

# Εισαγωγή στη δοκιμασία $\chi^2$ (Chi-square test)

**Σωτήρης Ρούσσος, PhD**

Εργαστήριο Υγιεινής, Επιδημιολογίας  
και Ιατρικής Στατιστικής, Ιατρική Σχολή Αθηνών

Αν θέλουμε να εξετάσουμε τη συσχέτιση μεταξύ  
**2 ποιοτικών** μεταβλητών  
(π.χ. κάπνισμα και φύλο)



**$\chi^2$ -test**

(μία από τις εφαρμογές του)

# Κατανομή συχνοτήτων κατά ένα ποιοτικό μέγεθος

**Κατανομή δείγματος 100 ατόμων κατά οικογενειακή κατάσταση**

| Παντρεμένοι | Ανύπαντροι | Άλλο | Σύνολο |
|-------------|------------|------|--------|
| 63          | 27         | 10   | 100    |

**Κατανομή δείγματος 150 ατόμων σύμφωνα με την παρουσία ή απουσία μιας νόσου**

| Ασθενείς | «Υγιείς» | Σύνολο |
|----------|----------|--------|
| 35       | 115      | 150    |

# Διαξονική κατανομή συχνοτήτων: Ταυτόχρονη κατανομή συχνοτήτων κατά δύο ποιοτικά χαρακτηριστικά

|        |     | Σωματική Άσκηση |        |      | Σύνολο |
|--------|-----|-----------------|--------|------|--------|
|        |     | Πολλή           | Μέτρια | Λίγη |        |
| ΧΑΠ*   | Ναι | 10              | 30     | 60   | 100    |
|        | Όχι | 20              | 40     | 40   | 100    |
| Σύνολο |     | 30              | 70     | 100  | 200    |

\*ΧΑΠ: Χρόνια Αποφρακτική Πνευμονοπάθεια

**Υπόθεση για έλεγχο:** Υπάρχει σχέση ανάμεσα στο βαθμό άσκησης και στην πιθανότητα ανάπτυξης ΧΑΠ;

Εναλλακτική διατύπωση: Διαφέρει η **αναλογία** υγιών (ασθενών) ανά κατηγορία άσκησης;

Εναλλακτική διατύπωση: Διαφέρει η **κατανομή άσκησης** στους ασθενείς και τους υγιείς;

# Αντι-παράδειγμα

## Πρόβλημα: Διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στο κάπνισμα και στον καρκίνο του στομάχου

---

Ένας γιατρός ρωτάει 100 ασθενείς με καρκίνο του στομάχου αν καπνίζουν και βρίσκει ότι:

|          | Καπνίζουν | Δεν καπνίζουν | Σύνολο |
|----------|-----------|---------------|--------|
| Ασθενείς | 80        | 20            | 100    |

*Μπορεί να συμπεράνει κανείς από τα δεδομένα αυτά ότι συσχετίζεται η εμφάνιση καρκίνου του στομάχου με το κάπνισμα?*

*Τι άλλο χρειάζεται να γνωρίζει?*

## Παραδείγματα αναλογιών

➤ Ο αριθμός των αγοριών στο σύνολο μιας τάξης είναι 40% ή 0,40

➤ Από 50 άτομα που αρρώστησαν από μία νόσο πέθαναν οι 10.

Η αναλογία (**θνητότητα**) είναι  $10/50 = 0,2 = 20\%$ : η πιθανότητα να πεθάνει κάποιος αν αρρωστήσει από τη συγκεκριμένη νόσο είναι ίση με 0,20.

# Η δοκιμασία $\chi^2$

➤ **Μη-παραμετρική** στατιστική δοκιμασία που χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί η συσχέτιση μεταξύ 2 κατηγορικών μεταβλητών

**Δεδομένα:** Παρουσίαση σε  $m = K \cdot L$  κελιά πίνακα, όπου  $K$  είναι οι κατηγορίες της μιας και  $L$  της άλλης κατηγορικής μεταβλητής

