

Περιγραφές θεμάτων

• Brascamp-Lieb inequalities

Η ανισότητα Loomis-Whitney μάς λέει πώς μπορούμε να ελέγξουμε τον όγκο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ σε σχέση με τους όγκους των προβολών του σε υποχώρους $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_m}$ του \mathbb{R}^n , οι οποίοι παράγουν τον \mathbb{R}^n . Οι ανισότητες Brascamp-Lieb είναι (ιδιαίτερα γενικές!) γενικεύσεις της Loomis-Whitney, αλλά για πιο γενικές συναρτήσεις αντί απλά για χαρακτηριστικές συνόλων. Πολλές γνωστές ανισότητες είναι ειδικές περιπτώσεις ανισοτήτων Brascamp-Lieb, όπως η ανισότητα Hölder και η ανισότητα Young. Γι'αυτό το λόγο οι ανισότητες Brascamp-Lieb είναι πολύ σημαντικές σε διάφορους κλάδους της ανάλυσης.

Συγκεκριμένα, έστω $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_m}$ υποχώροι του \mathbb{R}^n , και έστω γραμμικές επί απεικονίσεις $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}, \dots, \pi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$. Μία ανισότητα Brascamp-Lieb είναι οποιαδήποτε ανισότητα της μορφής

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j \circ \pi_j(x) dx \leq C \cdot \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}, \quad \text{για κάθε } f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow [0, +\infty), \dots, f_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow [0, +\infty),$$

για κάποιους εκθέτες $p_1, \dots, p_m \in [1, +\infty]$, όταν η πολλαπλασιαστική σταθερά C είναι εφικτό να είναι πεπερασμένη (καθώς για $C = +\infty$ η ανισότητα είναι τετριμμένη και ανούσια).

Ο στόχος αυτού του project είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 του συνημμένου άρθρου των Bennett, Carbery, Christ, Tao, που δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη να είναι αυτή η σταθερά C πεπερασμένη.

• Discrete analogues of the Kakeya and Furstenberg problems.

Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται σύνολο Kakeya αν περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση. Γενικεύοντας αυτό τον ορισμό, λέμε ότι το K είναι σύνολο Furstenberg (με παράμετρο α) αν σε κάθε κατεύθυνση υπάρχει μία γραμμή στον \mathbb{R}^n , ώστε ένα υποσύνολο της γραμμής με διάσταση Hausdorff α να περιέχεται στο K . Στο συνημμένο άρθρο, ο R. Zhang δημιουργεί και λύνει διακριτά ανάλογα αυτών των προβλημάτων στον \mathbb{R}^n . Στην περίπτωση των συνόλων Kakeya, κοιτάει μεγιστικά σύνολα από N^{-1} -διαχωρισμένες γραμμές, και τοποθετεί N σημεία σε κάθε γραμμή - και δείχνει ότι η ένωση των σημείων συνολικά είναι μεγάλη. Στην περίπτωση των συνόλων Furstenberg, θεωρεί παρόμοια σύνολα γραμμών, αλλά σε κάθε μία τοποθετεί N^α σημεία - και δείχνει πάλι ότι η ένωση είναι (κατάλληλα) μεγάλη.

Η απόδειξη γίνεται με αλγεβρική μέθοδο, που θυμίζει αυτή του Dvir. Η ουσιαστική διαφορά είναι πως το ρόλο του λήμματος Schwartz-Zippel (το οποίο έχει ουσιαστικό νόημα μόνο σε πεπερασμένα σώματα) τον παίρνει τώρα το Θεώρημα του Wongkew, το οποίο λέει πως οι περιοχές μίας αλγεβρικής επιφάνειας μέσα σε μία μπάλα δεν μπορούν να είναι πολύ μεγάλες (και γίνονται μέγιστες σε όγκο αν η επιφάνεια είναι ένωση παράλληλων υπερεπιπέδων, όπως και στο λήμμα των Schwartz-Zippel).

Ο στόχος του project είναι η απόδειξη αυτών των δύο θεωρημάτων (Θεώρημα 1.10 στο συνημμένο άρθρο). Αυτή η λύση έχει να κάνει πλέον με συνδυαστική και απλές αλγεβρικές μεθόδους, όχι με αρμονική ανάλυση.

