

Πρόταση: Έστω $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ είναι η πρωταρχική ανάλυση του I .

Έστω P πρώτο ιδεώδες του A .

Τα ενόμμενα είναι ισοδύναμα.

- 1) $P = P_j = \sqrt{Q_j}$ για κάποιο $j = 1, \dots, n$.
- 2) Υπάρχει $x \in A$ με $(I : x)$ P -πρωταρχικό.
- 3) Υπάρχει $x \in A$ με $\sqrt{(I : x)} = P$.

Απόδειξη 1) $\Rightarrow$ 2) Εφόσον $Q_j \not\subseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i$, τότε

υπάρχει $x \in \bigcap_{i \neq j} Q_i$ και $x \notin Q_j$.

Τότε $(I : x) = (\bigcap_{i=1}^n Q_i : x) = \bigcap_{i=1}^n (Q_i : x)$.

Αλλά $x \in Q_i \ \forall i \neq j$.

Επομένως $(I : x) = (Q_j : x)$. Εφόσον $x \notin Q_j$ το $(Q_j : x)$ είναι $P = \sqrt{Q_j}$ -πρωταρχικό.

2) $\Rightarrow$ 3) Έστω $x \in A$ με $(I : x)$ P -πρωταρχικό.
Άρα $\sqrt{(I : x)} = P$.

3) $\Rightarrow$ 1) Έστω $x \in A$ με $\sqrt{(I : x)} = P$.

Τότε $\sqrt{\bigcap_{i=1}^n (Q_i : x)} = \sqrt{(\bigcap_{i=1}^n Q_i : x)}$ Άρα,

$$\sqrt{(I : x)} = \sqrt{\bigcap_{1 \leq i \leq n} (Q_i : x)} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{(Q_i : x)}$$

Αν $x \in Q_i$, τότε $(Q_i : x) = A \Rightarrow \sqrt{(Q_i : x)} = A$.

Αν $x \notin Q_i$, τότε $(Q_i : x)$ P_i -πρωταρχικό.
δηλαδή $\sqrt{(Q_i : x)} = P_i$.

Άρα $P = \sqrt{(I : x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} P_i$ Αν $\exists x_i \in P_i \setminus P$.

$\forall i$ με $x \notin Q_i$, τότε $\prod_{x \notin Q_i} x_i \in \prod_{x \notin Q_i} P_i \subseteq \bigcap_{i \notin Q_i} P_i = P$

και κανένα x_i δεν ανήκει στο P . Άρα.

Άρα $\exists j$ με $x \notin Q_j$ με $P_j \cap P = \emptyset \Rightarrow P \supseteq P_j \supseteq \bigcap_{x \notin Q_i} P_i =$

Άρα $P_j = \sqrt{Q_j}$

Πόρισμα: Από την ισοδυναμία $1) \Leftrightarrow 3)$

προκύπτει ότι τα $P_i = \sqrt{Q_i}$ είναι ακριβώς
αυτά τα πρώτα ιδεώδη P της μορφής
 $P = \sqrt{(I|x)}$, $x \in A$.

Διλαδή προκύπτει το L^a θεωρήμα μοναδικότητας

Το σύνολο των πρώτων ιδεωδών $\{\sqrt{Q_1} = P_1, \sqrt{Q_2} = P_2, \dots, \sqrt{Q_n} = P_n\}$,

όπου $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ελάχιστη πρωταρχική

ανάλυση του I , συμβολίζεται με $\text{Ass}_A(I)$.

Το σύνολο $\text{Ass}_A(I) = \{P \text{ πρώτο} \mid P = \sqrt{(I|x)}, \text{ για κάποιο } x \in A\}$

Το σύνολο των πρώτων ιδεωδών $\{P \mid P \supseteq I\}$
συμβολίζεται με $\text{Var}(I)$

Επειδή $P_j = \sqrt{Q_j} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \sqrt{I} \supseteq I$, συνάγουμε ότι $P_j \in \text{Var}(I)$. Άρα $\text{Ass}(I) \subseteq \text{Var}(I)$

Πρόταση: Έστω P πρώτο. Τότε το P

είναι ελάχιστο στο $\text{Var}(I) \Leftrightarrow P$ είναι
ελάχιστο στο $\text{Ass}_A(I) = \{\sqrt{Q_i} \mid i=1, \dots, n\}$.

