

Θεωρία Μέτρου 2025-26 - Φυλλάδιο 3

Προθεσμία παράδοσης: 7 Ιανουαρίου 2026. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

a) Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \rightarrow [0, +\infty)$ φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} s d\lambda : s \text{ απλή, με } f \leq s \right\}.$$

b) Έστω $f : ([0, 1], \mathcal{L}([0, 1]), \lambda) \rightarrow [0, +\infty)$ φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} s d\lambda : s \text{ απλή, με } f \leq s \right\}.$$

c) Έστω $f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι ορίζεται καλά το $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και ότι η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\lambda.$$

2. Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \rightarrow [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

a) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \int_{[-n, n]} f d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \right| < \varepsilon.$$

b) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}$, ώστε η $f \chi_A$ να είναι φραγμένη συνάρτηση και

$$\left| \int_A f d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \right| < \varepsilon.$$

3. Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \rightarrow [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{για κάθε } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \text{ με } \lambda(A) < \delta, \text{ να ισχύει ότι } \int_A f d\lambda < \varepsilon.$$

4. Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

a) Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(x+n) d\lambda(x) = \int_n^{n+1} f(x) d\lambda(x).$$

b) Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει για λ -σχεδόν κάθε $x \in [0, 1]$.

5. a) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι Lebesgue-μετρήσιμη και υπολογίστε το $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$.

b) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{f(x)} \, d\lambda(x) = \lambda(\{x \in [0, 1] : f(x) > 0\}).$$

6. Υπολογίστε τα παρακάτω (με δικαιολόγηση).

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, dx.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(1, +\infty)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n d\lambda(x).$$

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, με $\mu(X) < +\infty$. Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ Lebesgue-μετρήσιμη. (Προσοχή, η f μπορεί να παίρνει και τις τιμές $\pm\infty$.) Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι να δειχθεί ότι

$$\int |f| d\mu < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty.$$

a) Έστω ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$. Δείξτε ότι η $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Έστω ότι η $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(i) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $A_k := \{x \in X : 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$. Δείξτε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) \leq 2 \int |f| d\mu (< +\infty)$.