

Θεωρία Μέτρου - Εξέταση Σεπτεμβρίου 2025 - 16 Σεπτεμβρίου 2025

Σχόλια:

- Η εξέταση πιάνει συνολικά **10 μονάδες**. Οι μονάδες που θα πάρετε εδώ θα προστεθούν στις μονάδες των εργασιών, για τον τελικό βαθμό.
- Στα παρακάτω συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με λ_2 το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^2$, και με $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ τη Lebesgue σ -άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Τέλος, συμβολίζουμε με $\#A$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A .

1. **(1.5 μονάδες)** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποκαλούμε ένα $E \subseteq X$ *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$. Ορίζουμε

$$\mathcal{E} := \{E \subseteq X : E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

- a) Δείξτε ότι η $\mathcal{E}$ είναι σ -άλγεβρα, και ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.
b) Έστω ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σ -πεπερασμένος. Δείξτε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

2. **(1 μονάδα)** Έστω $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$, με

$$\mu(A) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n}, \quad \text{για κάθε } A \subseteq \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το μ δεν είναι μέτρο.

3. **(2 μονάδες)** Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(A \cup (A+t)) = \lambda(A).$$

[Υπόδειξη: Πρώτα καλύψτε το A κατάλληλα με διαστήματα.]

4. **(3.5 μονάδες)** Απαντήστε στα παρακάτω.

- a) Έστω N ένα σύνολο Vitali στο $[0, 1)$. Δείξτε ότι το $N \times \{0\}$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
b) Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι, για κάθε ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}$ με $U \supseteq A$, έχουμε ότι $\lambda(U) \geq 1$. Δείξτε ότι και $\lambda(A) \geq 1$.
c) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση, με την ιδιότητα ότι $f > 0$ λ -σχεδόν παντού. Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $\int_A f d\lambda = 0$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.
d) Έστω C ο κύκλος στον $\mathbb{R}^2$ με κέντρο $(1, 0)$ και ακτίνα 1. Ορίζουμε $C_0 := C \setminus \{(0, 0)\}$. Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in A$, το σύνολο $x + C_0$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Δείξτε ότι $\lambda_2(A) = 0$.

[Υπόδειξη: Θα βοηθήσει να φτιάξετε σχήμα για τον C_0 και για τον $x + C_0$ (τη μεταφορά του κατά διάνυσμα x). Επίσης, θα βοηθήσει η παρατήρηση ότι κάθε μπάλα $B(0, \delta)$ με κέντρο το 0 τέμνει τον C_0 .]

5. (2 μονάδες)

a) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{f(x)} \, d\lambda(x) = \lambda(\{x \in [0, 1] : f(x) > 0\}).$$

b) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει για λ -σχεδόν κάθε $x \in [0, 1]$.

Καλή επιτυχία!