

—→ **Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p \in (1, 2)$.**

Προς το παρόν, έχουμε ορίσει το μετασχηματισμό Fourier για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (για τέτοιες f , ο $\hat{f}$ ορίζεται παντού μέσω ολοκληρώματος), και για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (για τέτοιες f , ο $\hat{f}$ ορίζεται σχεδόν παντού, μέσω προσεγγίσεων στον L^2 από συναρτήσεις Schwartz).

Χάρη στο παρακάτω λήμμα, θα μπορέσουμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $p \in (1, 2)$.

Λήμμα 0.0.1. Για κάθε $p \in (0, 1)$, ισχύει ότι $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $p \in (0, 1)$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$f = f\chi_{\{|f|<1\}} + f\chi_{\{|f|\geq 1\}}.$$

Θα δείξουμε ότι $f\chi_{\{|f|\geq 1\}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $f\chi_{\{|f|<1\}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. (Θυμόμαστε ότι η 2-νόρμα δίνει μεγαλύτερη έμφαση στις μεγάλες τιμές της f και λιγότερη έμφαση στις μικρές (σε σχέση με την 1-νόρμα), γι' αυτό και περιμένουμε το κομμάτι της συνάρτησης με τις μικρές τιμές να είναι στον $L^2(\mathbb{R}^n)$.) Πράγματι:

• $f\chi_{\{|f|\geq 1\}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, καθώς

$$\int |f\chi_{\{|f|\geq 1\}}| = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| \geq 1\}} |f(x)| dx \stackrel{p>1, |f(x)| \geq 1}{\leq} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^p dx \leq \int |f(x)|^p dx \stackrel{f \in L^p}{<} +\infty,$$

και

• $f\chi_{\{|f|<1\}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, καθώς

$$\int |f\chi_{\{|f|<1\}}|^2 = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| < 1\}} |f(x)|^2 dx \stackrel{2>p, |f(x)| < 1}{\leq} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| < 1\}} |f(x)|^p dx \leq \int |f(x)|^p dx \stackrel{f \in L^p}{<} +\infty.$$

□

Ορισμός 0.0.2. (Μετασχηματισμός Fourier στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p \in (1, 2)$) Έστω $p \in (1, 2)$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Γράφουμε $f = f_1 + f_2$, για κάποιες $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, και ορίζουμε

$$\hat{f} := \hat{f}_1 + \hat{f}_2.$$

—→ **Παρατηρήσεις.**

• Η συνάρτηση $\hat{f}_1$ ορίζεται παντού στον $\mathbb{R}^n$, ενώ η $\hat{f}_2$ σχεδόν παντού (συγκεκριμένα, είναι εκπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας).

• **Ο ορισμός είναι καλός.** Αυτό έχει να κάνει με το ότι οι δύο ορισμοί του μετασχηματισμού Fourier, στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, ταυτίζονται για συναρτήσεις f στην τομή $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (σχεδόν παντού), ενώ παράλληλα ο $\hat{f}$ είναι γραμμική απεικόνιση στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ χωριστά. Πράγματι, έστω ότι

$$\begin{cases} f = g_1 + g_2, & \text{όπου } g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ και } g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ και} \\ f = h_1 + h_2, & \text{όπου } h_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ και } h_2 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Πρέπει να δειχθεί ότι

$$\widehat{g}_1 + \widehat{g}_2 = \widehat{h}_1 + \widehat{h}_2 \quad \text{σχεδόν παντού,}$$

ή ισοδύναμα

$$\widehat{g}_1 - \widehat{h}_1 = \widehat{h}_2 - \widehat{g}_2 \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Γνωρίζουμε ότι $g_1 + g_2 = h_1 + h_2$, και άρα

$$g_1 - h_1 = h_2 - g_2.$$

Αφού $g_1 - h_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g_2 - h_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, και οι δύο (ίσες) αυτές συναρτήσεις ζουν στην τομή $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, και άρα, όπως έχουμε δει,

$$\widehat{g_1 - h_1} = \widehat{h_2 - g_2} \quad \text{σχεδόν παντού}$$

(όπου αριστερά έχουμε μετασχηματισμό Fourier όπως αυτός ορίστηκε στον $L^1(\mathbb{R}^n)$, ενώ δεξιά μετασχηματισμό Fourier όπως αυτός ορίστηκε στον $L^2(\mathbb{R}^n)$). Λόγω γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, προκύπτει ότι

$$\widehat{g}_1 - \widehat{h}_1 = \widehat{h}_2 - \widehat{g}_2 \quad \text{σχεδόν παντού,}$$

όπως επιθυμούσαμε.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι τί ιδιότητες έχει ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p \in (1, 2)$. Γνωρίζουμε ότι:

- Για $p = 1$: Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ο $\widehat{f} \in L^\infty$, και μάλιστα

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(δηλαδή, ο $\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής, με νόρμα ≤ 1). Επιπλέον, ξέρουμε ότι ο $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, που ικανοποιεί επιπλέον ότι $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ καθώς $|\xi| \rightarrow +\infty$.

- Για $p = 2$: Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ο $\widehat{f} \in L^2$, και μάλιστα

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{για κάθε } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(δηλαδή, ο $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής, με νόρμα ίση με 1). Επιπλέον, ξέρουμε ότι ο $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι 1-1 και επί.

