

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια των ακόλουθων ακολουθιών και να δώσετε αιτιολόγηση για τους υπολογισμούς:

$$(\alpha') \frac{n}{n^2 + 3} + \sqrt[n]{n}$$

$$(\beta') \frac{n+1}{2n+5}$$

$$(\gamma') \frac{n^3 + 3n^2 + 5}{n^2 + 2}$$

$$(\delta') \frac{35n^7 + 1}{71n^7 + 5n^6 + 1}$$

$$(\epsilon') \frac{\sqrt[3]{n^2 + n + n}}{\sqrt[4]{2n^4 + 1} + \sqrt{n}}$$

$$(\zeta') \frac{\sqrt{n^3 + 2n^4 + 1} - n}{-2n^2 + \sqrt[3]{n^2 + 3}}$$

$$(\eta') \frac{(1 + 2\sqrt{n})\sqrt{n} + 1}{n + \sqrt[3]{n}}$$

$$(\theta') \frac{\sqrt[3]{1 - 27n^3}}{1 + 4n}$$

$$(\iota') \frac{n((-1)^n + \sqrt{n})}{2 + \sqrt{n^3 + 1}}$$

$$(\kappa') \frac{n\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n^2 + (-1)^n n}$$

$$(\lambda') \frac{2n \cdot e^{1/n}}{(-1)^n + \sqrt{n^2 + 5}}$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια των ακόλουθων ακολουθιών:

$$(\alpha') \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^n$$

$$(\beta') \left(\frac{4^n - 5}{4^n + 3} \right)^{2n}$$

$$(\gamma') \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{n+1}$$

$$(\delta') \left(\frac{n+2}{5+5n} \right)^n$$

$$(\epsilon') \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^n$$

$$(\zeta') \left(3 - \frac{2n+1}{n} \right)^{4n-2}$$

$$(\eta') \left(\frac{2n+5}{2n+1} \right)^{n+4}$$

$$(\theta') \left(\frac{n^2 + 3}{2n^2 + 1} \right)^n e^{\arctan(n)}.$$

3. Να υπολογίσετε τα όρια των ακόλουθων ακολουθιών και να αιτιολογήσετε τους υπολογισμούς:

$$(\alpha') \frac{3^n \sin(2^{3n} + 1)}{2^{3n} + 1}$$

$$(\beta') \frac{1}{n} \cos(n+1) \log(n)$$

$$(\gamma') \frac{n^2 + 3}{n\sqrt{n^3 + 2}} \cdot \cos(\sqrt{n^3 + 2})$$

$$(\delta') \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$$

$$(\epsilon') \sqrt[n]{n^2 e^{-n}} - \left(\frac{n^4}{n^4 + 1} \right)^{n^4}$$

$$(\zeta') \frac{n \sin n}{2^n \sqrt{5n^3 + 1}}$$

$$(\eta') \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

$$(\theta') \left(\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{n}{3} \right) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\iota') \frac{3^n - 5}{5^n + 3}$$

4. Να υπολογίσετε τα όρια των ακόλουθων ακολουθιών και να δώσετε σαφή αιτιολόγηση για κάθε υπολογισμό:

$$(\alpha') a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(n)}{n^2 + 3k^2}$$

$$(\beta') b_n = \sum_{k=1}^n \frac{5n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

$$(\gamma') c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{n^4 + k}}$$

5. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

$$(\alpha') a_n = n + \frac{1}{2n} - \sqrt{n^2 + 1} \text{ και}$$

$$(\beta') b_n = (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) \cdot \cos^2(n)$$

και να δώσετε σαφή αιτιολόγηση της απάντησής σας.

6. Να εξετάσετε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(\alpha') \text{ Να δειχθεί με επαγωγή ότι } 0 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(\beta') \text{ Να δειχθεί ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.}$$

$$(\gamma') \text{ Να δειχθεί ότι η ακολουθία συγκλίνει.}$$

$$(\delta') \text{ Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας.}$$

7. Να εξετάσετε την ακολουθία

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(α') Να δειχθεί με επαγωγή ότι $\sqrt{2} \leq a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(β') Να δειχθεί με επαγωγή ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα.

