

($f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ convex, αρύθμ., $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, $\hat{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$)

④ έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με $\hat{f}(\xi) = 0, \forall \xi \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$

v.s.o. $\|f'\|_2 \leq \|f\|_2$.

Λύση:

$$\|f'\|_2 \stackrel{f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \|\hat{f}'\|_2 = \left[\int |\hat{f}'(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} |2\pi i \xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\stackrel{10 \cdot 4\pi^2 \xi^2 \leq 4\pi^2 \cdot \frac{1}{100} < 1}{\leq} \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

$$\leq \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

⑤ N.S.O. $\nexists f \in L^1(\mathbb{R}^n): f * g = g, \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Λύση:

Αν υπήρχε, τότε: $\hat{f} * \hat{g} = \hat{g}, \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\Rightarrow \hat{f} \cdot \hat{g} = \hat{g}, \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{επίσης για } g = f: (\hat{f}(\xi))^2 = \hat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = 0 \text{ ή } 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

όπως $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ συνεχής

άρα ή $\hat{f} \equiv 0$ ή $\hat{f} \equiv 1$

• Αν $\hat{f} \equiv 0 \xrightarrow{f \in L^1} f(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi = 0$ για x -οποδήποτε
καθώς *

$$\Rightarrow f=0 \Rightarrow f * g = 0 * g = 0, \forall g \in L^1.$$

• Αν $\hat{f} \equiv 1$, α τοπο καθώς δειχθεί το $R-L$

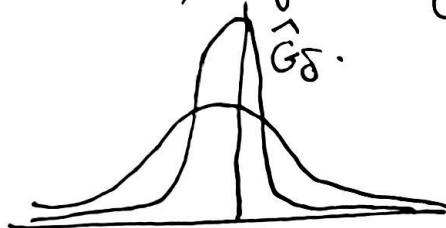
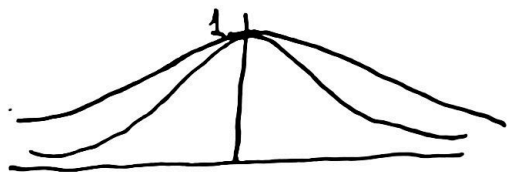
$$\hat{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Λένε ότι: $f * \delta_0 = f, \forall f \in L^1$

$$\text{για } \delta_0(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$$G_\delta(x) = e^{-\pi |x|^2 / \delta^2}$$

$$(\text{για } \delta \searrow 0) \hat{G}_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta} \hat{G}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$



Η $(\hat{G}_\delta)_{\delta > 0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας:

αρα $f * \hat{G}_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ κατά σημείο $\lambda-\sigma.\pi.$

και $\hat{G}_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \delta_0$ κ.σ.

Αρα, ορίζουμε $f * \delta_0(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} f * \hat{G}_\delta(x)$ $\lambda-\sigma.\pi.$
 ($f(x)$ σ.π.)

$$\text{και } \hat{\delta}_0 \equiv 1.$$

③ (α) έστω A, B Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $\mathbb{R}$ -δ.ο. Αν $\chi_A * \chi_B(0) > 0$, τότε υπάρχουν άπειρα $(a, b) \in A \times B : a + b = 0$.

ΠΩΣ:

$$\chi_A * \chi_B(0) = \underbrace{\int \chi_A(y) \cdot \chi_B(-y) dy}_{\geq 0} > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ άπειρα } y \in \mathbb{R} : \chi_A(y) \cdot \chi_B(-y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \in A \text{ και } -y \in B.$$

Αντ. $\exists$ άπειρα $(y, -y) \in A \times B$ και φυσικά για κάθε τέτοιο ζεύγος $y + (-y) = 0$.

$$(b) \forall f \in L^2(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}), h \in L^2(\mathbb{R}), f * g * h(0) = \int \hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}$$

ΠΩΣ:

$$f * g * h(0) = \int \underbrace{f(x)}_{\in L^2} \cdot \underbrace{g * h(-x)}_{\in L^2} dx = \int \hat{f}(\xi) \hat{g * h}(\xi) d\xi$$

$$= \int \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi \quad \checkmark$$

(γ) A, B, C Lebesgue μετρήσιμα $\subseteq \mathbb{R}$. Ν.δ.ο.

$$\text{Av } \chi_A * \chi_B * \chi_C(0) > 0. (\stackrel{(b)}{\iff} \int \hat{\chi}_A \cdot \hat{\chi}_B \cdot \hat{\chi}_C > 0).$$