• **Falconer’s distance set conjecture.**

Το project αυτό είναι αρκετά φιλόδοξο - ο στόχος του είναι η κατανόηση του πώς ένα πρόβλημα γεωμετρικής θεωρίας μέτρου μπορεί να σχετίζεται με αρμονική ανάλυση. Εδώ συγκεκριμένα εστιάζουμε στην εξής εικασία του Falconer:

Έστω $n \geq 2$, και έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\dim_H E < \frac{n}{2}$ (δηλαδή, το E έχει διάσταση Hausdorff αυστηρά μεγαλύτερη της μισής του χώρου \mathbb{R}^n στον οποίο ζει, και άρα είναι αρκετά μεγάλο). Τότε, θα πρέπει να ισχύει ότι το σύνολο

$$\Delta(E) := \{|x - y| : x, y \in E\}$$

(το σύνολο των διαφορετικών αποστάσεων που ορίζει το E , και το οποίο είναι υποσύνολο του \mathbb{R}) έχει θετικό μέτρο Lebesgue.

Η εικασία του Falconer είναι ανοιχτή σε όλες τις διαστάσεις. Πρώτος ο Falconer έδειξε ότι η εικασία ισχύει αν $\dim_H E > \frac{n+1}{2}$, και έχει ακολουθήσει ιδιαίτερη πρόοδος τα τελευταία χρόνια, χάρη στην εισαγωγή του polynomial method σε αρμονική ανάλυση.

Σε αυτό το project μπορούν να παρουσιαστούν κάποια προκαταρκτικά, σχετικά με το πώς προσεγγίζεται αυτό το ερώτημα μέσω αρμονικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα:

1. Energy integrals και πώς σχετίζονται με διάσταση Hausdorff. Αυτά υπάρχουν στις σημειώσεις του Wolff (Proposition 8.2, Lemma 8.3, Proposition 8.4).
2. Energy integrals και πώς σχετίζονται με αρμονική ανάλυση (σημειώσεις Wolff, Proposition 8.5, Corollary 8.7).
3. Εφαρμογή: Marstrand’s projection theorem (σημειώσεις Wolff, Theorem 8.8).
4. Εφαρμογή: Η απόδειξη του θεωρήματος του Falconer (δηλαδή της εικασίας του όταν $\dim_H E > \frac{n+1}{2}$ - Θεώρημα 4.6 στο συνημμένο βιβλίο του Mattila, Fourier analysis and Hausdorff dimension).
5. Εφαρμογή για όσους θέλουν να ‘ξεφύγουν’ σε δύσκολα (πχ αν θέλει κάποιος να παραδώσει εργασία το Σεπτέμβριο): Ενότητα 15.2 του βιβλίου του Mattila, η οποία συσχετίζει όσο καλύτερα ξέρουμε την εικασία του Falconer με αρμονική ανάλυση, μέσω της ποσότητας $\sigma(\mu)(r)$ που εμφανίζεται στην αρχή της ενότητας 15.2. Ο στόχος είναι η απόδειξη του Proposition 15.3 (δηλαδή η κατανόηση όλης της ενότητας 15.2). Αν κάποιος θέλει να εστιάσει εδώ, δε χρειάζεται να ασχοληθεί με το παραπάνω κομμάτι σχετικά με το θεώρημα του Marstrand.

• **Maximal functions**

Για αυτό το project υπάρχουν οι εξής δύο επιλογές:

1. Επιλογή 1.

- (i) Μελέτη της Hardy-Littlewood maximal function και του θεωρήματος διαφορίσισης του Lebesgue (σελίδες 4-12 στο βιβλίο του Stein (Singular integrals and differentiability of functions), και
- (ii) Μελέτη της σφαιρικής maximal function του Stein (από το συνημμένο άρθρο του Stein).

Ορίζουμε δύο μεγιστικούς τελεστές M και \mathcal{M} , που δρουν πάνω σε συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, και επιστρέφουν συναρτήσεις $Mf, \mathcal{M}f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, ως εξής:

Για κάθε $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{B(x,r)} \cdot \int_{B(x,r)} |f|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

το supremum των μέσων όρων της $|f|$ σε όλες τις μπάλες με κέντρο x , και

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{t>0} \int_{y \in S^{n-1}} |f(x-ty)| d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

το supremum των μέσων όρων της $|f|$ σε όλες τις σφαίρες με κέντρο x (εδώ το $d\sigma$ είναι το επιφανειακό μέτρο της μοναδιαίας σφαίρας S^{n-1} , το οποίο είναι απλώς πολλαπλάσιο του $(n-1)$ -διάστατου μέτρου Hausdorff H^{n-1}).

