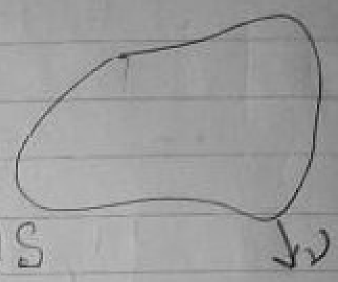
# Διάλεξη 9

## Συναρτήσεις Green

### 1. Ταυτότητες του Green

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, με $C^1$ σύνορο $\partial U$.
Έστω $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$




**1η Ταυτότητα**

$$\int_U \Delta u \, v \, dx + \int_U \nabla u \, \nabla v \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS$$

**2η Ταυτότητα**

$$\int_U (\Delta u \, v - \Delta v \, u) \, dx = \int_{\partial U} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u \right) dS$$

**Απόδειξη**

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Απόκλισης

$$\int_U \operatorname{div} \vec{V} \, dx = \int_{\partial U} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, dS$$

για

$$\vec{V} = v \nabla u = (v u_{x_1}, \dots, v u_{x_n})$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (v u_{x_i}) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nu} = v \nabla u \cdot \vec{\nu} = v \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

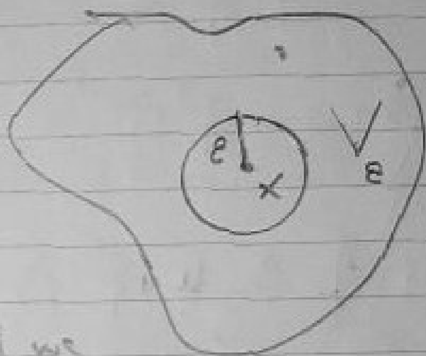
∴ η 1η ταυτότητα αποδείχτηκε. Η 2η προκύπτει σχεδόν αμέσως από την 1η.

## 2. $3^{\eta}$ Ταυτότητα

Έστω $u\in C^2(\overline{U})$, και $x\in U$, $\Phi$ η θεμελιώδης λύση

$$u(x)=\int_{\partial U}\left[\Phi(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)}-u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(y-x)\right]dS_y$$

$$-\int_{U}\Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy$$




### Απόδειξη

Φιξάρουμε το $x$, και θεωρούμε την $y$ ως μεταβλητή. ~~Θεωρούμε~~ $\varepsilon>0$ έτσι ώστε

$B(x,\varepsilon)\subset U$, και εφαρμόζουμε την $2^{\eta}$ ταυτότητα Green στο $U\setminus B(x,\varepsilon)=:V_\varepsilon$, $y\to\Phi(y-x)$, $y\to u(y)$ $\in C^2(\overline{V}_\varepsilon)$

$$(*)\quad \int_{V_\varepsilon}\left[\cancelto{0}{u(y)\Delta_y\Phi(x-y)}-\Phi(y-x)\Delta_y u(y)\right]dy=$$

$$=\int_{\partial V_\varepsilon}\left[u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(y-x)-\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu(y)}(y)\right]dS_y$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln|x|, & n=2\\ c_d\frac{1}{|x|^{n-2}}, & n>2\end{cases}$$

$$\partial V_\varepsilon=\partial B(x,\varepsilon)\cup\partial U$$

$$\alpha)\quad \left|\int_{\partial B(y,\varepsilon)}\Phi(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)}dS_y\right|\le\max_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(z)|\,C'\varepsilon^{n-1}\longrightarrow 0,\ \varepsilon\to 0$$

β) $$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)} dS_y = \frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\, dS_y$$

Υπενθυμίζουμε από την Απόδειξη του Θ1 στην § της Θεμελιώδους Λύσης:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)\right|_{|y|=\varepsilon} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad , \quad n\alpha(n)\varepsilon^{n-1} = |\partial B(0,\varepsilon)|$$

$//$

εμβαδόν $\partial B(0,\varepsilon)$

$$\therefore \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS_y = u(x)$$

Κατά συνέπεια παίρνοντας το όριο στην (*):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{V_\varepsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y)\, dy$$

$$= \int_{\partial U} \left[ u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] dS_y$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Lebesgue διότι $\int_U |\Phi(y-x)|\, dy < \infty$ και έτσι

