

0.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Σε ό,τι ακολουθεί, συμβολίζουμε με dx (ή με τίποτα) την ολοκλήρωση ως προς $d\lambda(x)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1. Λέμε ότι μία Lebesgue-μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ είναι **τοπικά ολοκληρώσιμη**, και γράφουμε $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, αν

$$\int_B |f| < +\infty, \quad \text{για κάθε μπάλα } B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

—→ Παραδείγματα.

- Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{[1,+\infty)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι στον $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
- Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{(0,+\infty)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι στον $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
- Κάθε συνεχής $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ είναι στον $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue επιβεβαιώνει ότι οι μέσοι όροι μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης f , γύρω από ολόένα και μικρότερες μπάλες με κέντρο κάποιο x_0 , συγκλίνουν στην τιμή της f στο κέντρο x_0 (τουλάχιστον για σχεδόν κάθε x_0).

Θεώρημα 2. (Θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue) Έστω $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, λ-σχεδόν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο Lebesgue της f , δηλαδή ικανοποιεί ότι

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)| dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

και κατά συνέπεια και ότι

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(x_0).$$

Συμβολίζουμε με $\text{Leb}(f)$ το σύνολο των σημείων Lebesgue της f . Έτσι, το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue λέει ότι, όταν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, σχεδόν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ ζουν στο $\text{Leb}(f)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος διαφόρισης του Lebesgue χρησιμοποιεί τη μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood.

Ορισμός 3. (Μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood) Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood είναι ένας τελεστής M , που παίρνει κάθε Lebesgue-μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, και τη στέλνει στη συνάρτηση $Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, με

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Πρακτικά μιλώντας, η Mf δίνει σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ τιμή ίση με το μέγιστο δυνατό μέσο όρο που έχει η $|f|$ σε οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο x .

—→ Παρατηρήσεις.

- Για κάθε Lebesgue-μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, η Mf είναι επίσης Lebesgue-μετρήσιμη. Πράγματι,

$$Mf = \sup_{r>0} A_r f,$$

όπου, για κάθε $r > 0$, η συνάρτηση $A_r f$ δίνει τους μέσους όρους της f στις μπάλες ακτίνας r :

$$A_r f(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Κάθε $A_r f$ είναι Lebesgue-μετρήσιμη από Θεώρημα Tonelli, καθώς

$$A_r f = |f| * \frac{\chi_{B(0, r)}}{|B(0, r)|},$$

συνέλιξη μη αρνητικών μετρησίμων συναρτήσεων. Επομένως, και η Mf είναι μετρήσιμη, ως supremum μετρησίμων.

- Αν $f = c$ (σταθερά) στον $\mathbb{R}^n$, τότε και $Mf = |c|$ (σταθερά) στον $\mathbb{R}^n$.

- Για κάθε μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f| \leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Επομένως,

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

- Ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα, $\|Mf\|_\infty \geq \|f\|_\infty$ για κάθε μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, και άρα, σε συνδυασμό με το παραπάνω, προκύπτει ότι

$$\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν πιστέψουμε το θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue, έχουμε ότι, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f \right| \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f| \right| = Mf(x).$$

Δηλαδή,

$$f \leq Mf \quad \lambda - \sigma.π.$$

- Άρα, ο (υπογραμμικός) τελεστής M είναι φραγμένος από τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ωστόσο, ο M δεν έχει αντίστοιχα όμορφη δράση στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα, για κάθε μη μηδενική $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, η $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Πράγματι, έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, με $f \neq 0$. Θα δείξουμε ότι $\int Mf = +\infty$:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(x, 2|x|)} |f| \\ &= c_n \frac{1}{(2|x|)^n} \int_{B(x, 2|x|)} |f| \\ &\stackrel{B(x, 2|x|) \supseteq B(0, |x|)}{\geq} c'_n \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0, |x|)} |f|, \end{aligned} \tag{1}$$

για κατάλληλες σταθερές c_n, c'_n που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση n . Τώρα, από το ΘΜΣ προκύπτει ότι

$$\int_{B(0,|x|)} |f| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} \int |f| = \|f\|_1,$$

