Το λήμμα του Nakayama (Βασικό)!

Ας θυμηθούμε λίγα στοιχεία από τα πρότυπα

Ένα R-πρότυπο είναι μια προσθετική ομάδα M με έναν (εξωτερικό) πολλαπλασιασμό $\cdot (R \times M \to M)$ με τις ιδιότητες.

$r(sx) = (rs)x = (sr)x = s(rx) \quad \forall r, s \in R$ και $x \in M$.

$(r+s)x = rx + sx \quad \forall r, s \in R$ και $x \in M$.

$r(x+y) = rx + ry \quad \forall r \in R$ και $x, y \in M$.

$1_R x = x \quad \forall x \in M$.

~~Παρατήρηση~~ Ένα μη κενό υποσύνολο N του M λέγεται υποπρότυπο του M αν πληροί τις παραπάνω σχέσεις ως προς τον (εξωτερικό) πολλαπλασιασμό του M. (Εννοείται ότι $RN \subseteq N$)

Ο δακτύλιος R είναι ένα R-πρότυπο και τα υποπρότυπά του είναι ακριβώς τα ιδεώδη του.

Αν N υποπρότυπο του M γράφουμε $N \leq M$.

Ένας R-ομομορφισμός $f : M_1 \to M_2$ R-προτύπων είναι μια απεικόνιση με τις ιδιότητες

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in M_1$$
$$f(rx) = r f(x) \quad \forall r \in R, x \in M_1$$

Η εικόνα $f(M_1) \subseteq M_2$ είναι υποπρότυπο του M_2 και γράφεται $\operatorname{Im} f$.

Ο πυρήνας $\ker f = \{x \in M_1 \mid f(x) = 0\}$ είναι υποπρότυπο του M_1.

f μονομορφισμός $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

f επιμορφισμός $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = M_2$.

Αν $N \leq M$ ορίζεται κατά τα γνωστά το πρότυπο πηλίκο $M/N = \{x+N \mid x \in M\}$.

Ισχύουν τα γνωστά θεωρήματα ισομορφισμών:

1) Αν $f: M \longrightarrow N$ R-ομομορφισμός τότε

$$M/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$$ ως R πρότυπα.

2) Το άθροισμα N_1+N_2 δύο υποπροτύπων του M είναι το $N_1+N_2 = \{x+y \mid x \in N_1, y \in N_2\}$ και είναι υποπρότυπο του M.

Ισχύει $$N_1+N_2/N_1 \cong N_2/N_1 \cap N_2.$$

(Η τομή $N_1 \cap N_2$ είναι επίσης υποπρότυπο)

3) Αν $K \leq N \leq M$ τότε ισχύει

$$M/N \cong \frac{M/K}{N/K}$$

4) Υπάρχει η 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των υποπροτύπων του M/N και των ~~πρ~~ υποπροτύπων του M που περιέχουν το N.

Δηλαδή ένα υποπρότυπο $\bar{L}$ του M/N είναι της μορφής L/N, όπου $N \leq L \leq M$.

Τα παραπάνω είναι εύκολο να αποδειχθούν.

Γεννήτορες

Έστω $\{x_i\}_{i \in I}$ στοιχεία του M. Τα x_i αποτελούν σύστημα γεννητόρων του M, αν καθε στοιχείο του M γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των x_i.

Δηλαδή αν $x \in M$, τότε $\exists\, i_1, i_2, -, i_k \in I$ με $x = \sum_{t=1}^{k} r_t x_{i_t}$, όπου $r_t \in R$ $\forall\, t=1, -, k$

Αν το σύνολο $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, το M λέγεται <u>πεπερασμένα παραγόμενο</u>.

Τα στοιχεία του M είναι R-γραμμικοί συνδυασμοί των $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Δηλαδή, αν $x \in M$ τότε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

όπου $\lambda_i \in R \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Γράφουμε $M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$.

(Γεννήτορες πάντα υπάρχουν. Μπορεί να πάρει κανείς ως γεννήτορες όλα τα στοιχεία του M)

Έστω I ιδεώδες του R και M ένα R-πρότυπο. Με IM συμβολίζουμε το υποπρότυπο που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής rx, όπου $r \in I$ και $x \in M$.

Τα στοιχεία του IM είναι γραμμικοί συνδυασμοί της μορφής

$$\sum_{i=1}^{k} r_i x_i, \text{ όπου } k > 0 \text{ και } r_i \in I$$

και $x_i \in M \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Πράγματι, $R(IM) = (RI)M = IM. \Rightarrow IM \leq M$.

<u>Λήμμα του Nakayama:</u>

Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και I ιδεώδες του R με $I \subseteq Jac(R)$ (Το ριζικό Jacobson του R)

Αν $IM = M$, τότε $M = \{0_M\}$, το μηδενικό ιδεώδες.

