b+Q)=Q \Rightarrow ab+Q=Q \Rightarrow ab \in Q$.
Εφόσον $a \notin Q$ και Q πρωταρχικό $b \in \sqrt{Q} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^n \in Q$ για κάποιον θετικό ακέραιο n.
Άρα $(b+Q)^n = b^n + Q \underset{b^n \in Q}{=} Q = 0_{A/Q}$, άρα

$b+Q$ μηδενοδύναμος.

<u>Πρόταση</u>: Έστω Q πρωταρχικό. Τότε το $\sqrt{Q}$ είναι πρώτο και είναι το ελάχιστο πρώτο που περιέχει το Q.
<u>Απόδειξη</u>: Έστω $ab \in \sqrt{Q}$. Τότε $a^n b^n = (ab)^n \in Q$ για κάποιον θετικό ακέραιο n.
Άρα $a^n \in Q \Rightarrow a \in \sqrt{Q}$ ή $b^n \in \sqrt{Q}$. Αν $b^n \in \sqrt{Q}$ τότε $b^{nm} = (b^n)^m \in Q$ για κάποιον θετικό ακέραιο m. Άρα $b \in \sqrt{Q}$.
Συνεπώς $\sqrt{Q}$ πρώτο.
Έστω P πρώτο ιδεώδες με $Q \subseteq P$. Τότε $\sqrt{Q} \subseteq$
$\subseteq \sqrt{P} = P$ γιατί P πρώτο ($a^n \in P \Rightarrow a \in P$).

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\sqrt{Q} = M$ μέγιστο ιδεώδες του A. Τότε Q πρωταρχικό.

<u>Απόδειξη:</u> Αν $a \notin Q$ και $a \notin M$, τότε επειδή
$ab \in Q \subseteq M \Rightarrow b \in M = \sqrt{Q}$.
Έστω $a \notin Q$ και $a \in M$. Υποθέτουμε ότι
$b \notin M$. Τότε $\exists\, x, y \in A$ με $y \in M$ με

$$bx + y = 1.$$

$y \in M = \sqrt{Q} \Rightarrow y^n \in Q$ για κάποιο θετικό ακέραιο n $(*)$. Έχουμε $y = 1 - bx \Rightarrow y^n = 1 - \lambda b$, όπου
$\lambda \in A \Rightarrow \lambda b + y^n = 1 \Rightarrow \lambda a b + y^n a = a$.
Αλλά $ab \in Q$, $y^n \in Q \Rightarrow y^n a \in Q$, άρα $a \in Q$, άτοπο.
Συνεπώς και $b \in M$.

<u>Ορισμός:</u> Αν Q πρωταρχικό και $\sqrt{Q} = P$ πρώτο
το Q λέγεται P-πρωταρχικό.
Αν M μέγιστο ιδεώδες, τότε M^n είναι M-πρωταρχικό γιατί $\sqrt{M^n} = M$ μέγιστο και από το προηγούμενο M^n M-πρωταρχικό $\forall n = 1, 2, 3, \dots$
(Αν $a \in M$, τότε $a^n \in M^n$. Άρα $a \in \sqrt{M^n}$. Συνεπώς
$M \subseteq \sqrt{M^n} \subseteq \sqrt{M} = M$ γιατί M πρώτο).

<u>Πρόταση:</u> Έστω $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ P-πρωταρχικά.
Τότε το $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ είναι
P πρωταρχικό.

<u>Απόδειξη:</u> $\sqrt{Q} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} \cap \dots \cap \sqrt{Q_n}$
$= P \cap P \cap \dots \cap P = P$.
Άρα $\sqrt{Q} = P$ πρώτο.
Έστω $ab \in Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Αν $a \notin Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i \Rightarrow$

$a \notin Q_j$ για κάποιο j. Επειδή $ab \in Q_j \Rightarrow$
$\Rightarrow b \in \sqrt{Q_j} = P = \sqrt{Q}$.

(*). $y = 1 - \beta x \Rightarrow y^n = (1-\beta x)^n =$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta^k x^k \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^k x^k =$

$= 1 - \beta \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \beta^{k-1} x^k.$

Θέτουμε $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \beta^{k-1} x^k.$

Πρόταση: Έστω Q P-πρωταρχικό ιδεώδες και $x \in A$. Τότε ισχύουν τα εξής:
1) Αν $x \in Q$, τότε $(Q:x) = A$.
2) Αν $x \notin Q$, τότε $(Q:x)$ P-πρωταρχικό ιδεώδες
3) Αν $x \notin P = \sqrt{Q}$, τότε $(Q:x) = Q$.