και αφού $\|f\|_1 < +\infty$, το παραπάνω σημαίνει ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{B(0,|x|)} |f| \geq \frac{1}{2} \|f\|_1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } |x| \geq M.$$

Αντικαθιστώντας αυτό το κάτω φράγμα στην (1), προκύπτει ότι

$$Mf(x) \geq c_n'' \|f\|_1 \frac{1}{|x|^n}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } |x| \geq M.$$

Αφού $\int_{|x| \geq M} \frac{1}{|x|^n} dx = +\infty$ (και $\|f\|_1 \neq 0$), έχουμε και ότι

$$\int Mf = +\infty.$$

Δείξαμε ότι ο υπογραμμικός τελεστής M είναι φραγμένος από τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ενώ δεν είναι φραγμένος από τον $L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^1(\mathbb{R}^n)$.

→ Παρόλα ταύτα, θα δούμε ότι είναι, όπως λέμε, από τον L^1 στον $L^{1,\infty}$, το οποίο (εξ ορισμού) σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $C_n > 0$, που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n , ώστε

$$a \cdot |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > a\}| \leq C_n \|f\|_1, \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ και κάθε } a > 0.$$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε το αριστερό μέλος σαν έναν χρήσιμο αντικαταστάτη του 'κακού' $\int Mf$ (πάντα το αριστερό μέλος είναι $\leq \int Mf$, και, με βάση την παραπάνω σχέση, είναι και πεπερασμένο).

→ Ισχύει επιπλέον ότι, για κάθε $p > 1$, ο υπογραμμικός τελεστής M είναι φραγμένος από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά $C_{p,n}$, που εξαρτάται μόνο από το p και τη διάσταση n , ώστε

$$\|Mf\|_p \leq C_{p,n} \|f\|_p, \quad \text{για κάθε } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Αυτό δε θα το αποδείξουμε.

Για να δείξουμε την παραπάνω χρήσιμη ιδιότητα του M (για $p = 1$), θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα κάλυψης.

Λήμμα 4. (Λήμμα κάλυψης του Vitali) Έστω μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^n$, και έστω $\mathcal{B}$ οικογένεια μπαλών στον $\mathbb{R}^n$, ώστε

$$E \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, συμβολίζουμε με $r(B)$ της ακτίνα της B . Τότε, αν επιπλέον

$$\sup\{r(B) : B \in \mathcal{B}\} < +\infty,$$

υπάρχουν $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$, ξένες ανά δύο, ώστε

$$\sum_k |B_k| \geq \frac{1}{5^n} |E|.$$

—→ Παρατηρήσεις.

- Οι μπάλες $B_1, B_2, \dots$ στην εκφώνηση μπορεί να είναι και πεπερασμένες το πλήθος.
- Μπορούμε να δούμε το λήμμα κάλυψης σαν ένα υποκατάστατο συμπάγειας: μάς δίνει μία αριθμήσιμη οικογένεια, μάλιστα ξένων ανά δύο μπαλών, που καλύπτουν ένα συγκεκριμένο ποσοστό του E .

Απόδειξη.

Ιδέα. Επειδή θέλουμε να καλύψουμε όσο γίνεται περισσότερο από το E , η ιδέα είναι πρώτα να θεωρήσουμε ως B_1 τη μεγαλύτερη μπάλα της οικογένειας $\mathcal{B}$, μετά ως B_2 τη μεγαλύτερη μπάλα από τις υπόλοιπες που είναι και ξένες ως προς τη B_1 , μετά ως B_3 τη μεγαλύτερη μπάλα από τις υπόλοιπες που είναι και ξένες ως προς τις B_1, B_2 , κ.ο.κ. Αν σταματήσει ποτέ η διαδικασία, αυτό θα σημαίνει ότι κάθε μπάλα που περισσεύει έχει μικρότερη ακτίνα από τις επιλεγείσες, και τέμνει κάποια από αυτές. Επομένως, φουσκώνοντας κατάλληλα (με παράγοντα 5) τις επιλεγείσες μπάλες, καλύπτονται και όλες οι υπόλοιπες, άρα και το E .