Άρα υπάρχουν πεπερασμένα

ελάχιστα

πρώτα ιδεώδη που περιέχουν το I .
Απόδειξη:

Έστω $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ ελάχιστη
πρωταρχική αναλυση του I και $P_i = \sqrt{Q_i}$. $\forall i$
ίσχυει η ισοδυναμία:

$$P \supseteq I \iff P \supseteq \sqrt{I}$$

Πράγματι, αν $P \supseteq I \Rightarrow \sqrt{P} \supseteq \sqrt{I}$. Επειδή
 P πρώτο, αν $x \in \sqrt{P} \Rightarrow x^n \in P$ τότε $x \in P$.

Άρα $P = \sqrt{P} \supseteq \sqrt{I}$.

Αντιστρόφως, αν $P \supseteq \sqrt{I}$, τότε $P \supseteq I$
γιατί $\sqrt{I} \supseteq I$ για κάθε ιδεώδες I .

$$\text{Επομένως } P \supseteq I \iff P \supseteq \sqrt{I} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^n Q_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \\ = \bigcap_{i=1}^n P_i \quad (\text{Με το γνωστό εμψύχηση } x_i \in P_i \setminus P \dots)$$

συμπεραίνουμε ότι $P \supseteq P_j$ για κάποιο $j \in \{1, \dots, n\}$
Αν το P είναι ελάχιστο στο $\text{Var}(I) = \{ \\ = \{P \text{ πρώτο} \mid P \supseteq I\}$ και $\text{Ass}(I) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subseteq \\ \subseteq \text{Var}(I)$, έπεται ότι το P είναι ελάχιστο
στο $\text{Ass}(I)$, άρα $P = P_j$ ελάχιστο στο $\text{Ass}(I)$
Επειδή το $\text{Ass}(I)$ είναι πεπερασμένο, τα
ελάχιστα ιδεώδη του $\text{Var}(I)$, δηλαδή αυτά
που περιέχουν το I , είναι πεπερασμένα.

Πόρισμα: Αν P_L πρώτο με $P_L \supseteq I$, τότε
υπάρχει $P_2 \in \text{Ass}(I)$ με $P_L \supseteq P_2$.

Πόρισμα: (Αντίστροφο της πρότασης) Αν P ελάχιστο

Έστω $\text{Ass}(I) \subseteq \text{Var}(I)$ και $P' \supseteq I$ ($P' \in \text{Var}(I)$)
 με P' ελάχιστο στο $\text{Var}(I)$ και $P \supseteq P'$, τότε
 υπάρχει $P'' \in \text{Ass}(I)$ με $P' \supseteq P''$.
 Άρα $P \supseteq P' \supseteq P''$ και P ελάχιστο στο $\text{Ass}(I)$,
 άρα $P = P' = P''$.

2. Θεώρημα μοναδικότητας ελάχιστων πρωταρχικών ανάλυσης.

Έστω $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \dots \cap Q'_m$
 δύο ελάχιστες πρωταρχικές αναλύσεις με
 $P_i = \sqrt{Q_i} = \sqrt{Q'_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Έστω $P_1, P_2, \dots, P_m$, $m \leq n$ τα ελάχιστα
 πρώτα ιδεώδη του $\text{Ass}(I)$.

Τότε $Q_1 = Q'_1, Q_2 = Q'_2, \dots, Q_m = Q'_m$.
 Δηλαδή τα πρωταρχικά που έχουν ριζικά
 τα ελάχιστα πρώτα ιδεώδη του I είναι
 ανεξάρτητα της ελάχιστης πρωταρχικής
 ανάλυσης.

