

Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας II
1 Σεπτεμβρίου 2026

Θέμα Α

(1) Για $a \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τον πίνακα

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Να μελετηθεί, ανάλογα με τις τιμές του a , ως προς τη διαγωνιοποισιμότητα.

1.5 μονάδα

Ο πίνακας A_a είναι άνω τριγωνικός, άρα οι ιδιοτιμές του διαβάζονται στη διαγώνιο:

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = 2-a, \quad \lambda_3 = 0.$$

Αν $a \neq 0, 1, 2$: τότε τα $a, 2-a, 0$ είναι ανά δύο διαφορετικά, οπότε ο A_a έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές σε χώρο διάστασης 3, άρα είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αν $a = 1$: οι ιδιοτιμές είναι 1, 1, 0. Εξετάζουμε τον ιδιόχωρο της $\lambda = 1$:

$$A_1 - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

πίνακας τάξης 2 (η τρίτη γραμμή είναι -1 επί την δεύτερη), άρα ο πυρήνας του έχει διάσταση 1. Αφού η αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda = 1$ είναι 2 ενώ η γεωμετρική είναι 1, ο A_1 δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αν $a = 0$: οι ιδιοτιμές είναι 0, 2, 0, δηλαδή το 0 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Εξετάζουμε

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύνουμε $A_0 v = 0$: από την πρώτη γραμμή $x_2 = 0$, από τη δεύτερη $2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, με x_1 ελεύθερο. Άρα ο ιδιόχωρος της $\lambda = 0$ έχει διάσταση $1 < 2$, οπότε ο A_0 δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αν $a = 2$: οι ιδιοτιμές είναι 2, 0, 0, δηλαδή το 0 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Εξετάζουμε

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύνουμε $A_2 v = 0$: από την δεύτερη γραμμή $x_3 = 0$, από την πρώτη $2x_1 + x_2 = 0$, με x_1 ελεύθερο. Άρα ο ιδιόχωρος της $\lambda = 0$ έχει διάσταση $1 < 2$, οπότε ο A_2 δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Συμπέρασμα: Ο A_a είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $a \notin \{0, 1, 2\}$.

(2) Έστω E διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \in L(E)$ τέτοια ώστε

$$f^3 - 4f^2 + 3f = 0.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι διαγωνίσιμη και να προσδιοριστούν οι δυνατές ιδιοτιμές της.

1.5 μονάδα

Παρατηρούμε ότι

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3),$$

οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ της f διαιρεί το $x(x-1)(x-3)$, το οποίο έχει απλές ρίζες. Άρα και το $m_f(x)$, ως διαιρέτης του, έχει απλές ρίζες, και επιπλέον διασπάται σε πρώτους παράγοντες πρώτου βαθμού (αφού $x(x-1)(x-3)$ διασπάται). Από το κριτήριο διαγωνισιμότητας (η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμό της διασπάται με απλές ρίζες) συμπεραίνουμε ότι η f είναι διαγωνίσιμη.

Κάθε ιδιοτιμή της f είναι ρίζα κάθε πολωνύμου που μηδενίζει την f , άρα ρίζα του $x(x-1)(x-3)$. Επομένως οι δυνατές ιδιοτιμές της f είναι $0, 1, 3$ (όχι απαραίτητα και οι τρεις μαζί).

Θέμα Β

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.

Αναπτύσσοντας το χαρακτηριστικό πολώνυμο ως προς την πρώτη στήλη (που έχει μόνο το στοιχείο 2 στην πρώτη θέση):

$$\det(A - xI) = (2-x) \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x)[(1-x)(3-x)+1] = (2-x)(x^2-4x+4) = -(x-2)^3.$$

Άρα η μοναδική ιδιοτιμή είναι $\lambda = 2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Εξετάζουμε τον ιδιόχωρο:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

πίνακας τάξης 1 (οι γραμμές 2, 3 είναι πολλαπλάσια της πρώτης), άρα ο πυρήνας έχει διάσταση 2. Μια βάση του ιδιόχωρου είναι

$$v_1 = (1, 0, 0)^t, \quad v_2 = (0, 1, 1)^t.$$

Συμπληρώνουμε σε βάση του $\mathbb{R}^3$ με ένα τρίτο διάνυσμα, π.χ. $v_3 = (0, 1, 0)^t$. Υπολογίζουμε

$$Av_3 = (1, 1, -1)^t = 1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 2 \cdot v_3,$$

ενώ $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = 2v_2$ αφού v_1, v_2 είναι ιδιοδιανύσματα.

