

Θεωρία Μέτρου - Εξέταση χειμερινού εξαμήνου 2023-24: 27 Μαρτίου 2024

1. (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μέτρο μ είναι *ημιπεπερασμένο* αν:
“Κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = +\infty$ έχει υποσύνολο $B \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(B) < +\infty$.”
 - a) Δείξτε ότι το μέτρο Lebesgue λ στο $\mathbb{R}$ είναι ημιπεπερασμένο.
 - b) Κατασκευάστε ένα μέτρο (σε όποιον χώρο επιθυμείτε) που δεν είναι ημιπεπερασμένο.
2. (2 μονάδες) Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα (a, b) στο $\mathbb{R}$ ώστε $\lambda(A \cap (a, b)) > \frac{2}{3}(b - a)$.
3. (2 μονάδες) Έστω B Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(B) < +\infty$.
 - a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής.
 - b) Έστω ότι $\lambda(B) = 10$. Δείξτε ότι υπάρχει $A \subset B$ με $\lambda(A) = 5$.
4. (2 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
 - a) Έστω Lebesgue-μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει Borel-μετρήσιμο $B \subseteq A$ ώστε $\lambda(B) = \lambda(A)$.
 - b) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{f(K) : K \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \mathbb{R}\}$$

είναι σ -άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

- c) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με

$$a_n - b_n \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad a_n - b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

5. (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.
 - a) Τί σημαίνει ότι μία $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη; (Δώστε τον ορισμό.)
 - b) Έστω ότι υπάρχει μία $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, με $\int |f| d\mu < +\infty$, και με την επιπλέον ιδιότητα ότι είναι αυστηρά θετική (δηλαδή, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$). Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων στις $\mathcal{A}$, ώστε

$$\mu(A_n) < +\infty \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

6. (2 μονάδες)
 - a) Έστω Lebesgue-μετρήσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$. Εξηγήστε το ότι

$$\int_{[-n, n]} f d\lambda \rightarrow \int f d\lambda.$$

- b) Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, το

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0,1)} \frac{1}{2\sqrt{x-x^n}} d\lambda(x).$$

Καλή επιτυχία!