Βέβαια, σε κάθε βήμα, το supremum των ακτινών των μπαλών μας μπορεί να μην είναι και maximum. Γι' αυτό είμαστε πιο προσεκτικοί: επιλέγουμε σε κάθε βήμα όχι τη μεγαλύτερη μπάλα (γιατί τέτοια μπορεί να μην υπάρχει), αλλά κάποια μπάλα με ακτίνα πάνω από το μισό του supremum.

Οι λεπτομέρειες.

- **Βήμα 1.** Επιλέγουμε $B_1 \in \mathcal{B}$ με

$$r(B_1) \geq \frac{1}{2} \cdot \sup\{r(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

- **Βήμα 2.** Αν υπάρχουν μπάλες στη $\mathcal{B}$ ξένες ως προς τη B_1 , επιλέγουμε μία από αυτές, B_2 , ώστε

$$r(B_2) \geq \frac{1}{2} \cdot \sup\{r(B) : B \in \mathcal{B} \text{ ξένες ως προς τη } B_1\}.$$

- **Βήμα 3.** Αν υπάρχουν μπάλες στη $\mathcal{B}$ ξένες ως προς τις B_1 και B_2 , επιλέγουμε μία από αυτές, B_3 , ώστε

$$r(B_3) \geq \frac{1}{2} \cdot \sup\{r(B) : B \in \mathcal{B} \text{ ξένες ως προς τις } B_1, B_2\}.$$

Και ούτω καθεξής...

—→ **Περίπτωση 1.** Η παραπάνω διαδικασία τερματίζει στο τέλος κάποιου βήματος J . Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βρούμε $B_{J+1} \in \mathcal{B}$ ξένη ως προς τις $B_1, \dots, B_J$ - με άλλα λόγια, κάθε $B \in \mathcal{B}$, πλην των $B_1, \dots, B_J$, τέμνει κάποια από τις $B_1, \dots, B_J$. Σε αυτή την περίπτωση, θα έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^J |B_k| \geq \frac{1}{5^n} \cdot |E|.$$

Μάλιστα, ισχύει η ισχυρότερη σχέση

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^J 5B_k, \quad (2)$$

την οποία τώρα θα αποδείξουμε (όπου, για κάθε μπάλα B στον $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $5B$ τη μπάλα με το ίδιο κέντρο και πενταπλάσια ακτίνα).

Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{k=1}^J 5B_k$$

(και αφού $E \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, θα προκύψει η (2)). Έστω λοιπόν $B \in \mathcal{B}$.

Αν η B είναι κάποια από τις $B_1, \dots, B_J$, τότε φυσικά περιέχεται στην $\bigcup_{k=1}^J 5B_k$.

Αν η B είναι διαφορετική από όλες τις $B_1, \dots, B_J$, τότε, το ότι η διαδικασία τερμάτισε στο τέλος του βήματος J σημαίνει ότι η B τέμνει κάποια από τις $B_1, \dots, B_J$. Έστω j ο ελάχιστος ακέραιος στο $\{1, \dots, J\}$, ώστε $B \cap B_j \neq \emptyset$. Αφού

$$r(B_j) \geq \frac{1}{2} \sup\{r(B') : B' \in \mathcal{B} \text{ ξένες ως προς τις } B_1, \dots, B_{j-1}\},$$

έχουμε και ότι

$$r(B_j) \geq \frac{1}{2} r(B).$$

Επομένως η B τέμνει τη B_j , και έχει ακτίνα το πολύ διπλάσια από τη B_j . Άρα, $B \subseteq 5B_j$.

—> **Περίπτωση 2.** Η διαδικασία επιλογής μπαλών B_k συνεχίζεται επ'άπειρον. Σε αυτή την περίπτωση, θα δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| \geq \frac{1}{5^n} \cdot |E|.$$

Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| = +\infty$, αυτό είναι τετριμμένο. Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| < +\infty$, τότε θα δείξουμε ξανά ότι

$$(E \subseteq) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} 5B_k.$$

Πράγματι, έστω $\tilde{\mathcal{B}} := \{B_1, B_2, \dots\}$, και $B \in \mathcal{B}$. Αν $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, τότε προφανώς $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} 5B_k$.