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(οι στήλες της είναι τα v_1, v_2, v_3 , και $\det P = -1 \neq 0$ άρα είναι αντιστρέψιμος), παίρνουμε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

πίνακα άνω τριγωνικό, όπως ζητείται.

(Παρατήρηση: αφού η γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda = 2$ είναι 2, η κανονική μορφή Jordan του A αποτελείται από ένα block μεγέθους 2 και ένα block μεγέθους 1, δηλαδή $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.)

2 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο και $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

για κάθε $x, y \in V$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

1.5 μονάδα

(β) Αν W είναι υπόχωρος του V , να αποδειχθεί ότι $f(W^\perp) = f(W)^\perp$.

1.5 μονάδα

(α) Έστω $x \in \text{Ker} f$, δηλαδή $f(x) = 0$. Τότε

$$\langle x, x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0,$$

οπότε $x = 0$ αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο. Άρα $\text{Ker} f = \{0\}$ και η f είναι 1-1.

(β) Έστω $x \in W^\perp$ και $w \in W$. Τότε

$$\langle f(x), f(w) \rangle = \langle x, w \rangle = 0,$$

άρα $f(x) \perp f(w)$ για κάθε $w \in W$, δηλαδή $f(x) \in f(W)^\perp$. Αυτό δείχνει

$$f(W^\perp) \subseteq f(W)^\perp.$$

Για την ισότητα συγκρίνουμε διαστάσεις. Επειδή η f είναι 1-1,

$$\dim f(W^\perp) = \dim W^\perp = \dim V - \dim W,$$

και ομοίως $\dim f(W) = \dim W$, άρα

$$\dim f(W)^\perp = \dim V - \dim f(W) = \dim V - \dim W.$$

Άρα $\dim f(W^\perp) = \dim f(W)^\perp$, και σε συνδυασμό με τον εγκλεισμό παραπάνω, καταλήγουμε σε

$$f(W^\perp) = f(W)^\perp.$$

Θέμα Δ

(1) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Ερμητιανός πίνακας τέτοιος ώστε

$$A^2 = 0.$$

Να αποδειχθεί ότι $A = 0$.

1.5 μονάδα

Αφού ο A είναι ερμητιανός, $A^* = A$. Για κάθε $v \in \mathbb{C}^n$ υπολογίζουμε (με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$):

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = v^* A^* A v = v^* A^2 v = v^* \cdot 0 \cdot v = 0.$$

Άρα $Av = 0$ για κάθε $v \in \mathbb{C}^n$, δηλαδή $A = 0$.

(2) Έστω $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος πίνακας και έστω ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Να αποδειχθεί ότι

$$M^2 = I_n.$$

1.5 μονάδα

Αφού M είναι μοναδιαίος, $M^* M = M M^* = I$, άρα ο M είναι κανονικός (normal) πίνακας, οπότε διαγωνοποιείται από μοναδιαίο πίνακα: υπάρχει μοναδιαίος U και διαγώνιος $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ με $M = U D U^*$.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i με ιδιοδιάνυσμα $v \neq 0$ έχουμε $Mv = \lambda_i v$, και αφού ο M είναι μοναδιαίος διατηρεί το μήκος:

$$\|v\| = \|Mv\| = |\lambda_i| \|v\| \Rightarrow |\lambda_i| = 1.$$

Από την υπόθεση οι λ_i είναι πραγματικοί, άρα $\lambda_i \in \{1, -1\}$ για κάθε i , οπότε $\lambda_i^2 = 1$.

Επομένως

$$M^2 = U D^2 U^* = U \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) U^* = U I U^* = I_n.$$

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα 45 λεπτά