τότε $\exists$ άπειρα $(a, b, c) \in A \times B \times C : a + b + c = 0$

Λύση:

$$\chi_A * \chi_B * \chi_C(0) = \int \chi_A(x) \chi_B * \chi_C(-x) d\lambda(x).$$

$$= \int \underbrace{\int \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) \cdot \chi_C(-x-y) d\lambda(y)}_{\substack{\text{"} \\ F(x, y) > 0}} d\lambda(x). \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπ} \theta}}{> 0}$$

$$\implies \exists \text{ άπειρα } (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > 0 \iff$$

$$\iff x \in A, y \in B, -x-y \in C$$

$$\implies \exists \text{ άπειρα } (x, y, -x-y) \in A \times B \times C$$

$$\text{με } x + y + (-x-y) = 0.$$

$$(δ) \text{ Av } \chi_A * \chi_A * \chi_{-2A}(0) > 0,$$

$$(\stackrel{(b)}{\iff} \int \hat{\chi}_A \cdot \hat{\chi}_A \cdot \hat{\chi}_{-2A} > 0)$$

$\implies \omega$ A περιέχει άπειρες αριθμητικές προόδους μήκους 3. (δηλ. $\exists$ άπειρες τριάδες $(x, x+y, x+2y) \in A \times A \times A$)

④ έστω $f \in C(\mathbb{T})$. ν.δ.ο. $\frac{\|S_N(f; \cdot)\|}{\log N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Λύση: $\exists c > 0$:

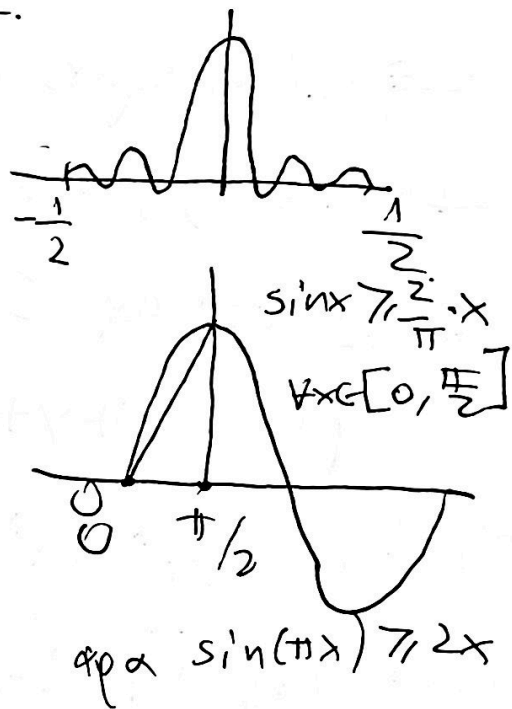
Βήμα 1: $\|S_N(f; \cdot)\|_{\infty} \leq C \log N \cdot \|f\|_{\infty}$

$\|f * D_N\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|D_N\|_1$

Αρκεί ν.δ.ο. $\|D_N\|_1 \leq C \cdot \log N, \forall N \geq 2$.

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, & \forall x \notin \mathbb{Z}. \\ 2N+1, & \forall x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|D_N\|_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(x)| dx = \\ &\stackrel{\text{συμμ}}{=} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\sin((2N+1)\pi x)|}{\sin \pi x} \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\sin((2N+1)\pi x)|}{x} dx. \end{aligned}$$



Θέτουμε $(2N+1) \cdot x = y$

$$\int_0^{\frac{2N+1}{2}} \frac{|\sin(\pi y)|}{y} \frac{dy}{2N+1} = \int_0^{\frac{N+1}{2}} \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy \leq$$

$$\leq \int_0^{N+1} \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy = \int_0^1 \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy + \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy \leq$$

$$\leq C + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq C + C' \log N \leq 2C'' \log N \checkmark$$

Βήμα 1: $\frac{\|S_N(f; \cdot)\|_\infty}{\log N} \leq C \|f\|_\infty, \forall f \in C(\mathbb{T}).$

Βήμα 2: Έστω p πολυ. πρ., τότε $\frac{\|S_N(p; \cdot)\|_\infty}{\log N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

$$S_N(p; \cdot) = p \text{ για } N \geq \deg p$$

$$\Rightarrow \text{για } N \geq N_0: \frac{\|S_N(p; \cdot)\|_\infty}{\log N} = \frac{\|p\|_\infty}{\log N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Βήμα 3: Έστω $f \in C(\mathbb{T})$, $\theta \cdot \delta \cdot o.$ $\frac{\|S_N(f; \cdot)\|_\infty}{\log N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists$ πολυ. πρ. p :

$$\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2C} \quad (1)$$

$$\frac{\|S_N(f; \cdot)\|_\infty}{\log N} \leq \frac{\|S_N(f; \cdot) - S_N(p; \cdot)\|_\infty}{\log N} +$$

$$+ \frac{\|S_N(p; \cdot)\|_\infty}{\log N} \stackrel{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{Βήμα 2} \\ N \rightarrow +\infty}}{<} \frac{\|S_N(f - p; \cdot)\|_\infty}{\log N} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Βήμα 1

$$\leq C \cdot \|f - p\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{(1)}{<} \frac{C \cdot \varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$