

Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας II
19 Ιανουαρίου 2026

Θέμα 1

Να αποφανθείτε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς ή αληθείς. Να δικαιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

- (1) Δυο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- (2) Έστω μοναδιαίος πίνακας τότε $|\det(A)| = 1$.
- (3) Έστω πραγματικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^2 + A + I_n = 0$. Τότε το n είναι άρτιος.
- (4) Έστω $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μηδενοδύναμος. Τότε $\det(N + 2I_n) = 2^n$.
- (5) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^* = -A$. Ο πίνακας $A - 2I_n$ δεν αντιστρέφεται.

(1) Ναι, γιατί

$$\det(Q^{-1}AQ - xI) = \det(Q^{-1}(A - xI_n)Q) = \det(Q^{-1}) \det(A - xI) \det Q = \det(A - xI).$$

- (2) Ναι. Ένας μοναδιαίος πίνακας έχει ιδιοτιμές απόλυτης τιμής ίσης με την μονάδα και η ορίζουσα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών.
- (3) Ναι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει βαθμό n και αν το n ήταν περιττό τότε θα είχε μια πραγματική ρίζα. Από την άλλη το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το $x^2 + x + 1$ το οποίο έχει αρνητική διακρίνουσα και όχι πραγματικές ρίζες.
- (4) Ναι, ένας μηδενοδύναμος πίνακας έχει ελάχιστο πολυώνυμο x^N και συνεπώς μηδενικές ιδιοτιμές. Ο πίνακας N είναι όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα με 0 στην διαγώνιο ενώ ο $N + 2I_n$ είναι όμοιος με άνω τριγωνικό με 2 στην διαγώνιο και έχει ορίζουσα 2^n .
- (5) Λάθος. Έστω λ ιδιοτιμή του A και v το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Έχουμε ότι

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, A^*v \rangle = \langle v, -Av \rangle = \langle v, -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Αφού $v \neq 0$ έχουμε ότι $\langle v, v \rangle \neq 0$ και $\bar{\lambda} = -\lambda$, δηλαδή $\lambda \in i\mathbb{R}$. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος όλες οι φανταστικές ιδιοτιμές είναι διαφορετικές του μηδενός και αυτό δεν μπορεί να αλλάξει αφαιρώντας το 2. Συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος.

Θέμα 2

- (1) Δίνεται ο πίνακας

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να μελετηθεί ως προς την διαγωνισιμότητα ο πίνακας A_m , για κάθε $m \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A_m .

- (2) Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Έστω $W \neq 0$ υπόχωρος του V που είναι f -αναλλοίωτος. Ναδειχθεί ότι ο W περιέχει ένα ιδιοδιάνυσμα της f .

- (1) Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} m-x & 1 & 1 \\ 1 & m-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} &= (1-x) \det \begin{pmatrix} m-x & 1 \\ 1 & m-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)((m-x)^2 - 1) = (1-x)(x - (m+1))(x - (m-1)). \end{aligned}$$

- Αν $m+1 \neq 1 \Rightarrow m \neq 0$ και $m-1 \neq 1 \Rightarrow m \neq 2$ τότε ο πίνακας έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι διαγωνοποιήσιμος και το ελάχιστο πολυώνυμο του είναι το $(x-1)(x-(m+1))(x-(m-1))$.
- Αν $m = 0$ Τότε έχουμε να εξετάσουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει το 1 ως διπλή ιδιοτιμή και το -1 ως απλή ιδιοτιμή. Παρατηρούμε ότι το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

έχει μονοδιάστατο χώρο λύσεων (για παράδειγμα ο τελευταίος πίνακας έχει τάξη 2 και συνεπώς πυρήνα διάστασης 1) άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A_0 είναι $1, -1$ και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(x-1)^2(x+1)$. Το τελευταίο μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής: το χαρακτηριστικό είναι το $(x-1)^2(x+1)$ και το ελάχιστο το διαιρεί και έχει τις ιδιοτιμές $1, -1$. Άρα το ελάχιστο είναι είτε το $(x-1)^2(x+1)$ είτε το $(x-1)(x+1)$. Στην τελευταία όμως περίπτωση θα είχαμε ότι ο πίνακας θα ήταν διαγωνοποιήσιμος αφού το ελάχιστο πολυώνυμο έχει απλές ρίζες. Ένας άλλος τρόπος να αποκλείσουμε το $(x-1)(x+1)$ ως ελάχιστο θα ήταν να υπολογίσουμε $(A - I_3)(A + I_3)$ και να δούμε ότι δεν είναι ο μηδενικός πίνακας.

• Αν $m = 2$ τότε έχουμε να εξετάσουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει διπλή ιδιοτιμή το 1 και απλή ιδιοτιμή το 3. Υπολογίζουμε και πάλι τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Τα παραπάνω ισοδύναμα συστήματα έχουν διδιάστατο χώρο λύσεων. Πράγματι ο τελευταίος πίνακας έχει τάξη 1 και συνεπώς η τάξη του πυρήνα είναι 2. Άρα έχουμε αρκετά ιδιοδιανύσματα (η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίση με την γεωμετρική) και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος. Το δε ελάχιστο πολυώνυμο του διαιρεί το χαρακτηριστικό και έχει απλές ρίζες άρα είναι το $(x-1)(x-3)$.