Ο τελεστής M είναι η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood, οι οποίοι μελέτησαν για ποιά p είναι L^p -φραγμένη. Ο τελεστής \mathcal{M} είναι η σφαιρική μεγιστική συνάρτηση του Stein, ο οποίος μελέτησε για ποιά p είναι L^p -φραγμένη για διαστάσεις $n \geq 3$. Η πρώτη (και μάλλον πιο λογική) επιλογή για project είναι η απόδειξη αυτών των θεωρημάτων. Τέτοιου τύπου θεωρήματα έχουν πολλές εφαρμογές, και μία είναι το θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue, (η απόδειξη του οποίου επίσης θα ήταν καλό να μπει στο project).

- ## 2. Επιλογή 2. Μελέτη της circular maximal function του Wolff. Αυτή είναι ένας τελεστής M^δ , που παίρνει κάθε $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και τη στέλνει στη συνάρτηση $M^\delta f : [1, 2] \rightarrow [0, +\infty]$, με

$$M^\delta f(r) := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{|C^\delta(x,r)|} \cdot \int_{C^\delta(x,r)} |f|, \quad r \in [1, 2],$$

όπου $C^\delta(x,r)$ είναι η δ -περιοχή του κύκλου με κέντρο x και ακτίνα r . Δηλαδή, η τιμή της μεγιστικής συνάρτησης σε μία ακτίνα r είναι το supremum των μέσων όρων της $|f|$ πάνω σε όλους αυτούς τους δακτυλίους (με εσωτερική ακτίνα r και πάχος δ φιξαρισμένα, αλλά οποιοδήποτε κέντρο στον \mathbb{R}^2). Ο Wolff έδειξε ότι ο M^δ είναι L^3 -φραγμένος. Το συνημμένο άρθρο του Zahl δίνει μία νέα λύση για το ίδιο πρόβλημα (Θεώρημα 1), με μία μοντέρνα πολυωνυμική μέθοδο, που λέγεται polynomial partitioning. Ο στόχος του project αυτού είναι να αποδειχθεί αυτό το Θεώρημα 1 με αυτή την τεχνική (στην ειδική περίπτωση κύκλων, όχι γενικότερων καμπυλών). Το polynomial partitioning θα το δούμε αργότερα στο μάθημα, και το άρθρο είναι απαιτητικό. Επομένως αυτή η επιλογή θα ήταν λογική για κάποιον που θέλει να υποβάλει κάτι δύσκολο το Σεπτέμβριο.

• Simple proofs using the polynomial method

Στόχος αυτού του project είναι η απόδειξη της λύσης τριών προβλημάτων (δύο συνδυαστικής και ενός γεωμετρικής θεωρίας μέτρου) χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική μέθοδο του Dvir (δηλαδή εκείνο το λήμμα που λέει ότι για οποιαδήποτε σημεία στο χώρο, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο χαμηλού βαθμού που μηδενίζεται σε αυτά - και μία φυσιολογική επέκτασή του σε χωρία του \mathbb{R}^n , αντί για σημεία). Τα προβλήματα είναι τα εξής:

1. Το πρόβλημα των joints (λύση του Quilodrán από το 2009): Έστω \mathcal{L} συλλογή από L γραμμές στον \mathbb{R}^n . Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *joint* αυτής της συλλογής γραμμών αν από το x περνούν τουλάχιστον n από τις γραμμές της \mathcal{L} με γραμμικά ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Έστω $J(\mathcal{L})$ το σύνολο των joints της \mathcal{L} . Το πρόβλημα, ανοιχτό από τη δεκαετία του 1980 (στο πλαίσιο της θεωρίας αριθμών) ήταν ναδειχθεί ότι

$$\#J(\mathcal{L}) \lesssim L^{\frac{n}{n-1}}.$$

Αυτό έδειξε στο συνημμένο άρθρο (ενότητα 2) ο Quilodrán το 2009, χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική μέθοδο του Dvir. Η απόδειξη ήταν ιδιαίτερα απλή, σε σχέση με το πόσα χρόνια ήταν ανοιχτό το πρόβλημα. Το πρόβλημα των joints μάλιστα είχε ήδη παρατηρηθεί ότι είναι διακριτό ανάλογο της *Keakeya maximal operator conjecture* (δεν είναι εντελώς προφανές, αλλά παρατηρήστε τον ίδιο μαγικό εκθέτη, $\frac{n}{n-1}$).