Απόδειξη: Έστω P_j ελάχιστο πρώτο ιδεώδες
 του I . Τότε $\bigcap_{i \neq j} P_i \setminus P_j \neq \emptyset$.

$(\text{Αν } \bigcap_{i \neq j} P_i \setminus P_j = \emptyset \Rightarrow P_j \supseteq \bigcap_{i \neq j} P_i \text{ και με το}$

γνωστό "κόλπο" αν $P_j \not\supseteq P_i \quad \forall i \neq j$ θα
 υπήρχε $x_i \in P_i \setminus P_j$. Άρα $\prod_{i \neq j} x_i \in \prod_{i \neq j} P_i \subseteq \bigcap_{i \neq j} P_i \subseteq P_j$

και κανένα από τα x_i δεν ανήκει στο P_j .
 Έστω $x \in \bigcap_{i \neq j} P_i \setminus P_j = \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i} \setminus \sqrt{Q_j}$

Αρα για κάθε $i \neq j$ $\exists m_i$ με $x^{m_i} \in Q_i$.
 Αν $m = \max \{m_i \mid i \neq j\}$, τότε $x^m \in Q_i \forall i \neq j$.
 Επειδή $x \notin \sqrt{Q_j}$ έχουμε $x^m \notin Q_j$.

$$\begin{aligned} \text{Αρα } (I : x^m) &= \left(\bigcap_{i=1}^n Q_i : x^m \right) = \bigcap_{i=1}^n (Q_i : x^m) = \\ &= \bigcap_{i \neq j} (Q_i : x^m) \cap (Q_j : x^m) = (Q_j : x^m) \end{aligned}$$

$\nwarrow$
 $x^m \in Q_i$

Συνεπώς $(I : x^m) = Q_j$ γιατί $(Q_j : x^m) = Q_j$.
 Για το τελευταίο, προφανώς $Q_j \subseteq (Q_j : x^m)$ και
 αν $a \in (Q_j : x^m) \Rightarrow ax^m \in Q_j$. Αλλά $x^m \notin \sqrt{Q_j}$
 γιατί $x \notin \sqrt{Q_j}$. Αρα $a \in Q_j$.

$$\text{Παίρνοντας το } x \in \bigcap_{i \neq j} P_i \setminus P_j = \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i} \setminus \sqrt{Q_j}$$

και παίρνοντας τα ίδια βγαίνουμε ότι.

$(I : x^{m'}) = Q_{j'}$ για αρκεύτως μεγάλο m' .
 Αν $t = \max \{m, m'\}$ τότε $(I : x^t) = Q_j = Q_{j'}$.

Πρωταρχική ανάλυση σε δακτυλίους Noether.

Ορισμός Ένα ιδεώδες I του A λέγεται μή αναλίσσιμο
 εάν είναι γνήσιο ($I \subsetneq A$) και δεν γράφεται ως τομή
 δύο μεγαλύτερων ιδεωδών.

Αντιθέτως αν $I = I_1 \cap I_2$ με

$$I \subsetneq I_1, I \subsetneq I_2$$

$$I \subsetneq I_1 \cap I_2 \subsetneq A, \quad I \subsetneq I_1 \cap I_2 \subsetneq A$$

τότε $I_1 = A$ ή $I_2 = A$, οπότε $I = A \cap A = A$, άτολο
 γιατί $I \subsetneq A$.

Πρόταση: Έστω A Noether. Τότε κάθε γνήσιο ιδεώδες γράφεται ως τομή πεπερασμένου αριθμού μη αναλυσίμων ιδεωδών.

Απόδειξη:

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει: Έστω Σ η συλλογή των γνήσιων ιδεωδών που δεν γράφονται ως τομή πεπερασμένου αριθμού μη αναλυσίμων ιδεωδών.

Εφόσον ο A είναι Noether και έχουμε υποδείξει ότι $\Sigma \neq \emptyset$, η Σ περιέχει μέγιστο στοιχείο I .

