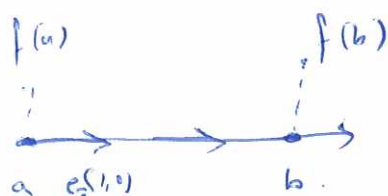


f παραγωγιστή. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b g(t) dt = - \int_b^a g(t) dt \quad \leadsto \text{προσαναζωδία σε } [a, b]$$



$$\partial [a, b] = \{a, b\}$$

$f(b) - f(a)$ $\leadsto$ κάτι σαν "ακρότητα" σε $\partial [a, b]$.

$\hookrightarrow$ ε δείχνει πως να πηγαίνω σε a
 προς τα εξω σε b .

$$\rightarrow \text{προαναζωδία} \quad \partial [a, b] = \{a\} \cup \{b\}$$

$\downarrow$
 $-$

$\downarrow$
 $+$

~~Σημείωση~~ ~~σε~~ ~~Τίτλος~~

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \Omega \text{ ανοικτό} \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής, παραγωγιστή

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

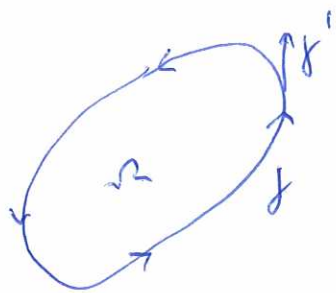
$$F_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy := \int_a^b F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt + F_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt$$

$$x = \gamma_1(t) \quad \leadsto \quad dx = \gamma_1'(t) dt, \quad dy = \gamma_2'(t) dt$$

Th. Green : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ andu kōsmu kōsmu

κα $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτή με $\partial\Omega = \gamma$ (ώστε $f'(t)$
να έχει το $\text{Int}\Omega$
ως οριζόντιο χωρ.)



Τότε
$$\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

• Παρατηρήσεις

$\int_a^b f(t) dt$ (1-dim)
 $\iint_{\Omega} G(x, y) dx dy$ (2-dim)
 $\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy$ (1-dim)
 $f(b) - f(a)$ (0-dim)

Ερώτηση: Τι είναι αυτό που
οδηγεί στην κάθε φάση; $\rightarrow$ συνδυασμός $dt, dx, dy, dx dy$
και ορίσματος και
οδηγεί στην απάντηση

Απάντηση

$$\oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b F_1(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'_1(t)}_{=dx} dt + F_2(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'_2(t)}_{=dy} dt$$

$$dx(\gamma'_1(t)) = \gamma'_1(t)$$

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad dy = \gamma'_2(t) dt$$

dx "Σταθμισμένο" $\rightarrow (F_1 dx + F_2 dy)(\gamma'_1(t)) \in \mathbb{R}$.
 dy $\rightarrow$ Λ, παρὰ ἐφ. διαύγου καὶ
 δίνει τοὺς (κατασκευαστικούς)

U, diffeomorphisms

Ja odobruwvovv

$$\int_M \omega$$

ω k. diag. fuppen

M xwvov Siavvovv
 K .

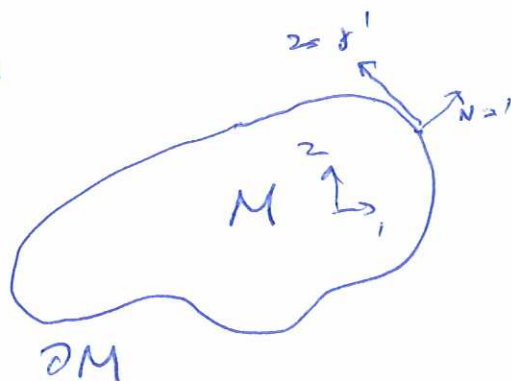
→ av given ovov : ω k-fuppen ~~$\in \mathcal{L}(M)$~~

d. Siavv vevvovv dv k+1 fuppen

Stokes

$$\int_M dw = \int_{\partial M} (\omega) \rightarrow k$$

$\nwarrow$ $\downarrow$ $\searrow$
 $k+1$ $k+1$ k



→ Ja navvov pōvov o 'neovavvovvovv' vov ∂M .