Στο project δε χρειάζεται να μπει η ενότητα που ασχολείται με αλγεβρικές καμπύλες αντί για γραμμές (καθώς αυτό είναι απλώς γενίκευση).

2. Μία απλή μορφή του *multilinear Keakeya problem*, η οποία (με την απόδειξή της) είναι στις ενότητες 2 & 3 του συνημμένου άρθρου του Guth. Και το ερώτημα και η απόδειξη μοιάζουν πολύ με αυτή του Quilodrán για τα joints (είναι σα γενικεύσεις αυτών, αλλά για κυβάρια αντί για σημεία).
3. Το πρόβλημα του σε πόσα σημεία μπορούν να συναντιούνται εφαπτομενικά κύκλοι του \mathbb{R}^2 . Η απόδειξη που μάς ενδιαφέρει βρίσκεται στην ενότητα 1.4 (σελίδα 5) του συνημμένου άρθρου των Ellenberg, Solymosi, Zahl. Είναι πολύ έξυπνη απόδειξη: υψώνει τους κύκλους σε κατάλληλες καμπύλες σε 3 διαστάσεις, και τα σημεία όπου αρχικά εφάπτονται γίνονται σημεία τομής αυτών των καμπυλών στον \mathbb{R}^3 . Μετά, αυτά τα σημεία τα μετρούν με την πολυωνυμική μέθοδο του Dvir.

(Το υπόλοιπο άρθρο είναι για πιο γενικές αλγεβρικές καμπύλες, κάτι το οποίο επίσης δε χρειάζεται να μπει στο project, εκτός φυσικά αν το επιθυμείτε.)

• Singular integrals - the Calderón-Zygmund theory

Ο στόχος αυτού του project είναι η κατανόηση της θεωρίας που ανέπτυξαν οι Calderón και Zygmund για τη μελέτη τελεστών της μορφής $f \mapsto K * f$, όπου ο (λεγόμενος) πυρήνας K είναι πιθανόν τεράστιος

κοντά στο 0 (και ως εκ τούτου το ολοκλήρωμα $\int K(x-y)f(y) dy$ μπορεί να φέρεται πολύ περιέργα κοντά στη 'διαγώνιο' $x = y$).

Ο στόχος αυτού του project είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 1 στο Κεφάλαιο 2 του συνημμένου βιβλίου του Stein (Singular integrals and differentiability properties of functions). Κάπου χρειάζεται μέρος της θεωρίας του Κεφαλαίου 1 (αυτό αναφέρεται ξεκάθαρα στην απόδειξη του θεωρήματος).

Από εκεί και πέρα, το project μπορεί να διανθιστεί με τα περισσότερα θέματα που περιέχονται στο Κεφάλαιο 2, ή προσθέτοντας για παράδειγμα τη μελέτη της Hardy-Littlewood maximal function από το Κεφάλαιο 1.

• **The Mizohata-Takeuchi conjecture - a counterexample**

Ίσως το σημαντικότερο ανοιχτό πρόβλημα στην αρμονική ανάλυση σήμερα είναι το Fourier restriction conjecture (το οποίο θα δούμε στο μάθημα σύντομα). Έστω $n \geq 2$, $B^{n-1}(0, 1)$ η μοναδιαία μπάλα κέντρου 0 στον $\mathbb{R}^{n-1} \cdot \{0\}$, και έστω Σ το παραβολοειδές

$$\Sigma := \{(x, |x|^2) : x \in B^{n-1}(0, 1)\}.$$

Συμβολίζουμε με $d\sigma$ το επιφανειακό μέτρο Lebesgue πάνω στο Σ (με άλλα λόγια, το μέτρο Hausdorff H^{n-1} , περιορισμένο πάνω στο Σ). Ο τελεστής Fourier extension ορίζεται ως ο τελεστής E που παίρνει κάθε (κατάλληλη) $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ και τη στέλνει στη συνάρτηση