Έστω τώρα ότι $B \in \mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$. Αφού $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| < +\infty$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$r(B_{k_0}) < \frac{1}{2} r(B).$$

Συγχρόνως όμως,

$$r(B_{k_0}) \geq \frac{1}{2} \sup\{r(B) : B \in \mathcal{B} \text{ ξένη ως προς τις } B_1, \dots, B_{k_0-1}\}.$$

Επομένως, είναι αδύνατον η B να είναι ξένη ως προς τις $B_1, \dots, B_{k_0-1}$. Ακριβώς όπως πριν, επιλέγουμε το μικρότερο j για το οποίο η B τέμνει τη B_j . Αφού η B δεν τέμνει τις $B_1, \dots, B_{j-1}$, προκύπτει ότι

$$r(B_j) \geq \frac{1}{2} r(B),$$

και άρα $B \subseteq 5B_j$. Επομένως,

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} 5B_k.$$

□

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δείξουμε ότι ο υπογραμμικός τελεστής M είναι φραγμένος από τον $L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 5. Υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ ώστε

$$a \cdot |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > a\}| \leq C_n \|f\|_1, \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ και κάθε } a > 0.$$

(Μάλιστα, $C_n = 5^n$ λειτουργεί.)

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $a > 0$. Συμβολίζοντας

$$E_a := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > a\},$$

πρέπει να δείξουμε ότι

$$a|E_a| \leq 5^n \|f\|_1,$$

ή ισοδύναμα, λόγω της κανονικότητας του μέτρου Lebesgue, ότι

$$a|K| \leq 5^n \|f\|_1, \quad \text{για κάθε συμπαγές } K \subseteq E_a. \quad (3)$$

Έστω λοιπόν συμπαγές $K \subseteq E_a$. Κάθε $x \in K$ ανήκει και στο E_a , επομένως $Mf(x) > 0$, και άρα υπάρχει $r_x > 0$ ώστε

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x, r_x)} |f| > a,$$

δηλαδή

$$a|B(x, r_x)| < \int_{B(x, r_x)} |f|. \quad (4)$$

Το K είναι συμπαγές, και $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$. Επομένως, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $x_1, \dots, x_m \in K$, ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(x_j, r_{x_j}).$$

Από το λήμμα κάλυψης του Vitali, υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_1, \dots, B_N \in \{B(x_j, r_{x_j}) : j = 1, \dots, m\}$, ώστε

$$\sum_{k=1}^N |B_k| \geq \frac{1}{5^n} |K|.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι

$$a|K| \leq 5^n \sum_{k=1}^N a|B_k| \stackrel{(4)}{<} 5^n \sum_{k=1}^N \int_{B_k} |f| \stackrel{\text{ξένες μπάλες}}{=} 5^n \int |f|,$$

και άρα ισχύει η (3).

□

0.2 Απόδειξη του θεωρήματος διαφόρισης του Lebesgue.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα διαφόρισης (Θεώρημα 2).

Απόδειξη του θεωρήματος διαφόρισης του Lebesgue. Καταρχάς παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε το θεώρημα ειδικά για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (Πράγματι, τότε παίρνουμε το θεώρημα και για γενική $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, διαμερίζοντας τον $\mathbb{R}^n$ σε (αριθμήσιμους το πλήθος) κύβους πλευράς 1, και εφαρμόζοντας το θεώρημα διαφόρισης για την f περιορισμένη σε κάθε κύβο χωριστά (καθώς αυτός ο περιορισμός είναι στον $L^1(\mathbb{R}^n)$.)

Έστω λοιπόν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα:

Βήμα 1. Δείχνουμε ότι, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{το } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f \text{ υπάρχει.}$$

Αυτό το βήμα χρησιμοποιεί ότι η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood είναι φραγμένη από τον L^1 στον $L^{1, \infty}$.