(γ') Να δειχθεί ότι υπάρχει $a \leq 2$ τέτοιο ώστε $a_n \rightarrow a$.

8. Έστω $a \in \mathbb{R}$ θετικός αριθμός. Να εξετάσετε την ακολουθία πραγματικών αριθμών που ορίζεται αναδρομικά

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ

1. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και να βρεθούν τα αθροίσματά τους:

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$.

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+3) - \arctan(n))$.

(γ') $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}} \right)$.

(δ') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\arctan(n)} - \frac{1}{\arctan(n+1)} \right)$.

(ε') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{3n-2}} \right)$.

(ζ') $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{3^n \cdot 7^n}$.

(η') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{n-1}} - \frac{2}{5^n} + \frac{3}{6^{n+1}} \right)$.

(θ') $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n) \log(n+2)}$.

2. Να δειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\pi^n} \right)$$

συγκλίνει και να βρεθεί το άθροισμά της, γνωρίζοντας ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Να γραφούν οι παρακάτω περιοδικοί δεκαδικοί ως κλάσματα:

(α') Να δείξετε με επαγωγή ότι $x_n > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β') Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα.

(γ') Να δείξετε ότι η ακολουθία συγκλίνει και να προσδιορίσετε το όριο της.

9. Να εξετάσετε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(α') Να δείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $0 < u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(β') Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.

(γ') Να δείξετε ότι η ακολουθία συγκλίνει.

(δ') Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας.

(α') $0, \bar{5}$.

(β') $0, \overline{34}$.

(γ') $1, \overline{345}$.

(δ') $0, 324101$.

4. Να ελεγχθεί η σύγκλιση της παρακάτω σειράς με κριτήριο σύγκρισης:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^5 + 2n + 1}.$$

5. Να μελετηθεί η σύγκλιση των παρακάτω σειρών:

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$.

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{e^n + e^{-n}}$.

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(3n)}$.

(δ') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$.

(ε') $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{e^{2n+1}}$.

(ζ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+1}}$.

6. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο λόγου (κριτήριο d'Alembert) για να καθορίσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n}{4^n 3^n + 1}$$

$$(\gamma') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{n! (n+1)!}$$

$$(\delta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}$$

$$(\epsilon') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n \sqrt{3n+2}}$$

$$(\zeta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n!}{n! + n^n}$$

$$(\eta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! + 2^n}$$

$$(\theta') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! + 3n}{(n+1)!^2}$$

7. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο ρίζας (κριτήριο Cauchy) για να καθορίσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

$$(\alpha') \sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

$$(\beta') \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

$$(\gamma') \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$$

$$(\delta') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$(\epsilon') \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + (-1)^n \frac{n}{4n+1}\right)^n$$

$$(\zeta') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{3n^2}\right)^n$$

8. Να ελέγξετε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι ακόλουθες σειρές. Αν υπάρχει σύγκλιση, να αναφέρετε αν είναι υπό συνθήκη ή απόλυτη:

to be continued....

$$(\alpha') \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^n)}$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^5} + 1} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)$$

$$(\gamma') \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$(\delta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) + 2^n}{n + 5^n}$$

$$(\epsilon') \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{n+1}}{n^n}$$

$$(\zeta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{n}$$

$$(\eta') \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$(\theta') \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{n})^n$$

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - (-1)^n n^2}$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n + 4}{n + 4^n} + \left(\frac{3}{n+2}\right)^{2n}\right)$$

$$(\gamma') \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(\delta') \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^3}$$

$$(\epsilon') \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+2} \frac{1}{x^2} dx$$

$$(\zeta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n+1}}$$

$$(\eta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$(\theta') \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$