Αν ξέρουμε ότι ένας τελεστής φράσσεται από κάποιον L^{p_1} σε κάποιον L^{q_1} , και από κάποιον L^{p_2} σε κάποιον L^{q_2} , τότε, για κάθε p ανάμεσα στα p_1, p_2 , φράσσεται από τον L^p στον L^q , για κατάλληλο q . Αυτό προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα παρεμβολής των Riesz και Thorin.

Theorem 0.0.3. (Θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin) Έστω $p_1 < p_2$ στο $[1, +\infty]$, και έστω T γραμμικός τελεστής, καλά ορισμένος στον $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Έστω επιπλέον ότι, για κάποια $q_1, q_2 \in [1, +\infty]$, ο $T : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος, με

$$\|Tf\|_{q_1} \leq A_1 \|f\|_{p_1} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n),$$

και ο $T : L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_2}(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος, με

$$\|Tf\|_{q_2} \leq A_2 \|f\|_{p_2} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n).$$

Τότε, για κάθε $p \in (p_1, p_2)$, βρίσκουμε το (μοναδικό) $\theta \in (0, 1)$ για το οποίο

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2},$$

και έχουμε ότι, για το $q \in [1, +\infty]$ για το οποίο

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2},$$

ο $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος, με

$$\|Tf\|_q \leq A_1^\theta A_2^{1-\theta} \|f\|_p \quad \text{για κάθε } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin στο μετασχηματισμό Fourier, προκύπτει το παρακάτω.

Theorem 0.0.4. (Ανισότητα Hausdorff-Young) Για κάθε $p \in [1, 2]$, ο $\widehat{\cdot} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής, με

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \text{για κάθε } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε τη ζητούμενη σχέση για $p = 1$ και $p = 2$ (αφού $1' = \infty$ και $2' = 2$). Από το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin, την παίρνουμε και για κάθε $p \in (1, 2)$. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{\cdot}$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής στον $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ (το δείξαμε). Επιπλέον, είναι φραγμένος από τον $L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, με

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq 1 \cdot \|f\|_1 \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

και είναι φραγμένος από τον $L^2(\mathbb{R}^n)$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, με

$$\|\widehat{f}\|_2 \leq 1 \cdot \|f\|_2 \quad \text{για κάθε } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(εδώ μάλιστα ισχύει ισότητα, αλλά αυτό είναι αδιάφορο ως προς την εφαρμογή του θεωρήματος παρεμβολής.)

Έστω $p \in (1, 2)$. Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ για το οποίο

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2},$$

και μάλιστα αυτό το θ μπορούμε να το υπολογίσουμε: ικανοποιεί ότι $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}$, και άρα

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το q για το οποίο

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} :$$

το q ισούται με p' . Από το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin, ο $\hat{\cdot} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος γραμμικός τελεστής, με

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq 1^\theta \cdot 1^{1-\theta} \|f\|_p = \|f\|_p \quad \text{για κάθε } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

□

—→ **Παρατήρηση.** Αν ξεκινούσαμε γνωρίζοντας την ανισότητα Hausdorff-Young για όλες τις συναρτήσεις Schwartz, δηλαδή αν γνωρίζαμε ότι για κάποιο $p \in (1, 2)$ ισχύει ότι

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \text{για κάθε } f \in S(\mathbb{R}^n),$$

τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε μετασχηματισμό Fourier στον συγκεκριμένο $L^p(\mathbb{R}^n)$ (χωρίς δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε ότι $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$), πάνω-κάτω όπως χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Plancherel για να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα: :

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Παίρνουμε $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $S(\mathbb{R}^n)$, με

$$g_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_p} f.$$

Η $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, και λόγω της ανισότητας Hausdorff-Young στον $S(\mathbb{R}^n)$ έχουμε και ότι

$$\|\hat{g}_k - \hat{g}_m\|_{p'} \leq \|g_k - g_m\|_p, \quad \text{για κάθε } k, m \in \mathbb{N}.$$

Άρα, η $(\hat{g}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p'})$. Και αφού ο $(L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p'})$ είναι χώρος Banach, η $(\hat{g}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $(L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p'})$, δηλαδή υπάρχει $\tilde{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ώστε

$$\hat{g}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_{p'}} \tilde{f}.$$

Ορίζουμε¹ $\hat{f} := \tilde{f}$, ένα στοιχείο του $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Μάλιστα, λόγω πυκνότητας του $S(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, η ανισότητα Hausdorff-Young επεκτείνεται σε όλο τον $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

—→ **Γεγονός.** Η ανισότητα Hausdorff-Young δεν ισχύει για $p > 2$. Μάλιστα, δεν υπάρχει κανένα $q \in [1, +\infty]$ με την ιδιότητα ότι

$$\|\hat{f}\|_q \leq C \cdot \|f\|_p \quad \text{για κάθε } f \in S(\mathbb{R}^n)$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\hat{\cdot} : (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_q) \rightarrow (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ είναι **άφραγτος**, για κάθε $q \in [1, +\infty]$.

¹Τσεκάρετε ότι αυτός ο ορισμός συμφωνεί με τον προηγούμενο.

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $p > 2$ και για κάθε $q \in [1, +\infty]$, μπορούμε να βρούμε μία $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και μία ακολουθία $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ συναρτήσεων Schwartz, ώστε

$$g_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_p} f,$$

αλλά η $(\widehat{g_k})_{k \in \mathbb{N}}$ να μην έχει όριο στον $(L^q(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_q)$. Γι' αυτό το λόγο, δεν υπάρχει κάποιος λογικός τρόπος να ορίσουμε μετασχηματισμό Fourier στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p > 2$.