

## Θεωρία Μέτρου - Εξέταση Σεπτεμβρίου 2024 - 27 Σεπτεμβρίου 2024

Σχόλια:

- Η εξέταση πιάνει συνολικά **12 μονάδες**. Αν  $x$  είναι το σύνολο των μονάδων που θα μαζέψετε, ο τελικός βαθμός της εξέτασης θα είναι  $x$  στα 10.
  - Στα παρακάτω συμβολίζουμε με  $\lambda$  το μέτρο Lebesgue στο  $\mathbb{R}$ , με  $\lambda^*$  το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο  $\mathbb{R}$ , και με  $L^p(\mathbb{R})$  το σύνολο των  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζονται  $\lambda$ -σχεδόν παντού, με την ιδιότητα ότι  $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda < +\infty$ .
- 

### 1. (2 μονάδες)

- a) Έστω  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -άλγεβρα στο  $X$ , και  $B \subset X$  με την ιδιότητα ότι  $B \notin \mathcal{F}$ . Δείξτε ότι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει συγχρόνως όλα τα στοιχεία της  $\mathcal{F}$  και το  $B$  είναι η οικογένεια

$$\mathcal{C} := \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B^c) : A_1, A_2 \in \mathcal{F}\}.$$

- b) Λέμε ότι ένα  $A \subseteq \mathbb{R}$  είναι *μεγάλο* αν έχει υπεραριθμίσμα το πλήθος στοιχεία έξω από κάθε φραγμένο διάστημα. Ορίζουμε  $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  με

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν το } A \text{ είναι αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν το } A \text{ είναι υπεραριθμίσμο αλλά όχι μεγάλο,} \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι μεγάλο.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι το  $\mu^*$  είναι εξωτερικό μέτρο.

### 2. (2 μονάδες)

Έστω  $A \subset \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το  $A$  είναι Lebesgue-μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$b - a = \lambda^*((a, b) \cap A) + \lambda^*((a, b) \setminus A) \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

### 3. (4 μονάδες)

- a) Έστω  $A \subseteq [0, 1]$  με  $\lambda(A) > 0$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $x, y \in A$  ώστε  $x - y \in \mathbb{Q}$ .
- b) Ισχύει ότι κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  με θετικό μέτρο Lebesgue περιέχει διάστημα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- c) Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Συμβολίζουμε με  $A^\circ$  το *εσωτερικό* του  $A$ , δηλαδή την ένωση όλων των ανοιχτών μπαλών του  $\mathbb{R}^2$  που περιέχονται στο  $A$ . Ορίζουμε  $\partial A := A \setminus A^\circ$ , το *σύνορο* του  $A$ .  
Δείξτε ότι, αν το  $\partial A$  έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue 0, τότε το  $A$  είναι Lebesgue-μετρήσιμο.
- d) Αν  $f \in L^1(\mathbb{R})$  και  $f \in L^3(\mathbb{R})$ , δείξτε ότι και  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

### 4. (2 μονάδες)

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\int |f| d\lambda < +\infty$ . Δείξτε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε:

$$\text{για κάθε } E \subset \mathbb{R} \text{ με } \lambda(E) < \delta, \text{ ισχύει ότι } \int_E |f| < \varepsilon.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για  $f$  μη αρνητική, απλή συνάρτηση.)

5. (2 μονάδες) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση.

a) Εξηγήστε γιατί η  $f'$  είναι Lebesgue-μετρήσιμη.

b) Έστω ότι επιπλέον  $|f'(x)| \leq 10$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n \cdot \left( f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) d\lambda(x) = \int_0^1 f'(x) d\lambda(x).$$

**Καλή επιτυχία!**