Απόδειξη: 1) $x \in Q \Rightarrow ax \in Q \ \forall a \in A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (Q:x) = A$.
2) Έστω $x \notin Q$.
Έστω $a \in \sqrt{(Q:x)}$. Τότε $a^n \in (Q:x)$, n θετικός ακέραιος. Άρα $xa^n \in Q$ και $x \notin Q$.
Άρα $a^n \in \sqrt{Q} \Rightarrow \exists$ θετικός ακέραιος m με $a^{nm} = (a^n)^m \in Q \Rightarrow a \in \sqrt{Q}$
Προφανώς $Q \subseteq (Q:x) \Rightarrow \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q:x)} \subseteq \sqrt{Q}$.
Άρα $\sqrt{(Q:x)} = \sqrt{Q} = P$.
Τώρα, έστω $a\beta \in (Q:x)$ κ' έστω
$a \notin (Q:x) \Leftrightarrow ax \notin Q$. Επειδή $a\beta \in (Q:x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ax)\beta \in Q \underset{ax \notin Q}{\Rightarrow} \beta \in \sqrt{Q} = P$.

3) Έστω $x \notin P = \sqrt{Q}$. Αν $a \in (Q:x) \Rightarrow$
$\Rightarrow ax \in Q$, και επειδή $x \notin \sqrt{Q} \underset{Q \text{ πρωταρχ.}}{\Rightarrow} a \in Q$.
Άρα $Q \subseteq (Q:x) \subseteq Q$.

Ορισμός: Έστω I γνήσιο ιδεώδες του A. Μια *πρωταρχική ανάλυση* του I (αν υπάρχει) είναι της μορφής $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, όπου Q_i πρωταρχικά ιδεώδη.
Αν το πλήθος των Q_i είναι το ελάχιστο δυνατό, δηλαδή δεν υπάρχει Q_j με $Q_j \supseteq \bigcap_{i\neq j} Q_i$ (γιατί τότε $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = Q_j \cap \left(\bigcap_{i\neq j} Q_i\right) = \bigcap_{i\neq j} Q_i$), τότε έχουμε μια *ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση* του I.

Σχόλιο: Κάθε πρωταρχική ανάλυση του $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ μπορεί με τη διαδοχική αφαίρεση των $Q_j \supseteq \bigcap_{i\neq j} Q_i$ να αναχθεί σε ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση.

Θεώρημα: 1ο Θεώρημα μοναδικότητας ελάχιστης πρωταρχικής ανάλυσης

Έστω $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του I. Αν $P_i=\sqrt{Q_i}$ τα πρώτα ιδεώδη, τότε αυτά είναι τα πρώτα ιδεώδη που εμφανίζονται στη συλλογή
$\mathcal{A} = \{\sqrt{(I:x)} \mid x\in A\}$.

Επομένως τα πρώτα ιδεώδη μιας ελάχιστης πρωταρχικής ανάλυσης είναι ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη πρωταρχική ανάλυση.

Απόδειξη:

$$(I:x)=\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i : x\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(Q_i:x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(I:x)}=\bigcap_{i=1}^{n}\sqrt{(Q_i:x)}=\bigcap_{\substack{1\le i\le n\\ x\notin Q_i}}\sqrt{(Q_i:x)}$$ (γιατί αν $x\in Q_i$ τότε $(Q_i:x)=A$)

Έστω $\sqrt{(I:x)}$ πρώτο και $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ τα πρώτα ιδεώδη $\sqrt{(Q_{i_1}:x)}, \sqrt{(Q_{i_2}:x)}, \dots, \sqrt{(Q_{i_k}:x)}$ με $x\notin Q_{i_j}$, $j=1,\dots,k$.

Αν $P=\sqrt{(I:x)}$, τότε $P=P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap\dots\cap P_{i_k}$.

Υποθέτουμε ότι $P\neq P_{i_j}$ $\forall j=1,2,\dots,k$.

Άρα $\exists\, x_j\in P_{i_j}\setminus P$ $\forall j=1,\dots,k$.

Το $x_1x_2\cdots x_k\in P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k}\subseteq P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap\dots\cap P_{i_k}=P$.

αλλά $x_1,x_2,\dots,x_k\notin P$. — Άτοπο.

Άρα $P=\sqrt{(I:x)}=P_{i_j}$ για κάποιο j.

Αντιστρόφως: Εφόσον η ανάλυση $I=\bigcap_{i=1}^{n}Q_i$ είναι ελάχιστη, έπεται, ότι

εφόσον $Q_j\not\supseteq\bigcap_{i\neq j}Q_i$, υπάρχει $x_j\in\bigcap_{i\neq j}Q_i$ με $x_j\notin Q_j$.

Άρα $x_j\in Q_i$ για $j\neq i\Rightarrow(Q_i:x_j)=A$ για $j\neq i$.
και $(Q_j:x_j)$ P_j-πρωταρχικό.

Άρα $(I:x_j)=\bigcap_{i=1}^{n}(Q_i:x_j)=(Q_j:x_j)$ το οποίο είναι P_j-πρωταρχικό.