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο το παραπάνω όριο υπάρχει, υπάρχει ακολουθία $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακτίνων (που μπορεί να εξαρτάται από το x), με $r_n \rightarrow 0$, ώστε

$$\frac{1}{|B(x, r_n)|} \int_{B(x, r_n)} f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Η απόδειξη αυτού του βήματος είναι στοιχειώδης.

Τα δύο βήματα αυτομάτως συνεπάγονται ότι¹, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f = f(x).$$

→ **Βήμα 1.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, συμβολίζουμε

$$A_r \phi(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \phi$$

και ορίζουμε

$$\Omega \phi(x) := \left| \limsup_{r \rightarrow 0} A_r \phi(x) - \liminf_{r \rightarrow 0} A_r \phi(x) \right|.$$

Ο στόχος μας λοιπόν είναι να δείξουμε ότι

$$\Omega f(x) = 0, \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Η σημαντική παρατήρηση εδώ είναι πως

$$\Omega \phi \leq 2M\phi, \quad \text{για κάθε } \phi \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (5)$$

¹Το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue ισχυρίζεται κάτι ισχυρότερο, συγκεκριμένα ότι $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int |f - f(x_0)| = 0$, για σχεδόν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Αυτό προκύπτει με μία μικρή τροποποίηση της απόδειξης που παρουσιάζουμε εδώ (όπου, αντί να λειτουργούμε με την f , λειτουργούμε με την $|f - f(x_0)|$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε την πιο απλή μορφή του θεωρήματος για να φανεί η ουσία της απόδειξης.

όπου M είναι η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood. Άρα, το ότι η M είναι φραγμένη από τον L^1 στον $L^{1,\infty}$ (Θεώρημα 5) μάς λέει ότι, τουλάχιστον αν η νόρμα $\|\phi\|_1$ είναι μικρή, εν γένει η $M\phi$ δεν μπορεί να έχει πολλές μεγάλες τιμές, και άρα και η $\Omega\phi$ θα είναι γενικώς μικρή.

Τώρα οι λεπτομέρειες: Για κάθε συνεχή $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, το θεώρημα διαφορίσισης ισχύει (απλό). Συγκεκριμένα,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} g = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n,$$

και ισοδύναμα

$$\Omega g(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Μέσω πυκνότητας, θα πάρουμε το θεώρημα διαφορίσισης για την τυχαία $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (συνεχής με συμπαγή φορέα), ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, δηλαδή ώστε

$$f = g + h,$$

για κάποια $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $\|h\|_1 < \varepsilon$. Από τριγωνική ανισότητα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Omega f(x) = \Omega(g + h)(x) = |\limsup_{r \rightarrow 0} A_r(g + h) - \liminf_{r \rightarrow 0} A_r(g + h)| \leq \Omega g(x) + \Omega h(x).$$

Ωστόσο, $\Omega g = 0$, καθώς η g είναι συνεχής. Επομένως,

$$\Omega f = \Omega h.$$

Το χρήσιμο τώρα είναι ότι περάσαμε από την f σε μία συνάρτηση h με πολύ μικρή νόρμα. Αφού χάρη στην (5) περιμένουμε η Ωh να παίρνει γενικώς μικρές τιμές, το ίδιο περιμένουμε για την Ωf . Πιο συγκεκριμένα, λόγω της (5),

$$\Omega f \leq 2Mh,$$

και άρα, για κάθε $a > 0$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega f(x) > a\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \frac{a}{2}\right\}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 5,

$$a \cdot |\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega f(x) > a\}| \leq 2a \cdot \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \frac{a}{2}\right\}\right| \leq 4\|h\|_1 = 4\varepsilon, \quad \text{για κάθε } a > 0.$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $a > 0$, ισχύει και για $a = \sqrt{\varepsilon}$ - και καθώς και το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, προκύπτει ότι

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega f(x) > \sqrt{\varepsilon}\}| \leq 4\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, προκύπτει ότι

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega f(x) > 0\}| = 0.$$

Με άλλα λόγια,

$$\Omega f(x) = 0 \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Το Βήμα 1 ολοκληρώθηκε.

