

Ασκήσεις: Φυλλάδιο 3

Αρμονική Ανάλυση 2025-26

Προθεσμία παράδοσης: 27 Ιουνίου 2026. Παραδίδετε 4 από τις ασκήσεις.

1. a) Έστω $h \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^x h'(u) du$.
b) Έστω $f, g \in S(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\operatorname{supp} \widehat{f}, \operatorname{supp} \widehat{g} \subseteq [-M, M]$$

(δηλαδή, ώστε $\widehat{f} = \widehat{g} = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$). Δείξτε ότι

$$\|f \cdot g\|_{\infty} \leq 100 M \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

2. Δείξτε ότι υπάρχουν μη μηδενικές $h_1, h_2 \in S(\mathbb{R}^n)$ ώστε η $h_1 * h_2$ να είναι η μηδενική συνάρτηση.
(Αυτό δείχνει ότι ο χώρος $S(\mathbb{R}^n)$, εφοδιασμένος με την πράξη $*$, δεν είναι ομάδα, επειδή δεν έχει κάθε $h \in S(\mathbb{R}^n)$ αντίστροφο στοιχείο.)

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι, για κάποιο $R > 0$, ισχύει ότι $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$.
Αποδείξτε τα εξής:

- a) Η συνάρτηση $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη, με

$$(\widehat{f})'(\xi) = \widehat{g}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R},$$

όπου $g(x) = -2\pi i x f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου.)

- b) Δείξτε ότι

$$\|(\widehat{f})'\|_2 \leq (2\pi R) \|f\|_2.$$

4. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = e^{-|x|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε δείξει ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}.$$

- a) Δείξτε ότι η f δεν είναι συνάρτηση Schwartz.
b) Δείξτε ότι, παρόλα ταύτα, ο τύπος άθροισης του Poisson ισχύει για την f .
c) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{1 + 4\pi^2 k^2}.$$

d) Δείξτε ότι

$$\sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} e^{-|m|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2 \cdot (-1)^k}{1 + 4\pi^2 k^2}.$$

5. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$, ώστε:

- για κάθε διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$,
- για κάθε $\phi \in C^2([a, b])$, με $|\phi'| \geq 1$ και ϕ' μονότονη,
- για κάθε $\psi \in C^2([a, b])$ με $\psi \geq 0$, και
- για κάθε $\lambda > 0$,

να ισχύει ότι

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq C\lambda^{-1} \cdot (\|\psi\|_\infty + \|\psi\|_1 + \|\psi'\|_1).$$

6. Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι, π.χ., αν το πάτωμα του μπάνιου μας είναι 2.5×3.5 , και θέλουμε να τού βάλουμε πλακάκια, ακόμη και με άνισα μεγέθη, αλλά με κάθε πλακάκι να έχει κάποια πλευρά ακεραίου μήκους, τότε οπωσδήποτε θα πρέπει κάποιο πλακάκι να κοπεί.

Έστω $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

a) Δείξτε ότι κάποια από τις πλευρές του R έχει ακέραιο μήκος αν και μόνο αν

$$\int_R e^{2\pi i(x+y)} dx dy = 0.$$

b) Έστω $\mathcal{R}$ πεπερασμένη οικογένεια από ορθογώνια στον $\mathbb{R}^2$, με πλευρές παράλληλες στους άξονες, που είναι ξένα ανά δύο (με την εξαίρεση ότι επιτρέπεται να τέμνονται στα σύνορά τους). Έστω ότι

$$R = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}} \Delta.$$

Δείξτε ότι αν κάθε $\Delta \in \mathcal{R}$ έχει κάποια πλευρά ακεραίου μήκους, τότε επίσης κάποια πλευρά του R θα έχει ακέραιο μήκος.