Το I δεν είναι μη αναλυσίμο. Αν ήταν μη αναλυσίμο τότε $I = I \cap I$ τομή δύο μη αναλυσίμων, άρα $I \notin \Sigma$.

Επειδή I δεν είναι μη αναλυσίμο, τότε

$$I = I_1 \cap I_2$$

με $I_1 \supsetneq I$ και $I_2 \supsetneq I$. (Αν $I_1 = A$, τότε $I = A \cap I_2 = I_2$, άρα ομοίως $I_2 \neq A$)

Άρα I_1, I_2 γνήσια ιδεώδη μεγαλύτερα

του I που είναι μέγιστο στο Σ το σύνολο των ιδεωδών που δεν γράφονται ως τομή μη-αναλυσίμων ιδεωδών). Άρα $I_1, I_2 \notin \Sigma$, άρα και τα δύο γράφονται ως τομή πεπερασμένου αριθμού μη-αναλυσίμων ιδεωδών άρα και το $I = I_1 \cap I_2$, άρα

Πρόταση: Έστω A Noether. Τότε κάθε μη αναλυσίμο ιδεώδες είναι πρωταρχικό.

Απόδειξη: Έστω I μη αναλυσίμο και αβελ. Υποθέτουμε ότι $a \notin I$.

Τότε έχουμε την ακολουθία

$$(I:b) \subseteq (I:b^2) \subseteq (I:b^3) \subseteq \dots$$

Επειδή A Noether $\exists$ n με $(I:b^n) = (I:b^{n+1}) = \dots$

Θα δείξουμε ότι

$$I = (I + Ab^n) \cap (I + Aa)$$

Προφανώς $I \subseteq I + Ab^n$ και $I \subseteq I + Aa$.

$$\text{Άρα } I \subseteq (I + Ab^n) \cap (I + Aa)$$

$$\text{Έστω } x \in (I + Ab^n) \cap (I + Aa).$$

$$\text{Τότε } x = y + \lambda b^n = z + \mu a, \quad y, z \in I, \lambda, \mu \in A.$$

$$\text{Άρα } xb = yb + \lambda b^{n+1} = zb + \mu ab.$$

$$\text{Αλλά } z \in I \Rightarrow zb \in I \text{ και } a \in I \Rightarrow \mu ab \in I.$$

$$\text{Άρα } xb = yb + \lambda b^{n+1} = zb + \mu ab \in I \text{ και επειδή}$$

$$y \in I \Rightarrow yb \in I, \text{ Άρα } xb = yb + \lambda b^{n+1} \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda b^{n+1} \in I \Rightarrow \lambda \in (I:b^{n+1}) = (I:b^n) \quad yb \in I$$

$$\text{Συνεπώς } x = \underset{e_1}{y} + \lambda \underset{e_2}{b^n} \in I.$$

$$\text{Άρα } I = (I + Ab^n) \cap (I + Aa) \text{ και επειδή}$$

$$a \notin I, I + Aa \not\subseteq I. \text{ Αναγκαστικά } I = I + Aa. \quad \downarrow$$

$$I = I + Ab^n.$$

$$\text{Αν } I = I + Aa, \text{ τότε } Aa \subseteq I \Rightarrow a = 1 \cdot a \in I, \text{ άτολο.}$$

$$\text{Άρα } I = I + Ab^n \Rightarrow Ab^n \subseteq I \Rightarrow b^n = 1 \cdot b^n \in I.$$

Συνεπώς I πρωταρχικό

Από τα παραπάνω, κάθε γνήσιο ιδεώδες ενός Noether δακτυλίου γράφεται ως τομή πεπερασμένου πλήθους μη αναλυσίμων ιδεωδών, τα οποία είναι πρωταρχικά. Άρα κάθε γνήσιο ιδεώδες του A έχει πρωταρχική ή ανάλυση, άρα και ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση.