

Πολυμεταβλητή Ανάλυση

Επανάληψη στη γραμμική άλγεβρα

Λουκία Μελιγκοτσίδου

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

1 Διανύσματα

2 Πίνακες

Γιατί γραμμική άλγεβρα;

- Τα πολυμεταβλητά δεδομένα μπορούν να αναπαρασταθούν αποτελεσματικά μέσω πινάκων.
- Πολλά στατιστικά μοντέλα ορίζονται μέσω πινάκων/διανυσμάτων.
- Οι πίνακες/διανύσματα κωδικοποιούνται πολύ εύκολα σε γλώσσες στατιστικού προγραμματισμού.
- Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται ταχύτερα και πιο αποτελεσματικά μέσω πινάκων/διανυσμάτων.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι μια συλλογή από n (πραγματικούς) αριθμούς,
 $x_1, x_2, \dots, x_n$

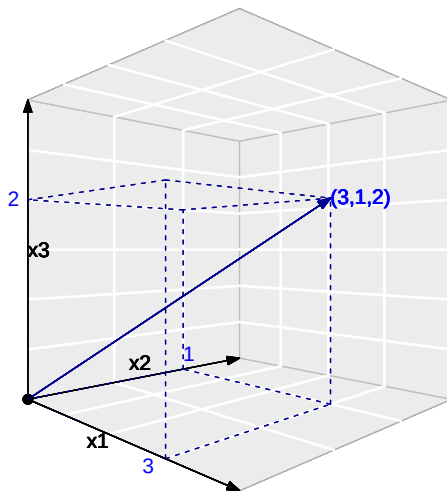
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Κατα σύμβαση θα το θεωρούμε ως 'στήλη'. Ως 'γραμμή'

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3D-Διανύσματα

$$\mathbf{x}^T = (1, 3, 2)$$



Για σταθερά $c \in \mathbb{R}$

$$c\mathbf{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Για δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ίδιας διάστασης

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Εσωτερικό γινόμενο: Έστω $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y}^\top = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Ως εσωτερικό γινόμενο ορίζουμε την ποσότητα,

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Μήκος διανύσματος:

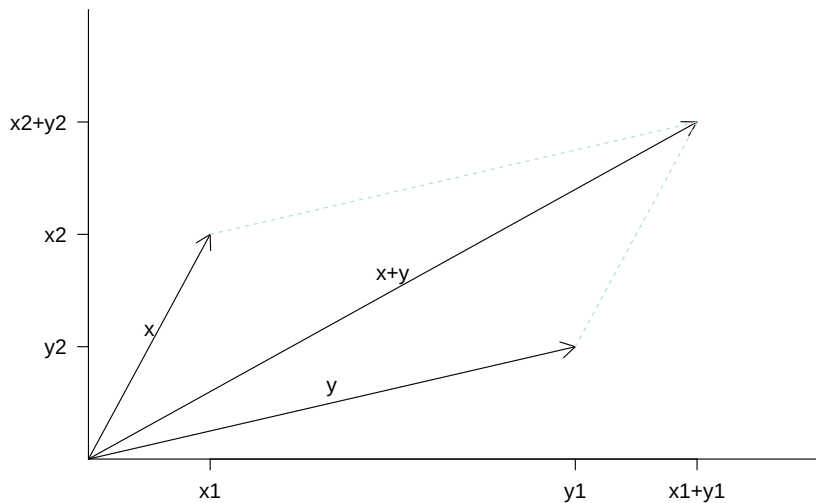
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Γωνία διανυσμάτων - Ερμηνεία εσωτερικού γινομένου: Η γωνία για την οποία ισχύει ότι

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

ορίζεται ως η γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Πρόσθεση Διανυσμάτων



Ορθογώνια διανύσματα

Ορθογώνια διανύσματα: Αν η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι ίση με $\pi/2$ (90°) ή $3\pi/2$ (270°), τότε τα διανύσματα λέγονται ορθογώνια (κάθετα) και συχνά γράφουμε $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων: Έστω $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \dots a_n \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων: Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα εάν

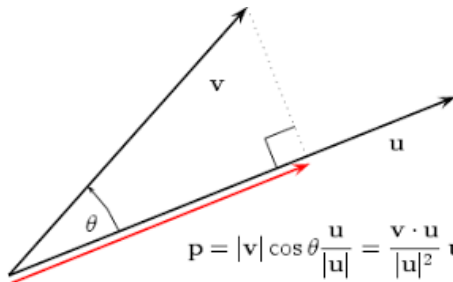
$$a_1 \mathbf{x}_1 + \dots a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$$

- Εάν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι ανά δύο ορθογώνια $\Rightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητα.

Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ονομάζονται ορθοκανονικά εάν έχουν μήκος 1 και είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους.

Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ σε ένα διάνυσμα $\mathbf{y}$ ορίζεται ως

$$\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{\mathbf{y}^\top \mathbf{y}} \mathbf{y}$$



Ένας πίνακας είναι μια συλλογή από πραγματικούς αριθμούς

$$\mathbf{A}_{n \times m} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- $c\mathbf{A} = (c \times a_{ij})$, $n \times m$ πίνακας
- Για πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ίδιου μεγέθους, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, όπου $\mathbf{0}$ ονομάζεται μηδενικός πίνακας (όλα τα στοιχεία ίσα με το μηδέν).

Ο ανάστροφος ενός $\mathbf{A}_{n \times m} = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας όπου οι γραμμές έχουν αντικατασταθεί από τις στήλες

$$\mathbf{A}_{m \times n}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{im} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Έστω πίνακες $\mathbf{A}_{n \times m}$ και $\mathbf{B}_{m \times p}$. Ο πίνακας $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ορίζεται ως ένα $n \times p$ πίνακας όπου το (i, j) στοιχείο είναι ίσο με $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$. Ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε την i γραμμή του $\mathbf{A}$ με τη j στήλη του $\mathbf{B}$.

Παράδειγμα

$$\mathbf{A}_{2 \times 2} \mathbf{B}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Ιδιότητες

- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, και $\mathbf{C}$ πίνακες κατάλληλων διαστάσεων)
- $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ εκτός από ειδικές περιπτώσεις.

Στήλες και γραμμές ενός πίνακα

Εάν

$$\mathbf{A}_{n \times m} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Τότε $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^\top$ αποτελεί τη j στήλη και $\mathbf{b}_i^\top = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ την i γραμμή. Πολύ συχνά βολεύει να γράφουμε

$$\mathbf{A}_{n \times m} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\top \\ \mathbf{b}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^\top \end{pmatrix}$$

Τάξη Πίνακα (Rank of a Matrix)

Έστω

$$\mathbf{A}_{n \times m} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\top \\ \mathbf{b}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^\top \end{pmatrix}$$

Έστω r_1 ο αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων μεταξύ των $\mathbf{a}_j$ και r_2 ο αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων μεταξύ των $\mathbf{b}_i$.

Αποδεικνύεται ότι $r_1 = r_2$ και $\text{Rank}(\mathbf{A}) = r_1 = r_2$.

- $\text{Rank}(\mathbf{A}) \leq \min(n, m)$
- Εάν $\text{Rank}(\mathbf{A}) = \min(n, m)$, τότε λέμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πλήρους τάξης.
- $\text{Rank}(\mathbf{AB}) \leq \min \{ \text{Rank}(\mathbf{A}), \text{Rank}(\mathbf{B}) \}$

Τετραγωνικός Πίνακας: Αριθμός γραμμών = Αριθμός στηλών

Διαγώνιος Πίνακας: Ένας τετραγωνικός πίνακας με τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$$

Συχνά γράφεται και ως $\mathbf{A} = \text{diag}(45, 1, 0, -50)$

Μοναδιαίος Πίνακας: Διαγώνιος πίνακας με μονάδες στην κύρια διαγώνιο

$$I_{n \times n} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα με το μοναδιαίο δίνει τον αρχικό πίνακα

$$\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$$

$$\mathbf{I}_n \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{B}_{n \times p}$$

Έστω $\mathbf{A}_{n \times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Εάν υπάρχει πίνακας $\mathbf{B}_{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

τότε ο $\mathbf{B}$ ονομάζεται αντίστροφος του $\mathbf{A}$

Παρατηρήσεις

- Ο αντίστροφος υπάρχει $\Leftrightarrow$ ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πλήρους τάξης.
- Ο αντίστροφος είναι μοναδικός και συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$.
- Ο αντίστροφος του αντιστρόφου είναι ο αρχικός πίνακας, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- Εάν οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουν αντιστρόφους, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Έστω $\mathbf{A}_{n \times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Η ορίζουσα ορίζεται ως

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}^*) \end{cases}$$

για οποιοδήποτε $i = 1, 2, \dots, n$ (γραμμή) και $\mathbf{A}_{ij}^*$ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη του $\mathbf{A}$.

2 × 2 Πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

τότε $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

- ❶ $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ ο πίνακας έχει πλήρη τάξη.
- ❷ $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- ❸ Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, $|c\mathbf{A}| = c^n |\mathbf{A}|$
- ❹ $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$
- ❺ Εάν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$

Ίχνος Πίνακα (Trace of a Matrix)

Ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}_{n \times n}$ λέγεται το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Ιδιότητες

- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
- $\text{tr}(c\mathbf{A}) = c \text{tr}(\mathbf{A})$
- $\text{tr}(\mathbf{A}^\top) = \text{tr}(\mathbf{A})$
- $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}) = \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top) = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top)$
- Για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (Πίνακες στήλη) ισχύει ότι

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{y}^\top \mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{xx}^\top)$$

Ορθογώνιος Πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται ορθογώνιος εάν $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\top$.

Παρατηρήσεις

- Εάν $\mathbf{A}$ ορθογώνιος $\Rightarrow \mathbf{A}^\top$ ορθογώνιος.

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top = \left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A}$$

- Οι στήλες ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθοκανονικά διανύσματα:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \Rightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\top \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1^\top \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_1^\top \mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}_2^\top \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2^\top \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_2^\top \mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_n^\top \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_n^\top \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n^\top \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

- Οι γραμμές ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθοκανονικά διανύσματα.
- Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ίση με 1 ή -1 αφού $1 = |\mathbf{A}\mathbf{A}^\top| = |\mathbf{A}|^2$.

Ενας τετραγωνικός πίνακας λέγεται συμμετρικός εάν $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Για παράδειγμα, ο παρακάτω πίνακας είναι συμμετρικός

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 & -0.4 \\ 0.5 & 1 & 3.2 \\ -0.4 & 3.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις

- Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι συμμετρικός.
- Έστω ένας $\mathbf{A}_{n \times m}$. Τότε οι πίνακες $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ και $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ είναι συμμετρικοί.

Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα (Eigenvalues-eigenvectors)

Ορισμός

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Ένας (γενικά μιγαδικός) αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{e}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$$

Το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{e}$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα (Ιδιότητες)

- Επειδή

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{e} - \lambda\mathbf{e} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_p)\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

γίνεται φανερό ότι το λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbf{A} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_p) = 0$. Η ορίζουσα αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού p ως προς λ , άρα υπάρχουν ακριβώς p ιδιοτιμές (κάποιες μπορεί να επαναλαμβάνονται). Επιπλέον, έτσι εξηγείται το γιατί μια ιδιοτιμή μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός.

- Κάθε πίνακας έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον ανάστροφό του
- Εάν $\mathbf{e}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , τότε, το ίδιο ισχύει και για το ιδιοδιάνυσμα $c\mathbf{e}$. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ιδιοδιάνυσμα είναι μοναδιαίο, $c = \frac{1}{\|\mathbf{e}\|}$
- Ένας **διαγώνιος πίνακας** έχει ιδιοτιμές τα **διαγώνια** στοιχεία του.
- Ένας **συμμετρικός πίνακας** έχει όλα τα ιδιοδιανύσματά του ανά δύο **ορθογώνια**.

Φασματική ανάλυση (Spectral decomposition)

Εάν ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}_{p \times p}$ έχει ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων

$$(\lambda_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\lambda_p, \mathbf{e}_p)$$

τότε μπορεί να αναλυθεί ως

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\top + \dots + \lambda_p \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p^\top = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^\top$$

όπου $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) \rightarrow p \times p$ πίνακας ιδιοδιανυσμάτων με στήλες τα p ιδιοδιανύσματα και $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Φασματική ανάλυση (απόδειξη)

Ισχύει ότι $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, j = 1, 2, \dots, p$. Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{AE} &= \mathbf{A}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) = (\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_p) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \dots, \lambda_p \mathbf{e}_p) \\ &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{AE} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{AEE}^T = \mathbf{ELE}^T$$

Επειδή ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι συμμετρικός, έχει όλα τα ιδιοδιανύσματα του ανά δύο ορθογώνια (κάθετα: $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j = 0$ για $i \neq j$, ενώ $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1$). Αυτό συνεπάγεται ότι ο πίνακας $\mathbf{E}$ είναι ορθογώνιος, άρα, $\mathbf{EE}^T = \mathbf{I}_p$. Συνεπώς,

$$\mathbf{A} = \mathbf{ELE}^T = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T.$$

Ορίζουσα, ίχνος, και ιδιοτιμές

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p}$ συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Ισχύει ότι

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^p \lambda_i$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

Έστω $\mathbf{A}_{n \times m}$ και $\mathbf{B}_{m \times n}$, τότε

$$\det(\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{BA})$$

Συνεπώς, εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \det(\mathbf{I}_1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{y}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{y} \mathbf{x}^\top)$$

Θετικά ορισμένοι πίνακες (Positive-definite matrices)

Ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}_{p \times p}$ λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \text{ με } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Εάν ο παραπάνω ορισμός ισχύει για $\geq$, ο πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **θετικά ημιορισμένος**.

- Η ποσότητα $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ καλείται τετραγωνική μορφή.
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} x_i x_j$
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^\top) = \text{tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top \mathbf{A})$

Οι θετικά ορισμένοι πίνακες παίζουν κεντρικό ρόλο στη Στατιστική (π.χ. πίνακες συνδιακύμανσης)!

Θετικά ορισμένοι πίνακες (ιδιότητες)

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Όλα τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ είναι θετικοί αριθμοί.

Παίρνουμε $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^\top$ και επιβεβαιώνουμε ότι $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{11} > 0$.

Αναλόγως, για το στοιχείο a_{jj} , αρκεί να πάρουμε $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ (δηλαδή 1 στη j -οστή θέση και 0 στις υπόλοιπες), και επιβεβαιώνεται ότι $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{jj} > 0$

Θετικά ορισμένοι πίνακες (ιδιότητες)

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Όλα τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ είναι θετικοί αριθμοί.

Παίρνουμε $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^\top$ και επιβεβαιώνουμε ότι $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{11} > 0$.

Αναλόγως, για το στοιχείο a_{jj} , αρκεί να πάρουμε $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ (δηλαδή 1 στη j -οστή θέση και 0 στις υπόλοιπες), και επιβεβαιώνεται ότι $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{jj} > 0$

Όλες οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ είναι θετικές

Αρκεί να πάρουμε $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ (το j -οστό ιδιοδιάνυσμα). Τότε χρησιμοποιώντας τη φασματική ανάλυση και την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{e}_j^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_j^\top \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \right) \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i (\mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j \lambda_j (\mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_j) = \lambda_j \end{aligned}$$

Θετικά ορισμένοι πίνακες (ιδιότητες)