- (2) Αφού ο W είναι f -αναλλοίωτος ορίζεται συνάρτηση $f|_W: W \rightarrow W$. Κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της $f|_W$ έχει ένα ιδιοδιάνυσμα. Το τελευταίο είναι και ιδιοδιάνυσμα της $f: V \rightarrow V$.

Θέμα 3

- (1) Δίνεται ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας M είναι διαγωνίσιμος; Τριγωνίσιμος; Αν ναι να βρεθεί πίνακας P αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}MP$ να είναι άνω τριγωνικός.

- (2) Έστω πίνακας $N \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $N^3 = 0$ και $N^2 \neq 0$. Υπάρχει πίνακας $X \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $X^2 = N$?

- (1) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του M που είναι το $(x-1)^2(x-2)$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 2 ως λύση του

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

και παρατηρούμε ότι μια λύση είναι το $(x, y, z) = (1, 0, 0) =: v_1$. Ο πυρήνας έχει αναγκαστικά διάσταση 1 το οποίο μπορούμε να το δικαιολογήσουμε είτε παρατηρώντας ότι ο πίνακας έχει τάξη 2 είναι παρατηρώντας ότι η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής 2 (γεωμετρική πολλαπλότητα) είναι μικρότερη από την τάξη της ρίζας 2 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που είναι 1. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να λύσουμε πλήρως το σύστημα με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 1 λύνοντας το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει μονοδιάστατη λύση (ο πίνακας του συστήματος έχει τάξη 2) ενώ μια λύση του συστήματος είναι η $(x, y, z) = (-1, 1, 1) =: v_2$. Η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής 1 είναι γνήσια μικρότερη από την πολλαπλότητα της ρίζας 1 στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για να βρούμε τον πίνακα P τοποθετούμε τα διανύσματα v_1, v_2 ως στήλες και συμπληρώνουμε με ένα οποιοδήποτε διάνυσμα v_3 ως τρίτη στήλη με τέτοιο τρόπο ώστε τα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ο πίνακας P αντιστρέψιμος. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $v_3 = (0, 1, 0)$. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε τον πίνακα P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος από την κατασκευή του ικανοποιεί

$$MP = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και τα a, b μπορεί να είναι οτιδήποτε (εξαρτώνται από την επιλογή του v_3). Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Έστω πίνακας X με $X^2 = N$. Είναι σαφές ότι ο πίνακας X είναι μηδενοδύναμος αφού $X^6 = N^3 = 0$. Το ελάχιστο πολυώνυμο του X είναι της μορφής x^m για κάποιο m αλλά αφού διαιρεί το χαρακτηριστικό που είναι βαθμού 3 αναγκαστικά $m \geq 3$ και συνεπώς $X^3 = 0$. Όμως $X^4 = N^2 \neq 0$, άτοπο.

Θέμα 4

- (1) Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Αν $u, v \in V$ είναι κάθετα μεταξύ τους ναδειχθεί ότι $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Ισχύει το αντίστροφο;
 (2) Έστω $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $MN = NM$. Ο πίνακας $(M - N)$ είναι διαγωνίσιμος;

- (1) Αν u, v κάθετα τότε το εσωτερικό τους γινόμενο $\langle u, v \rangle = 0$. Συνεπώς

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Αφού τα u, v είναι κάθετα έχουμε ότι $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ και η ισότητα έπεται. Αντιστρόφως αν ισχύει η ισότητα για κάποια u, v έχουμε ότι

$$\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = 0.$$

Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ τότε το τελευταίο δίνει ότι $2\langle u, v \rangle = 0$ και συνεπώς $\langle u, v \rangle = 0$ και τα u, v είναι κάθετα.

Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ τότε έχουμε ότι $\langle u, v \rangle \in i\mathbb{R}$. Αυτό μπορεί να συμβεί για παράδειγμα στον $\mathbb{C}^2$ εφοδιασμένο με το κανονικό ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο και $u = (1, i), v = (0, 1)$, όπου

$$\langle u, v \rangle = i \text{ και } \langle v, u \rangle = -i,$$

δηλαδή

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, ενώ u, v όχι κάθετα.

- (2) Οι κανονικοί πίνακες είναι γνωστό ότι είναι διαγωνοποιήσιμοι. Επιπλέον η συνθήκη $MN = NM$ μας δίνει ότι υπάρχει κοινός αντιστρέψιμος πίνακας Q ώστε

$$Q^{-1}NQ = D_1, \text{ και } Q^{-1}MQ = D_2$$

με D_1, D_2 διαγώνιοι πίνακες. Άρα ο $Q^{-1}(M - N)Q = D_1 - D_2$ και ο $M - N$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα 45 λεπτά