παίρνουμε τον τύπο αναπαράστασης

$$(1)\quad \boxed{u(x) = \int_{\partial U} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\, dS_y - \int_U \Phi(y-x)\,\Delta_y u(y)\, dy .}$$

Η απόδειξη της 3ης Ταυτότητας ολοκληρώθηκε. □

Εφαρμογή στο ΠΣΤ

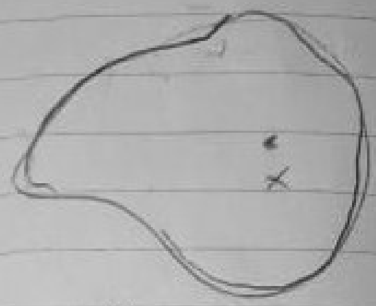
$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta_y u = f(y) & \text{στο } U \\ u = g & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

$f, g$ δοσμένες , $f(y), g(y)$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο τύπος Αναπαράστασης (1) δεν προσφέρεται άμεσα για να δώσει την λύση του (D) διότι περιέχει το όρο $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ που δεν προσδιορίζεται από το (D) απ' ευθείας. Το πρόβλημα είναι ο όρος που περιέχει την $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

## Η Συνάρτηση Green – Τροποποίηση της Θεμελιώδους Λύσης μέσω των Συνοριακών Συνθηκών

### Ο Διορθωτικός Όρος




$$(2)\quad \begin{cases} \Delta_y \phi^x = 0, & y \in U \\ \phi^x = \Phi(y-x), & y \in \partial U \end{cases}$$

$\phi^x(y)$

Έστω $\phi^x(y)$ η λύση της (2), και έστω $u \in C^2(\bar{U})$

$$(3)\quad \int_U \Big[ \Delta_y u \, \phi^x(y)\, dy - \big(\underbrace{\cancel{\Delta_y \phi^x(y)}}_{=0}\big) u \Big] dy$$

$$\overset{2^{\eta} \text{ ταυτότητα}}{=} \int_{\partial U} \Big[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi^x - \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu} u \Big] dS_y$$

$$= \int_{\partial U} \Big[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(y-x) - u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu} \Big] dS_y .$$

**Ορ**

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \phi^x(y) \qquad (x, y \in U,\ x \neq y)$$

Κάνοντας χρήση της (1), και αντικαθιστώντας το $\int \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(y-x)$, δίνει

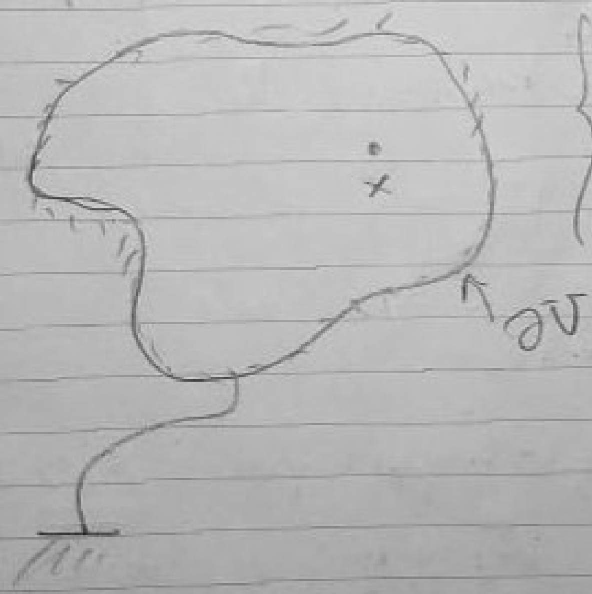
$$(14)\quad u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\,\frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x,y)\,dS_y - \int_{U} G(x,y)\,\Delta_y u(y)\,dy \qquad (x \in U)$$

Για $u \in C^2(\bar{U})$ λύση του (D)

$\therefore$

$$(5)\quad u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\,\frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x,y)\,dS(y) + \int_{U} f(y)\,G(x,y)\,dy \qquad (x \in U)$$

## Φυσική Ερμηνεία της Συνάρτησης Green




$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) \\ G(x,y) = 0, \ y \in \partial U \end{cases}$$

Το Δυναμικό που παράγει ένα μοναδιαίο αρνητικό φορτίο τοποθετημένο στην θέση $x$, εντός γειωμένου αγωγού $U$