Κάθε συμμετρικός πίνακας που έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές είναι θετικά ορισμένος

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα και αντίστροφες ιδιοτιμές

Αφού ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι θετικά ορισμένος, από τη φασματική ανάλυση, $\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^\top$, όπου $\mathbf{E}$ είναι ορθογώνιος ($\mathbf{E}^\top\mathbf{E} = \mathbf{I}_p$). Τότε ο πίνακας $\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{E}^\top$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbf{A}$, όπου $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1})$ και

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{E}^\top\mathbf{E})\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{E}^\top = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{E}^\top = \mathbf{I}_p$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει τετραγωνική ρίζα, δηλαδή υπάρχει πίνακας $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{1/2}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB} = \mathbf{A}$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{A}^{1/2} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^{1/2} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top$.

Οι θετικά ορισμένοι πίνακες αποτελούν γενίκευση των θετικών αριθμών!

Γεωμετρική ερμηνεία μίας θετικά ορισμένης τετραγωνικής μορφής

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p} = (a_{ij})$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Θέλουμε να μελετήσουμε το σύνολο των σημείων για τα οποία

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = c^2 \quad (\text{θετική σταθερά αφού } \mathbf{A} \text{ θετικά ορισμένος})$$

Υποθέτοντας $p = 2$, άρα $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \Rightarrow$

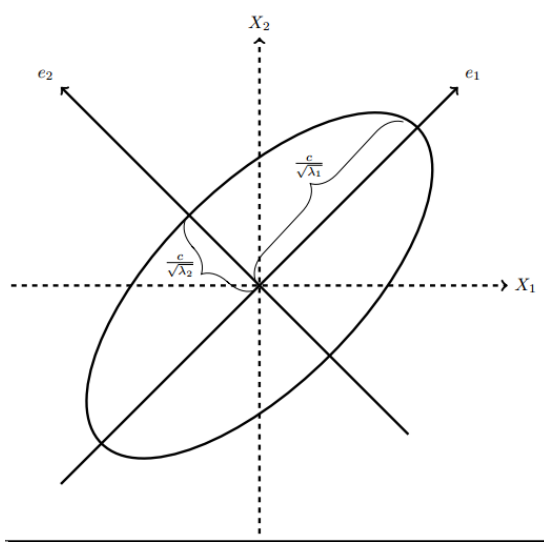
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad (\text{συμμετρικότητα } \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{x}^T (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T) \mathbf{x} = \lambda_1 (\mathbf{e}_1^T \mathbf{x})^2 + \lambda_2 (\mathbf{e}_2^T \mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

Θέτοντας, $y_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}$ και $y_2 = \mathbf{e}_2^T \mathbf{x}$, καταλήγουμε

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = c^2 \Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c^2$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας έλλειψης (με άξονες $y_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}$ και $y_2 = \mathbf{e}_2^T \mathbf{x}$) της οποίας ο ένας ημιάξονας έχει μήκος $c/\sqrt{\lambda_1}$ και ο άλλος $c/\sqrt{\lambda_2}$.

Γεωμετρική ερμηνεία μίας θετικά ορισμένης τετραγωνικής μορφής



Γεωμετρική ερμηνεία σε μεγαλύτερες διαστάσεις

Για γενικό p ,

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2$$

όπου $y_i = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{x}$. Η σχέση μεταξύ $\mathbf{y}$ και $\mathbf{x}$ είναι 1-1 διότι

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_p^\top \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{E}^\top \mathbf{x}$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{E}$ είναι ορθογώνιος, άρα αντιστρέψιμος.