Απόδειξη: Έστω $M \neq \{0_M\}$. Επειδή το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, θα έχει έναν ελάχιστο αριθμό μη μηδενικών γεννητόρων $x_1, x_2, \dots, x_k$, $k > 0$.

Επειδή $IM = M$, θα έχουμε

$$x_1 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_k x_k, \text{ όπου } r_1, r_2, \dots, r_k \in I.$$

Άρα $(1 - r_1)x_1 = r_2 x_2 + \dots + r_k x_k$.

Αλλά $r_1 \in I \subseteq Jac(R) = \{r \in R \mid 1 - rt$ αντιστρέψιμο για κάθε $t \in R\}$.

Επομένως το $1_R - r_1 = 1_R - r_1 \cdot 1_R$ είναι αντιστρέψιμο.

Συνεπώς $x_1 = (1 - r_1)^{-1} r_2 x_2 + \dots + (1 - r_1)^{-1} r_k x_k \in Rx_2 + Rx_3 + \dots + Rx_k$.

Επομένως τα $x_2, x_3, \dots, x_k$ παράγουν το M, άτοπο, γιατί είναι $k-1$ το πλήθος και το k είναι το ελάχιστο πλήθος γεννητόρων (μη μηδενικών).

Άρα $M = \{0\}$.

Πόρισμα: Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και $N \leq M$ (N υποπρότυπο του M). Έστω I ιδεώδες του R με $I \subseteq Jac(R)$.

Τότε, αν $M = IM + N \Rightarrow M = N$.

Απόδειξη: $I\left(M/N\right) = \dfrac{IM + N}{N} = M/N$. Από το λήμμα του Nakayama προκύπτει ότι $M/N = \{0\} \Leftrightarrow N = M$

Λήμμα: Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και I ιδεώδες του R.
Έστω $\phi : M \to M$ ενδομορφισμός του M.
(R-ομομορφισμός $M \to M$).
με $\phi(M) = \operatorname{Im}\phi \subseteq IM$.
Τότε υπάρχουν $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in I$ με

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + a_1\phi + a_0 1_M = 0.$$

Απόδειξη: Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ γεννήτορες του M ($M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$)
Επειδή $\phi(M) \subseteq IM$, τότε $\forall\, j = 1, 2, \dots, n$ θα υπάρχουν $r_{ij} \in I$, $i = 1, 2, \dots, n$ με:

$$\phi(x_j) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \iff \phi(x_j) - \sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}\phi - r_{ij} 1_M) x_i = 0.$$

Υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \phi - r_{11}1_M & -r_{21}1_M & \cdots & -r_{n1}1_M \\ -r_{12}1_M & \phi - r_{22}1_M & \cdots & -r_{n2}1_M \\ \vdots & & & \\ -r_{1n}1_M & -r_{2n}1_M & \cdots & \phi - r_{nn}1_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έστω $A(\phi)$ ο μεγάλος πίνακας. Τότε
$\operatorname{adj} A(\phi) \cdot A(\phi) = 0$ γιατί ο $A(\phi)$ μηδενίζει όλους τους γεννήτορες. Αλλά

$\mathrm{adj}A(\phi)\cdot A(\phi) = \det A(\phi)\cdot I_n$

Άρα $\boxed{\det A(\phi)}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\det A(\phi)=0}$.

Αν κοιτάξουμε τον πίνακα $A(\phi)$, η ορίζουσά του είναι πολυώνυμο του ϕ βαθμού n, και οι συντε-
(μονικό)
λεστές του μονώνυμα (γινόμενα) των r_{ij}, άρα ανήκουν στο I. [illegible] ... Ο συντελεστής του ϕ^n [illegible] ...
είναι 1.

Άρα $\det A(\phi) = \boxed{\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \dots + a_1\phi + a_0 1_M} = 0$ ως απεικόνιση,
$\boxed{a_i \in I}$ $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$.

<u>2η απόδειξη του Λήμματος Nakayama.</u>

Αν $\phi = 1_M : M \to M / x \mapsto x$, $\forall x \in M$, από το προηγούμενο και $I \subseteq Jac(R)$ παίρνουμε

$\boxed{1_M^n + a_{n-1}1_M^{n-1} + \dots + a_0 1_M = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + \underline{a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0}) 1_M = 0$.

Έστω $r = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 \in I \subseteq Jac(R)$.

Τότε $(1+\underline{r})1_M = 0$. Αλλά το $(1+r)$ είναι αντιστρέψιμο, οπότε $\boxed{1_M = 0} \Leftrightarrow \underline{M = \{0\}}$