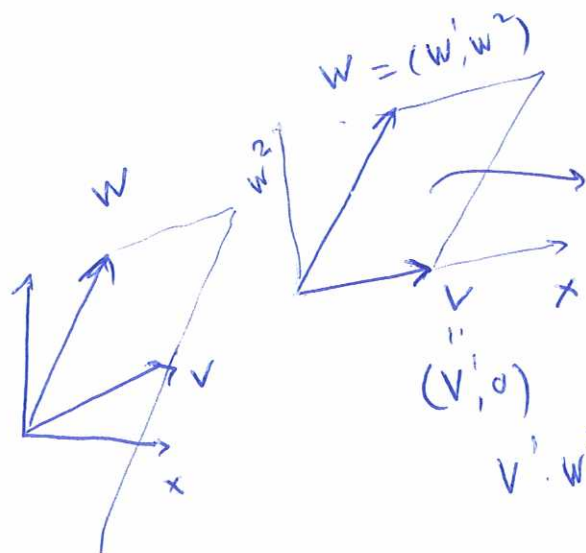
L, Ja vovvov v vevvov vovv.

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy \rightarrow dw = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$\downarrow$
v v v v v v v v

$$(dx \wedge dy)(v, w) = \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{pmatrix}$$

$$V = (v^1, \dots, v^2), \quad W = (w^1, w^2)$$



$$\begin{aligned} \text{Eupvov} &= \left| \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= |v^1 w^2 - v^2 w^1| \\ &\downarrow \\ &\text{πvovvov} \\ &= \text{neovavvovvovv} \end{aligned}$$

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

1-φορικός

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \dots + \omega_n dx^n$$

2-φορικός

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{\text{n επιπλέον όρους στον } \mathbb{R}^2}$$

n-φορικός

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

$$df = 0$$

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

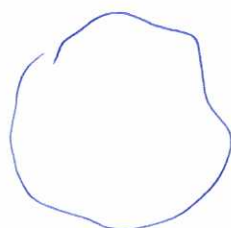
$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \nabla f = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \text{ στο } \Omega \end{aligned}$$

f 0-φορικός

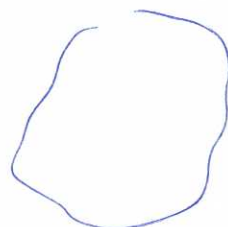
$\hookrightarrow$ Τοπικά διαδεσμι συνάρτησεις



Ω_1



Ω_2



Ω_3

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

Πότε, διαφορετικές τοπικά διαδεσμι συνάρτησεις υπάρχουν στο Ω ;

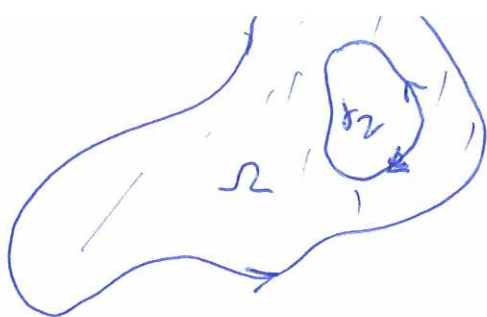
$$f(x) = \begin{cases} c_1 & x \in \Omega_1 \\ c_2 & x \in \Omega_2 \\ c_3 & x \in \Omega_3 \end{cases}$$

3 συνεπτικές συνιστώσες

Τοπολογική πάλη

3

$$\hookrightarrow H^0(\Omega) = \text{όλες τοπικά διαδεσμι συνάρτησεις στο } \Omega \approx \mathbb{R}$$



$$F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

γ_1

$$\hookrightarrow \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

"

$$\int_{\gamma_1} \underbrace{F_1 dx + F_2 dy}_{\omega} + \int_{-\gamma_2} \underbrace{F_1 dx + F_2 dy}_{\omega} = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$



Σημείωση αν

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

και $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^∞ ομοτόπια κομμάτι

$$f_s(t) = f(s,t)$$

~~Σημείωση~~



$$\int_{\gamma_1} \omega = \text{αριθμός}$$

$$\rightarrow w = F_1 dx + F_2 dy \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

$$L \rightarrow \int_{\gamma} w \quad \text{"τοπικά συνθετότητα" } \rightarrow \text{αποτελεί σε } C^{\infty} \text{ διαφορίσιμες μορφές}$$

L , ~~πρόβλημα~~ ~~συνθετότητα~~ 1 -φορμή w "τοπικά συνθετότητα"

$$\text{υπόθεσιν;} \Leftrightarrow dw = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

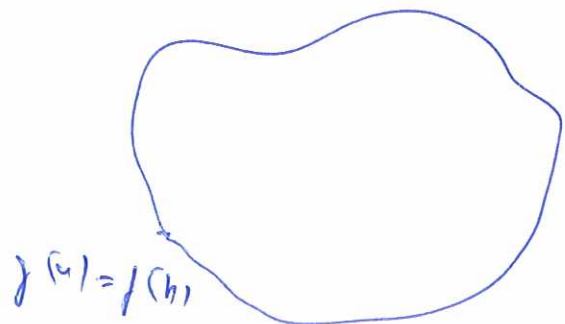
$$\underline{\underline{dw = 0}}$$

Παράδειγμα: Αν $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Rightarrow dw = 0$$

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$



$$\int_{\gamma} w = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\Rightarrow H(\omega) =$$

$$\{\omega = df\}$$

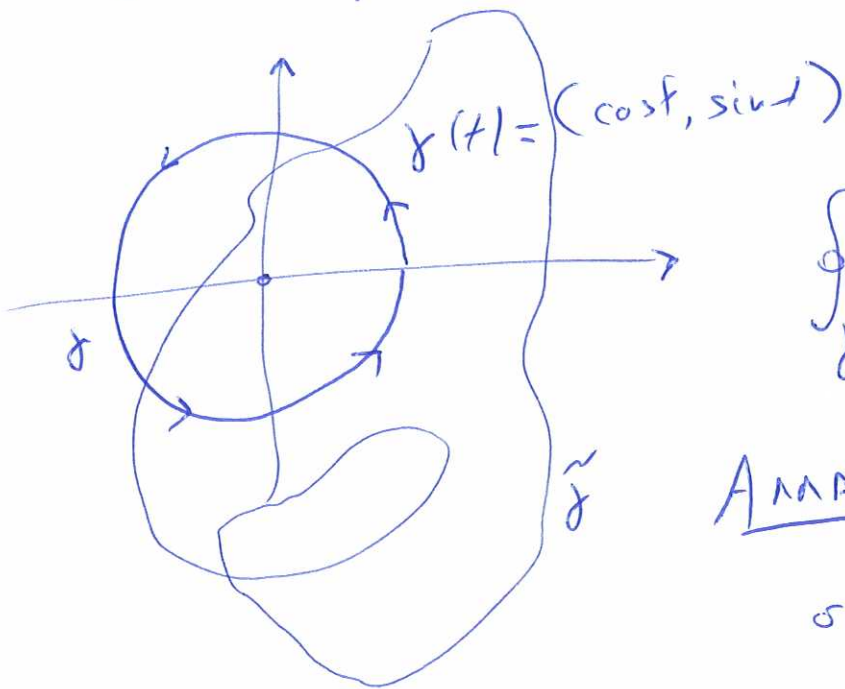
zon. def. odokd. (7)
Korai pines mofnudu
(4x1 2824/1519
0140)

Rechtsfeld

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\omega = \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{F_1} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{F_2} dy$$

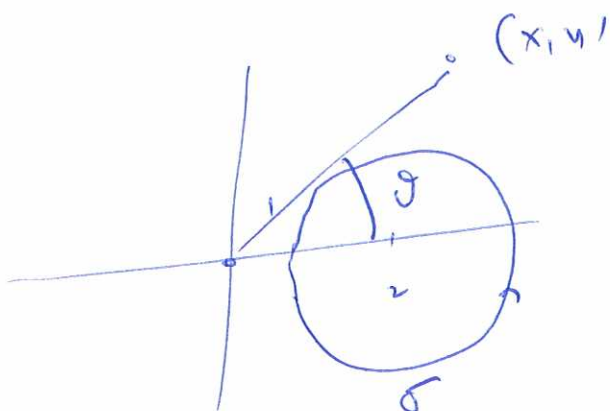
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad (d\omega = 0)$$



$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

Lemma: ev $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\sigma(t) = (\cos t + 2, \sin t)$$



$$\int_{\sigma} \omega = 0$$

flori: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \omega = d\theta$$

Ορισμός (Τοπολογική η.λ/η). Το η.λ/η M^n διάστασης $n \geq 0$ είναι ένας τοπολογικός χώρος με τις εξής ιδιότητες,

(Hausdorff)
! Δευτέρα απεικόνιση

$\forall x \in M \exists$ ανοικτό $U \subseteq M, x \in U$

και ομοιομορφία $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi(U)$ ανοικτό

(U, φ) ονομάζεται χάρτης της M γύρω από το x .

Συμβολισμός: (U, φ) χάρτης, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

$x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ συντεταγμένες (ή συνιστώσες συντεταγμένων)

x^i συνεχείς: $x^i = p_{r_i} \circ \varphi$. $p_{r_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u^1, \dots, u^n) \mapsto u^i$

Αξιοτήτων $A = \{(U_i, \varphi_i), i \in I, \text{χάρτες}\}$ ώστε $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

M τοπ. η.λ/η $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

Έχει νόημα να πούμε ότι αν f είναι λεία (C^∞);

Γενικό όρι: Θα μπορούσατε να ορίσετε f λεία

αν $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ λεία, $\forall (U, \varphi)$ χάρτη της M

Όπως: $M = \mathbb{R}$ $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^3$ $(\mathbb{R}, \varphi), (\mathbb{R}, \psi)$ χάρτες

$f(x) = x$ συνεχής $f \circ \varphi^{-1}(x) = x$, $f \circ \psi^{-1}(x) = x^{1/3}$
 ∞ ∞

ΟΙ ΔΥΟ ΧΑΡΤΕΣ ΔΕΝ ΣΥΜΦΩΝΟΥΝ ΣΤΟ ΑΝ Η f ΕΙΝΑΙ ΛΕΙΑ

συνθέσεις

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1} &= f \circ \psi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \\ &= f \circ \psi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

~~Αν $f \in A$ τότε $f \in A$~~

$$\text{Αν } \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

$$C^\infty, 1-1, \text{ επι, } (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} \in C^\infty$$

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} \text{ αλγεβρικός}$$

$$\text{τοτε } f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$$

$$\Leftrightarrow f \circ \psi^{-1} \in C^\infty$$

Μ καν. πολ/κα : Ένας άρδανος X του M λέγεται

~~συνθετός~~ διαφορίσιμος αν $\forall (u, \varphi), (v, \psi) \in X$ τέ $u \cap v \neq \emptyset$

και $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(u \cap v) \rightarrow \varphi(u \cap v)$ είναι αλγεβρικός
 $\hookrightarrow$ αντιστοιχία μεζέβαν

(M, X) λέγεται ~~συνθετός~~ διαφορίσιμη καν/κα διάταξη, η

αν M καν. πολ/κα διάταξη η και X σφαιρικός άρδανος
 X λέγεται διαφορίσιμη διαταξη

① Υπάρχουν καν. πολ/κα που δεν είναι κανένα σφαιρικός άρδανος

⊗ (Donaldson)

no Ορισμός : (M, X) διαφ. καν/κα- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται

$$C^\infty \text{ αν } \forall (u, \varphi) \in X \quad f \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$$

$$\text{Αν } \varphi = (x^1, \dots, x^n), \quad x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \hat{f}(u^1, \dots, u^n) \rightarrow \text{αναπαράσταση του } f \text{ σε συντεταγμένες}$$

$$\text{Μάλιστα να θυμόμαστε } f|_U(p) = \hat{f}(x^1(p), \dots, x^n(p))$$

(δλδ το ίδιο αλφάδο για τον f και τον ομομορφισμό
 τον, οπότε δεν υπάρχει κενό αλφάδο)

Παραδείγματα: 1) $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \varphi)$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\varphi(x) = x$

τον τον, $\Lambda = \{(\mathbb{R}^n, \varphi)\}$ αλφάδο (διαφορίκιο)

$\rightarrow \mathbb{R}^n$ διαφ. αλφάδο διαφορίκιο n (πρ. το οποίο διαφ. διαφ. διαφ.)

2) $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $U_i^\pm = S \cap \{x_i^\pm > 0\}$

$(u^1, \dots, u^{n+1})$

$\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\varphi_i^\pm(u^1, \dots, u^{n+1}) = (u^1, \dots, u^i, \dots, u^{n+1})$

$(\varphi_i^\pm)^{-1}(v^1, \dots, v^n) = (v^1, \dots, v^{i-1}, \pm \sqrt{1 - |v|^2}, v^{i+1}, \dots, v^n)$

$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(v^1, \dots, v^n) = \varphi_i^\pm(v^1, \dots, v^{j-1}, \pm \sqrt{1 - |v|^2}, v^{j+1}, \dots, v^n)$

~~$\Rightarrow$ προφανώς~~

~~$u^1, \dots, u^n = v^1$~~

∞

~~$v^1, \dots, v^n$~~

~~$u^1, \dots, u^n = v^1$~~

~~$u^1, \dots, u^n$~~

$(\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1})^{-1}$ ιδίως προφανώς ∞

$\Lambda = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm), i \in I\}$ διαφορίκιο αλφάδο
 $\rightarrow S^n$ αλφάδο διαφορίκιο

Η (φω/σφ) του χώρου $\mathbb{R}P^n$

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\{x \sim \lambda x, \lambda \neq 0\}}$$

εξορισμένο με
την ζυγοδωρία
πυλίκου:

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$$
$$x \mapsto [x]$$

$$U \subseteq \mathbb{R}P^n \text{ ανοικτό}$$
$$\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ ανοικτό}$$
$$\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

ανεικόνιση πυλίκου

$\mathbb{R}P^n \ni [x] =$ ευθεία που $\mathbb{R}^{n+1}$ τον διέρχεται από το 0
παράλληλα με $x \neq 0$.

$$U_i \subseteq \mathbb{R}P^n \quad U_i = \pi \left(\left\{ (u^1, \dots, u^{n+1}), u^i \neq 0 \right\} \right)$$
$$= \left\{ [u^1, \dots, u^{n+1}], u^i \neq 0 \right\}$$

$$\pi^{-1}(U_i) = \{u^i \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ ανοικτό}$$

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \varphi_i([u^1, \dots, u^{n+1}]) = \left(\frac{u^1}{u^i}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^i}, \frac{u^{i+1}}{u^i}, \dots, \frac{u^{n+1}}{u^i} \right)$$

$$\leadsto A = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, \dots, n+1\} \text{ διαφ. ατλαντ}$$

$\mathbb{R}P^n$ διαφ. πολ/ση (με τη δ. δομή το 1)

11. Vorlesung $M_1, \dots, M_k$ sind $\mathbb{R}$ -Vektorräume

Somit $\dim M_i = d_i$

$M_1 \times \dots \times M_k$ ist $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\dim M_1 \times \dots \times M_k = d_1 + \dots + d_k$

$U_i \subseteq M_i$ $\forall i$ $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i \rightarrow$ $\mathbb{R}$ -Vektorraum M_i

$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k : U_1 \times \dots \times U_k \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_k} = \mathbb{R}^{d_1 + \dots + d_k}$

$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k (p_1, \dots, p_k) = (\varphi_1(p_1), \dots, \varphi_k(p_k))$

$\mathcal{A} = \{ (U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k), (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i \}$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{A}$ (isomorphism)

Analogie M $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$U \subseteq M$ $\forall U$ $\mathcal{A}_U = \{ \varphi|_U (v|_U, \varphi|_U), (v, \varphi) \in \mathcal{A}, v|_U \neq 0 \}$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}$ -Vektorraum U .

1.1
 $F: M \rightarrow N \subset^\infty$ ou $\forall p \in M$ υπάρχει και
 $\subset^\infty$ σημείο (u, φ) και (v, ψ) της M στο P
και της N στο $F(p)$ ώστε
• $F(u) \subseteq V$
• $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(u) \rightarrow \psi(v) \subset^\infty$

Αρκεί : $\forall F: M \rightarrow N$ συνεχής

$F \subset^\infty$, $\forall (u, \varphi) \subset^\infty$ σημείο της M , $(v, \psi) \subset^\infty$ της N
 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \subset^\infty$ στο νέο ορισμό
της $\subset^\infty$ δεν είναι κενό.

1.2
 $F: M \rightarrow N$ αμφιστοχαστική αν $\subset^\infty, 1-1$, επί
και $F^{-1} \subset^\infty$. Λέμε τότε $M \sim N$, M, N
αμφιστοχαστικές

Διαμερίσεις της μονάδας

Ορισμός : M διαφ. ακολουθία, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$
ένα ανοικτό κλειστό της M . $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Μια διαφ. της μονάδας ονομάζεται το κλειστό $\mathcal{U}$
είναι μια ακολουθία $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset^\infty$ συναρτήσεων $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$2) \text{supp } \psi_\alpha = \overline{\{x \in M, \psi_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq U_\alpha$$

3) $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ τοπικά πεπερασμένο :

$$\forall x \in M \quad \exists W \subseteq M \text{ ανοιχτό } x \in W$$

ώστε $W \cap \text{supp } \psi_\alpha \neq \emptyset$ για πεπερασμένα
στον αριθμό $\alpha \in A$.

$$4) \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in M$$

Λ, πεπερασμένο άθροισμα, λόγω 3.
 $\forall x$

Παρατήρηση (Υπαρξήν διαδείξαι το πρόβλημα)

Αν M διαφ. κώδ/ρα κ. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
ανοιχτό κώδ/ρα, τότε υπάρχει μία διαμέριση
του χώρου υπέρβαση με το κώδ/ρα $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Εφαρμογές

i) Αν M διαφ. κώδ/ρα, $A \subseteq M$ κλειστό, $U \subseteq M$ ανοιχτό
με $A \subseteq U$. Υπάρχει $f: M \rightarrow \mathbb{R} \quad \subseteq^\infty$

ώστε $f|_A \equiv 1$, $0 \leq f \leq 1$ κ. $\text{supp } f \subseteq U$

$$U_1 = M \setminus A$$

$\leadsto \exists \psi_0, \psi_1: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, zur Funktion f auf U_0 $f|_{U_0} = \psi_0$ $f|_{U_1} = \psi_1$

$$\exists \varphi \in C_c^\infty(M) \quad f = \varphi \cdot \psi_0$$

$$\cdot \operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \psi_0 \subseteq U_0 \subseteq U \quad \checkmark$$

$$0 \leq f = \psi_0 \leq 1 \quad \text{on } M$$

$$\forall x \in A \quad f(x) = \psi_0(x) \stackrel{(*)}{=} 1 - \psi_1(x) = 1$$

$$\text{also } \operatorname{supp} \psi_1 \subseteq U_1 = M \setminus A \quad \text{und } x \in A$$

$$\Rightarrow f|_A = 1$$

2) M stetig, $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq M$ abgeschlossen

von $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^\infty$ ($f \in C^0$ auf A)

$\forall x \in A$ existiert offene $W_x \subseteq M$, $x \in W_x$ und

C^∞ Erweiterung $\tilde{f}_x: W_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\tilde{f}_x|_{W_x \cap A} = f|_{W_x \cap A}$

Dann existiert $F: M \rightarrow \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^\infty$

mit $F|_A = f$ (Erweiterung von f)

$$\operatorname{supp} F \subseteq U$$

$\forall p \in A$ έστω $F_p : W_p \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^\infty$ όπως πριν
 επιλεγό με οφέλ.

χρειάζεται $W_p \subseteq U$ (εάντις. ναίρνουμε $W_p \cap U$)

ανοίχτες κούτε

$$\{W_p, p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$$

Διότ.
 να το κάνω, ψ_p, ψ_0 $\text{supp } \psi_p \subseteq \cancel{W_p} W_p$.
 $\text{supp } \psi_0 \subseteq M \setminus A$.

ορίζουμε $F(x) = \sum_{p \in A} \underbrace{\psi_p(x) \cdot F_p(x)}_{(=0 \text{ or } x \notin W_p)}$

→ Τοιμή είναι πενεταυμένο άδραγμα
 C^∞ συναρτήσεων $\Rightarrow F \in C^\infty$.

$$C^\infty(M) = \{ f: M \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty \}.$$

Ορισμός (Παραγώγος)

Έστω M διαφορική ποδ/ση, $p \in M$. Μια παραγώγος στο $p \in M$ είναι μια απεικόνιση $X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ως

(i) X είναι $\mathbb{R}$ -γραμμική: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M)$

(ii) Κανόνας Leibniz: $\forall f, g \in C^\infty(M)$
 στο p

$$X(f \cdot g) = f(p) \cdot X(g) + g(p) \cdot X(f).$$

• Αν $f = c \in C^\infty(M)$ (σταθερή συνάρτηση) $\Rightarrow X(f) = 0 \quad \forall$ παραγώγους X στο p .
 (δείκνουν: Δείξτε ως για $f = f^2 = 1$ άρκει.)

• Αν $f, g \in C^\infty(M)$, $f(p) = g(p) = 0 \Rightarrow X(f \cdot g) = 0$. (δείκνουν Leibniz)

Ορισμός: M διαφ. ποδ/ση, $p \in M$.

$$T_p M = \{ X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ παραγώγος στο } p \}.$$

$\rightarrow$ διανυσματικός χώρος. (πορτί;)

$\rightarrow$ Ονομάζεται εξωτερικός χώρος $\sqrt{\text{της } M}$ στο p .