—→ **Βήμα 2.** Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων $(A_r f)_{r>0}$. Από το Βήμα 1, ξέρουμε ότι

$$\text{καθώς } r \rightarrow 0, \text{ η } (A_r f)_{r>0} \text{ συγκλίνει σχεδόν παντού.}$$

Ο στόχος μας στο Βήμα 2 είναι να δείξουμε ότι, ειδικότερα,

$$A_r f \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Λόγω του Βήματος 1, αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει θετική ακολουθία² $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $r_n \rightarrow 0$, ώστε

$$A_{r_n} f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \text{σχεδόν παντού,}$$

κάτι το οποίο θα προέκυπτε άμεσα αν γνωρίζαμε ότι

$$\|A_r f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (6)$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε την (6). Δείχνουμε πρώτα ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 6. Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\|\phi - \phi(\cdot + tu)\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα για $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Τότε, ο φορέας της ϕ είναι φραγμένος, επομένως υπάρχει $M > 0$ ώστε ο φορέας της $\phi - \phi(\cdot + t)$ να περιέχεται στη $B(0, M)$ για μικρά $t \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|\phi| \leq A$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\phi - \phi(\cdot + tu) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ κατά σημείο (αφού η } \phi \text{ είναι συνεχής),}$$

και

$$\text{για κάθε } t \in \mathbb{R}, |\phi - \phi(\cdot + tu)| \leq 2A, \text{ όπου } 2A \in L^1(B(0, M)).$$

Επομένως, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\left(\|\phi - \phi(\cdot + tu)\|_1 = \int_{B(0, M)} |\phi - \phi(\cdot + tu)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{B(0, M)} 0 = 0. \right)$$

Μέσω πυκνότητας, γενικεύουμε το αποτέλεσμα σε όλο τον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\|\phi - g\|_1 < \varepsilon$. Επομένως,

$$\|\phi - \phi(\cdot + t)\|_1 \leq \|\phi - g\|_1 + \|g - g(\cdot + t)\|_1 + \|g(\cdot + t) - f(\cdot + t)\|_1 < 3\varepsilon$$

²Η ακολουθία $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που αρκεί για να λυθεί το Βήμα 2 επιτρέπεται να εξαρτάται από το κάθε x (γύρω από το οποίο κοιτάμε το μέσο όρο $A_r f(x)$). Ωστόσο, στην απόδειξή μας θα βρούμε $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητη του x .

για μικρά $t \in \mathbb{R}$.

□

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της (6). Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\|A_r f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \|A_r f - f\|_1 &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} |A_r f(x) - f(x)| d\lambda(x) \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{y \in B(x, r)} (f(y) - f(x)) d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in B(x, r)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &\stackrel{y=x+ru, u \in B(0,1)}{=} \frac{1}{C_n r^n} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{u \in B(0,1)} |f(x+ru) - f(x)| r^n d\lambda(u) d\lambda(x) \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \frac{1}{C_n} \int_{u \in B(0,1)} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+ru) - f(x)| d\lambda(x) d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{C_n} \int_{u \in B(0,1)} \|f(\cdot + ru) - f\|_1 d\lambda(u). \end{aligned}$$

Από το τελευταίο Λήμμα, έχουμε ότι $\|f(\cdot + ru) - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ κατά σημείο. Επιπλέον, για κάθε $r > 0$,

$$\|f(\cdot + ru) - f\|_1 \leq 2\|f\|_1, \text{ όπου } 2\|f\|_1 < +\infty \text{ και άρα } 2\|f\|_1 \in L^1(B(0,1)).$$

Επομένως, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\int_{u \in B(0,1)} \|f(\cdot + ru) - f\|_1 d\lambda(u) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{u \in B(0,1)} 0 d\lambda(u) = 0.$$

Άρα, $\|A_r f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, όπως επιθυμούσαμε. Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη του Βήματος 2 του θεωρήματος διαφόρισης.

□