Ερμηνεία

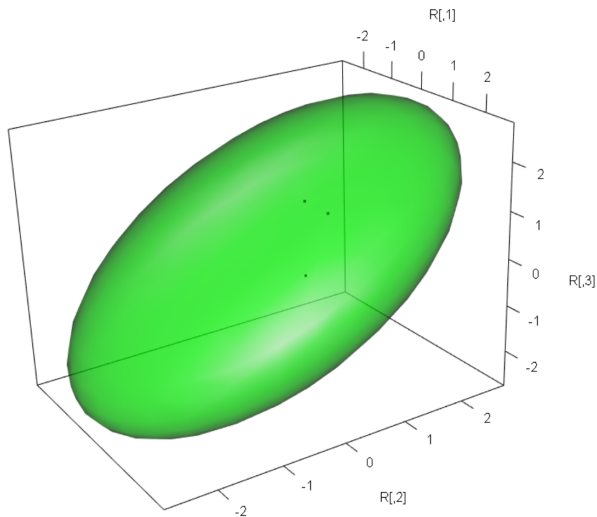
Το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ για τα οποία $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = c^2$ είναι ένα ελλειψοειδές με άξονες στις διευθύνσεις των $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ και μήκη ημιαξόνων $c/\sqrt{\lambda_1}, \dots, c/\sqrt{\lambda_p}$.

Γεωμετρική ερμηνεία σε μεγαλύτερες διαστάσεις - Αλλαγή θέσης

- Όλα τα ελλειψοειδή για τα οποία συζητήσαμε έχουν κέντρο το $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.
- Για να περιγράψουμε το ελλειψοειδές με κέντρο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^p$ πρέπει όλα τα σημεία να μεταφερθούν γύρω από το $\mathbf{x}_0$.
- Σε αυτήν την περίπτωση το ελλειψοειδές έχει εξίσωση

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = c^2.$$

Γεωμετρική ερμηνεία σε μεγαλύτερες διαστάσεις



Μεγιστοποίηση τετραγωνικών μορφών

Έστω $\mathbf{A}_{p \times p}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας με ιδιοτιμές

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$$

και τα αντίστοιχα (κανονικοποιημένα) ιδιοδιανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$. Τότε ισχύουν τα εξής

$$\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \lambda_1 \quad (\text{για } \mathbf{x} = \mathbf{e}_1)$$

$$\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \perp \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \lambda_{k+1} \quad (\text{για } \mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, p-1.$$

Μεγιστοποίηση τετραγωνικών μορφών (απόδειξη)

Επειδή $\mathbf{A}$ είναι θετικά ορισμένος, $\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^\top$, όπου $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ ο ορθογώνιος πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα και $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές. Επίσης, $\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{E}^\top$.

Έστω $\mathbf{y} = \mathbf{E}^\top \mathbf{x}$. Επειδή $\mathbf{E}$ αντιστρέψιμος, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Θυμηθείτε επίσης ότι $\mathbf{E}\mathbf{E}^\top = \mathbf{I}_p$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{E} \mathbf{E}^\top \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{E} \mathbf{\Lambda}^{1/2} (\mathbf{E}^\top \mathbf{E}) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{E}^\top \mathbf{x}}{\mathbf{y}^\top \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^\top \mathbf{y}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^p y_i^2} \leq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^p y_i^2}{\sum_{i=1}^p y_i^2} = \lambda_1 \quad (\text{για κάθε } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε το πρώτο μέρος, θέτοντας $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$

$$\frac{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1} = \mathbf{e}_1^\top \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \right) \mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i (\mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_i)^2 = \lambda_1 \quad (\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p).$$

Μεγιστοποίηση τετραγωνικών μορφών (απόδειξη)

Αφού $\mathbf{y} = \mathbf{E}^\top \mathbf{x}$, συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{y} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)(y_1, \dots, y_p)^\top = \sum_{i=1}^p y_i \mathbf{e}_i.$$

Οπότε για $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j$, έχουμε ότι για $j = 1, 2, \dots, k$

$$0 = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{x} = \mathbf{e}_j^\top \sum_{i=1}^p y_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^p y_i (\mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_i) = y_j$$

δηλαδή $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$. Άρα η παραπάνω ποσότητα γίνεται

$$\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=k+1}^p \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=k+1}^p y_i^2} \leq \frac{\lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^p y_i^2}{\sum_{i=k+1}^p y_i^2} = \lambda_{k+1}.$$

Ανάλογα επιβεβαιώνεται ότι $\mathbf{e}_{k+1}^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_{k+1} = \lambda_{k+1}$.