$$Ef(x) := \int_{\xi \in \Sigma} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\sigma(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Με άλλα λόγια, ο Ef είναι απλώς ο μετασχηματισμός Fourier της f , για f που ορίζεται όμως στην καμπυλωτή επιφάνεια Σ . Η εικασία Fourier restriction ισχυρίζεται ότι ο E είναι L^p -φραγμένος για κατάλληλα p αρκετά μεγαλύτερα από 2. Η εικασία Mizohata-Takeuchi ισχυρίζεται (ή ισχυριζόταν!) ότι μπορούμε να καταλάβουμε κάτι και για το σχήμα των level sets του Ef , και συγκεκριμένα ότι υπάρχει συσσώρευση αυτών σε κάποιες γραμμές. Συγκεκριμένα, η εικασία έλεγε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Ef|^2 w \leq \left(\sup_{\ell} \int_{\ell} w \right) \cdot \int |f|^2,$$

για κάθε $f \in L^2(\Sigma)$ και για κάθε βάρος $w : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, όπου το supremum λαμβάνεται πάνω από όλες τις γραμμές ℓ μέσα στον \mathbb{R}^n .

Πέρυσι, η 17χρονη Cairo έδειξε ότι η εικασία αυτή είναι λανθασμένη: για κάθε $R > 1$, υπάρχουν παραδείγματα από f και w ώστε στην μπάλα $B(0, R)$ να ισχύει ότι

$$\int_{B(0, R)} |Ef|^2 w \sim \log R \cdot \left(\sup_{\ell} \int_{\ell} w \right) \cdot \int |f|^2.$$

Η απόδειξη είναι αναπάντεχα απλή, καθώς το πρόβλημα μετατρέπεται από την αρχή σε ένα συνδυαστικό πρόβλημα που έχει να κάνει με συνελίξεις χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Ο στόχος αυτού του project είναι η απόδειξη του παραπάνω ειδικά για $n = 2$ (άλλωστε εκεί είναι όλη η ουσία της ιδέας). Η απόδειξη είναι στην ενότητα 3 του συνημμένου άρθρου. Χρειάζεται και η απόδειξη του συνδυαστικού Λήμματος 3.5 για $n = 2$, που βρίσκεται στην ενότητα 4.

- **The multilinear Kakeya inequality**

Ο στόχος εδώ είναι η απόδειξη της διάσημης ανισότητας multilinear Kakeya σε κάθε μπάλα ακτίνας R , με μία μικρή απώλεια λογαριθμικής τάξης (συννημμένο άρθρο). Η ανισότητα αυτή ελέγχει το πόσο τέμνονται μεταξύ τους κύλινδροι από διαφορετικές οικογένειες $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_n$ στον \mathbb{R}^n , όπου οι κύλινδροι της κάθε οικογένειας \mathbb{T}_j έχουν κατεύθυνση 'περίπου' e_j . Η ανισότητα multilinear Kakeya είναι μία γενίκευση της ανισότητας Loomis-Whitney, και αποδεικνύεται ξεκινώντας από τη Loomis-Whitney και κάνοντας επαγωγή στην ακτίνα. Αυτό το είδος επαγωγής (induction on scales) χρησιμοποιείται κατά κόρον στην αρμονική ανάλυση και τη γεωμετρική θεωρία μέτρου.

- **Incidence estimates for well-spaced tubes.**

Ο στόχος εδώ είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 στο paper Incidence estimates for well-spaced tubes των Guth, Solomon, Young. Το θεώρημα λέει πως όταν κύλινδροι σε 2 διαστάσεις είναι κατάλληλα διαχωρισμένοι (ως προς τις γωνίες τους ή/και τις αποστάσεις τους), τότε σπάνια συναντιούνται. Το πολύ ενδιαφέρον σε αυτό το άρθρο είναι πως η απόδειξη γίνεται με αρμονική ανάλυση. Και το αποτέλεσμα έχει χρησιμοποιηθεί σε σημαντικά άλλα άρθρα σχετικά με εικασίες αρμονικής ανάλυσης (π.χ. local smoothing conjecture).