

## Ασκήσεις: Φυλλάδιο 1

### Αρμονική Ανάλυση 2025-26

Προθεσμία παράδοσης: 16 Απριλίου 2026. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με

$$f(x) = |x| \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ 0, & k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

b) Υπολογίστε τα  $Sf(1/3)$ ,  $Sf(1/2)$  και  $Sf(4)$  (πρέπει ως απάντηση να δοθούν αριθμοί και πλήρης δικαιολόγηση).

c) Βρείτε δύο διαφορετικές  $g \in C(\mathbb{T})$  ώστε:  $f * g(x) = \cos(6\pi x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = x^3 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1).$$

a) Χωρίς να υπολογίσετε τους συντελεστές Fourier της  $f$ :

(i) Υπολογίστε τη σειρά Fourier  $Sf(x)$  της  $f$  σε κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , και σχεδιάστε ένα γράφημά της (4 περίοδοι αρκούν).

(ii) Δείξτε ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = +\infty.$$

b) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της  $f$ .

c) Βρείτε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο  $p$ , βαθμού  $\leq 2$ , με την ιδιότητα ότι

$$\|p - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \min_{g \in \mathcal{P}_2} \|g - f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

d) Δείξτε ότι δεν υπάρχει  $g \in C(\mathbb{T})$  με την ιδιότητα ότι  $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

a) Υπάρχει  $f \in C^1(\mathbb{T})$  με την ιδιότητα ότι  $\widehat{f}(k) = \frac{1}{k}$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .

b) Υπάρχει πραγματική  $f \in L^1(\mathbb{T})$  με  $\widehat{f}(-5) = -5$  και  $\widehat{f}(5) = 5$ .

c) Υπάρχει περιττή  $f \in L^1(\mathbb{T})$  με  $\widehat{f}(0) = 3$ .

- d) Αν μία  $f \in L^1(\mathbb{T})$  παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε  $\widehat{f}(k) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ .
- e) Αν μία  $f \in L^1(\mathbb{T})$  παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε  $Sf(x) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  **για το οποίο η σειρά  $Sf(x)$  συγκλίνει**. (Αυτό θέλει προσοχή! Σκεφτείτε τί γνωρίζουμε για τα  $s_N(f; x)$ .)
- f) Έστω  $f \in L^1(\mathbb{T})$  με την ιδιότητα ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε,

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = \widehat{f}(0).$$

4. a) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$  η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{100} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

- b) Έστω  $f \in C^1(\mathbb{T})$ . Δείξτε ότι  $k \cdot \widehat{f}(k) \rightarrow 0$  καθώς  $|k| \rightarrow +\infty$ .
- c) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  1-περιοδική συνάρτηση με  $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$ . Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = - \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{2k}\right) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

- d) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$ , με την ιδιότητα ότι, για κάποιο  $\alpha > 0$ , υπάρχει  $M > 0$  ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Χρησιμοποιώντας το (c)(i), δείξτε ότι υπάρχει σταθερά  $C \in (0, +\infty)$ , που εξαρτάται μόνο από την  $f$ , ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^\alpha} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

5. Έχουμε δείξει ότι, αν η  $f \in C^n(\mathbb{T})$ , τότε υπάρχει σταθερά  $C > 0$  ώστε  $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^n}$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ . Δηλαδή: όσο πιο 'λεία' είναι η  $f$ , τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι συντελεστές Fourier της. Σε αυτή την άσκηση θα δείξουμε ότι, σε κάποιο βαθμό, ισχύει και το αντίστροφο.

- a) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$ , με την ιδιότητα ότι υπάρχει σταθερά  $C > 0$  ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^3} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

- (i) Εξηγήστε το ότι

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Υπάρχει ένα θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού που λέει ότι: Αν η  $F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(x)$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , είναι τέτοια ώστε  $F(x) \in \mathbb{C}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , και επιπλέον η σειρά  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f'_k(x)$  συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η  $F$  είναι παραγωγίσιμη και  $F'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'_k(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα, δείξτε ότι η  $f \in C^1(\mathbb{T})$ .

b) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$ , με την ιδιότητα ότι υπάρχουν  $n > 3$  και σταθερά  $C > 0$  ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^n} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Δείξτε ότι  $f \in C^{n-2}(\mathbb{T})$ .

6. Έστω  $\alpha \in (0, 1)$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Έστω 1-περιοδική  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , Lebesgue-μετρήσιμη, με  $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$ , η οποία είναι  $\alpha$ -Hölder-συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή υπάρχουν  $\delta > 0$  και  $M > 0$  ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Δείξτε ότι  $Sf(x_0) = f(x_0)$ .

7. Έστω 1-περιοδική  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$ . Έστω  $x_0 \in [0, \frac{1}{2})$  και  $\ell \in \mathbb{R}$ , με την ιδιότητα ότι, για κάποιο  $\delta > 0$ ,

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2\ell|}{y} d\lambda(y) < +\infty.$$

Δείξτε ότι  $Sf(x_0) = \ell$ .

[Υπόδειξη: Ίσως σάς χρησιμεύσει ότι  $\sin(\pi y) \geq y$  για κάθε  $y \in [0, 1/2]$  (και όχι απλά κοντά στο 0).]