Έστω $\beta_{k \times 1}$ k -διάστατο διάνυσμα και $f(\beta) = f(\beta_1, \dots, \beta_k)$ μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Η παράγωγος της f ως προς β ορίζεται ως

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta_k} \end{Bmatrix}_{k \times 1}$$

δηλαδή το k -διάστατο διάνυσμα των μερικών παραγώγων. Σαν σύμβαση, θεωρούμε το $1 \times k$ διάνυσμα (πίνακας γραμμή)

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta^\top} = \left\{ \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta_k} \right\}_{1 \times k}.$$

Παραγωγή διανυσματικών συναρτήσεων

Έστω

$$\mathbf{g}(\beta) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1(\beta) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n(\beta) \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

όπου $\mathbf{g}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση της μεταβλητής β , $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Επειδή η $\mathbf{g}$ είναι ουσιαστικά πίνακας στήλη, ορίζουμε την παράγωγο της $\mathbf{g}$ ως προς το $\beta^\top$ (πίνακας γραμμή)

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\beta)}{\partial \beta^\top} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1(\beta)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_1(\beta)}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_n(\beta)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_n(\beta)}{\partial \beta_k} \end{Bmatrix}_{n \times k}$$

Ισχύει πάντα ότι

$$\frac{\partial \mathbf{g}^\top(\beta)}{\partial \beta} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\beta)}{\partial \beta^\top} \right\}^\top.$$

Έστω $f(\beta) \in \mathbb{R}$, ο Εσσιανός πίνακας ορίζεται ως

$$\frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^\top} = \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta^\top \partial \beta} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_k} \end{array} \right\}_{k \times k}$$

ο οποίος είναι ένας $k \times k$ **συμμετρικός** πίνακας (η σειρά της παραγωγίσης δεν παίζει ρόλο).

Έστω $f(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{c}^\top \boldsymbol{\beta} = c_1\beta_1 + \dots + c_k\beta_k$, όπου $\beta_{k \times 1}$ και $\mathbf{c}_{k \times 1}$ (σταθερά). Άρα,

$$\frac{\partial \mathbf{c}^\top \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial(c_1\beta_1 + \dots + c_k\beta_k)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(c_1\beta_1 + \dots + c_k\beta_k)}{\partial \beta_k} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \mathbf{c}.$$

Επειδή $\mathbf{c}^\top \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{c} \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{c}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{c}$.

Έστω $g(\beta) = \mathbf{A}\beta$, όπου $\mathbf{A}_{n \times k}$ σταθερός πίνακας.

$$g(\beta) = \mathbf{A}\beta = \begin{pmatrix} a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1k}\beta_k \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nk}\beta_k \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial \mathbf{A}\beta}{\partial \beta^\top} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial(a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1k}\beta_k)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial(a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1k}\beta_k)}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nk}\beta_k)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial(a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nk}\beta_k)}{\partial \beta_k} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Ανάλογα, $\frac{\partial \beta^\top \mathbf{A}}{\partial \beta} = \mathbf{A}^\top$.

Έστω $f(\beta) = \beta^\top \mathbf{A} \beta$ για κάποιον πίνακα $\mathbf{A}$. Τότε αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta^\top \mathbf{A} \beta}{\partial \beta} &= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \beta \\ \frac{\partial \beta^\top \mathbf{A} \beta}{\partial \beta^\top} &= \beta^\top (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)\end{aligned}$$

Εάν $\mathbf{A}$ συμμετρικός, $\frac{\partial \beta^\top \mathbf{A} \beta}{\partial \beta} = 2\mathbf{A} \beta$. Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 \beta^\top \mathbf{A} \beta}{\partial \beta \partial \beta^\top} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top.$$