Ⓛ Αυτή η σελίδα δεν προσέφερε τη διεύθυνση στο $T_p M$ (ούτε αν είναι ηγενοσφαιρική!).

Έστω $F: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$ αντιστοιχία μεταξύ διαφ. πολ/των M, N
και $p \in M$. Ορίσουμε την αντιστοιχία push-forward

$$F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \quad \text{ως εξής.}$$

$$\forall X \in T_p M \quad F_* X: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ώστε}$$

$$F_* X(f) = X(\underbrace{f \circ F}_{\in C^\infty(M)}) \quad \forall f \in C^\infty(N)$$

• Να ελέγξετε ότι :

$$\text{ii) } \text{id}_M: M \rightarrow M \quad (\text{id}_M)_*: T_p M \rightarrow T_p M$$

$$(\text{id}_M)_* = \text{id}_{T_p M}$$

$$\text{iii) } M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P \quad (G \circ F)_*: T_p M \rightarrow T_{F(G(p))} P$$

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

iv) Αν $F: M \rightarrow N$ είναι αφοριστική

τότε $\forall p \in M, F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ είναι γραμμικό ισομορφισμό

Λογισμική για παραγώγους

(i) M διαφ. πολ/τα $f, g \in C^\infty(M), U \subseteq M$ ανοικτή ώστε

$$f = g \text{ στο } U. \text{ και } p \in U, X \in T_p M$$

$$\Rightarrow X(f) = X(g)$$

Αρκεί να $h \in C^\infty(M)$ με $h = 0$ στο U (διαφοροποιούμε δεξότε $h = f - g$)

Διαίρεση της μονάδας συλλαβών με 2 κινδύνη $\{U, M - U\}$

$$\psi_1 + \psi_2 = 1 \quad \text{supp } \psi_1 \subseteq U \quad \text{supp } \psi_2 \subseteq M - U \quad \psi = \psi_2 \quad \psi(p) = 0$$

$$\text{και } \psi \equiv 1 \text{ στο } M - U \Rightarrow h = \psi h \Rightarrow X(h) = h(p)X(\psi) + \psi(p)X(h) = 0$$

M διαφ. πολ/ζω $U \subseteq M$ ανοικτή υποπολ/ζα της M .

$i: U \rightarrow M$, $i(x) = x$ $p \in U \Rightarrow i_x: T_p U \rightarrow T_p M$ ισομορφισμός

Λόγω αυτού του Αιτήματος δεν θα ξεχωρίζετε $T_p U, T_p M$

Έστω M διαφ. πολ/ζω, (U, φ) C^∞ χαρτα της M

$p \in U$. Η $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτή είναι ~~αλγεβρική~~ αλγεβρική

$$\varphi_x: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \varphi(U) \simeq T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_x^{-1}: T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f} \in C^\infty(\varphi(U)) \\ (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, n \text{ ορίζουμε την} \\ \text{παραγώγιο} \end{array} \quad \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} (\hat{f}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial u^i} (\varphi(p))$$

και αν $\{x^i\}$ συντεταγμένες του (U, φ)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := \varphi_x^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) \in T_p M$$

$\Leftrightarrow$ ορίζουμε $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ως την παραγώγιο

$$\text{t.e.} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} (\varphi(p)).$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \text{ ανεξάρτητοι βάσις στο } T_p M$$

$$\text{αφ' ου στο } \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \text{ ανεξάρτητοι βάσις στο } T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$$

(Θέλει κάποια δουλειά ακόμα)

$$\cancel{X \in T_p M} \quad X \in T_p M, \quad x^j: U \rightarrow \mathbb{R} \quad j=1, \dots, n \text{ συντεταγμένες}$$

$$\left(\begin{array}{l} X(x^j) = X(u^j \circ \varphi) \\ x^j = u^j \circ \varphi = \varphi_* X(u^j) \end{array} \right) \quad \text{Εστω} \quad X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

$$\text{Οα χρησιμοποιούμετε να εύρωμε} \\ \text{δουλειά στο Einstein} \quad \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

(αν ~~είχα~~ είχα μια έκφραση για φ_* κάποιος δείχνει
εργασία] στα δύο ευρεθεί, μια πάνω και μια κάτω, τότε
αποδείχθηκε ως προς αυτές να δείχνει

$$\text{π.χ.} \quad u^i \omega_i = \sum_{i=1}^n u^i \omega_i \quad]$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad X(x^j) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x^j)} = X^i \left(\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (x^j) \\ &= X^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} (\varphi(p)) = X^i \delta_i^j = X^j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X = X(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad \forall \quad X \in T_p M$$

To push-forward or differentiate

$$F: M^m \rightarrow N^n \quad C^\infty \quad (m = \dim M, \quad n = \dim N)$$

$p \in M$, $(U, \varphi) \subset^\infty$ charts on M give are $z.p. \{x^i\}$

$(V, \psi) \subset^\infty$ charts on N give are $z.p. F(p)$
 $\{y^j\}$

where $F(U) \subseteq V$.

$$F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \quad \text{Hatt kin: } \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\} \text{ Bases zu } T_p M$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \right\} \text{ Bases zu } T_{F(p)} N$$

Definition

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \Rightarrow F_* X = X^i F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$$

$$\text{now } Y^j = \left[F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \right] (y^j)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (y^j \circ F) = \frac{\partial (y^j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} (\varphi(p))$$

$$\text{Summary: } \hat{F}(u^1, \dots, u^m) = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m)$$

$$= (\hat{F}^1(u^1, \dots, u^m), \dots, \hat{F}^n(u^1, \dots, u^m))$$

$$\hat{F}^j = y^j \circ F \circ \varphi^{-1}$$

$$\Rightarrow F_* X = X^i \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial u^i} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{F}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \hat{F}}{\partial u^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{F}^n}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \hat{F}^n}{\partial u^m} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobian matrix}} \begin{pmatrix} \hat{F}^1 \\ \vdots \\ \hat{F}^n \\ x^m \end{pmatrix}$$

$$= J_{\hat{F}} \big|_{\varphi(p)} \quad \text{---} \quad \text{πινακας Jacobian} \\ \text{του } \hat{F} \text{ στο } \varphi(p).$$

$$(\hat{F}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V))$$

$$C^\infty \text{ καμπύλη, } \gamma: I \xrightarrow{C^\infty} M \quad I \subseteq \mathbb{R} \text{ διαστήμα}$$

$$\gamma'(t) := \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_t \right) \\ \in T_{\gamma(t)} M$$

$$T_t \mathbb{R} = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_t \right)$$

$$\underline{\text{Πρόταση}}: \forall X \in T_p M \quad \exists \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p \\ \gamma'(0) = X$$

$$\Rightarrow X(f) = \gamma'(0)(f) = \left(\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_t \right) \right) (f) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t (f \circ \gamma) = \\ = (f \circ \gamma)'(t)$$

Γεωμετρία

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

$$\pi: TM \rightarrow M$$

$$\pi(X) = p$$

$$= \bigcup_{p \in M} \{(p, v), v \in T_p M\}$$

$$\Leftrightarrow X \in T_p M$$

→ Διαφ. πολ/α διαστάσεων $2n = 2 \dim M$

Χάρτες $(\pi^{-1}(u), \Phi)$

$(u, \varphi) \in C^\infty$
χάρτες της M

$$\Phi\left(\omega^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \omega^1, \dots, \omega^n)$$

$$\hat{\Phi}\left(x^1, \dots, x^n, \omega^1, \dots, \omega^n\right) = \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}$$

Διανυσματικές πεδία

$$X: M \rightarrow TM \quad C^\infty \text{ ώστε } X(p) \in T_p M \quad \forall p \in M$$

$$\begin{array}{ccc} & X & \nearrow TM \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

(μεταδέρνουμε διανυσματικά)

$$\underline{\text{Συμπ.}}: X(p) = X_p$$

$$\mathcal{X}(M) = \{X: M \rightarrow TM \quad C^\infty \text{ f. πεδία}\}$$

Παραγωγή στην M : $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ τότε ορίζεται

$$\sim \text{ αλγεβρική } X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad \omega$$

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad \forall p$$

με την ιδιότητα $X: C(M) \rightarrow C(M)$ γραμμική. (5)

και $X(fg) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f)$ στην M

(Leibniz σε κάθε σημείο)

- $\mathbb{F}$ συνεχ.

- A γνήσια Lie.

C^∞ δ-αλγεβρά $\Leftrightarrow$ ∇ τοπική έκφραση είναι, τότε
 C^∞ συναρτήσεις