**Μηδενική Υπόθεση ( $H_0$ ):** Οι μεταβλητές δεν συσχετίζονται

**Εναλλακτική υπόθεση ( $H_1$ ):** Οι μεταβλητές συσχετίζονται

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O - E)^2}{E}$$

$O$ : παρατηρηθείσες συχνότητες

$E$ : αναμενόμενες συχνότητες

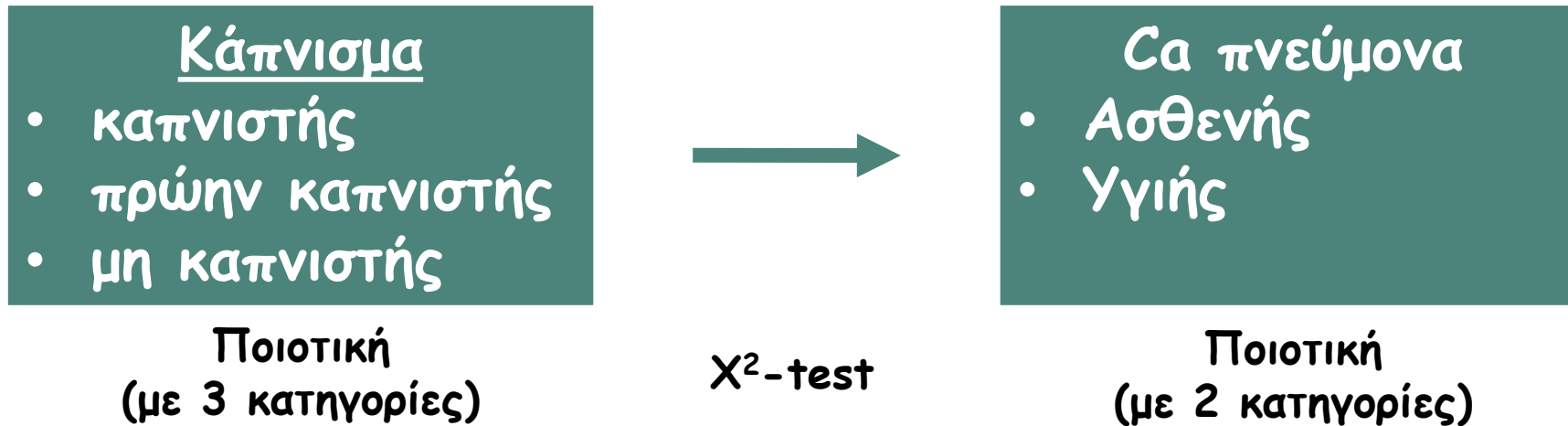
$m$ : αριθμός κελιών

**Μετρούμενα μεγέθη:** Συχνότητες στα  $m$  κελιά του πίνακα  $O_1, O_2, \dots, O_m$

# Παράδειγμα

Σε 100 άτομα με καρκίνο του πνεύμονα (cases) οι 24 είναι μη καπνιστές, οι 15 πρώην καπνιστές και οι 61 καπνιστές. Σε δείγμα 105 υγιών ατόμων (controls) οι 82 είναι μη καπνιστές και οι 13 πρώην καπνιστές.

(α) Υπάρχει σχέση ανάμεσα στον καρκίνο του πνεύμονα και τις καπνιστικές συνήθειες;





# Έλεγχος υπόθεσης αναλογιών

---

- **Ερευνητική υπόθεση:** Υπάρχει διαφορά στα ποσοστά της νόσου ανά κατηγορία καπνίσματος;
- **$H_0$ :** Δεν υπάρχει διαφορά στα ποσοστά της νόσου ανά κατηγορία καπνίσματος
- **$H_1$ :** Υπάρχει διαφορά στα ποσοστά της νόσου ανά κατηγορία καπνίσματος

# Δοκιμασία $\chi^2$ για συσχέτιση ποιοτικών χαρακτηριστικών

## ► Τρόπος υπολογισμού:

Υπολογίζω τον αριθμό ατόμων σε κάθε κελί του πίνακα που θα περίμενα αν **ΔΕΝ** υπήρχε σχέση μεταξύ καπνίσματος και Ca πνεύμονα  
(→ **Αναμενόμενες συχνότητες**)

Αν οι **παρατηρηθείσες** (Observed) συχνότητες διαφέρουν πολύ από τις **αναμενόμενες** (Expected), συμπεραίνω ότι υπάρχει σχέση μεταξύ καπνίσματος και Ca πνεύμονα

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O - E)^2}{E}$$

O: παρατηρηθείσες συχνότητες

E: αναμενόμενες συχνότητες

m: αριθμός κελιών

# Δοκιμασία $\chi^2$ για συσχέτιση ποιοτικών χαρακτηριστικών

Την υπολογισθείσα τιμή του  $\chi^2$  την συγκρίνουμε στη συνέχεια με τις οριακές τιμές στον αντίστοιχο πίνακα

- σε επίπεδο σημαντικότητας 5%
- σε βαθμούς ελευθερίας =  $(K - 1) \cdot (L - 1)$ , όπου  $K$ : αριθμός στηλών,  $L$ : αριθμός γραμμών του πίνακα

Αν  $\chi^2 \geq \text{οριακή τιμή}$   $\rightarrow$  απορρίπτω  $H_0$  και συμπεραίνω ότι η σχέση είναι στατιστικά σημαντική στο συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας (5% ή και μικρότερο, π.χ. 1%)

Αν  $\chi^2 < \text{οριακή τιμή}$   $\rightarrow$  η σχέση δεν είναι στατιστικά σημαντική

# Παρατηρηθείσες συχνότητες (Ο)

|                 | Κάπνισμα  |              |            |        |
|-----------------|-----------|--------------|------------|--------|
| Ca Πνεύμονα     | <i>Μη</i> | <i>Πρώην</i> | <i>Νυν</i> | Σύνολο |
| <i>Ασθενείς</i> | 24        | 15           | 61         | 100    |
| <i>Υγιείς</i>   | 82        | 13           | 10         | 105    |
| Σύνολο          | 106       | 28           | 71         | 205    |

# Παρατηρηθείσες συχνότητες (O)

|                 | Κάπνισμα     |              |             |               |
|-----------------|--------------|--------------|-------------|---------------|
| Ca Πνεύμονα     | <i>Μη</i>    | <i>Πρώην</i> | <i>Νυν</i>  | Σύνολο        |
| <i>Ασθενείς</i> | 24<br>(24%)  | 15<br>(15%)  | 61<br>(61%) | 100<br>(100%) |
| <i>Υγιείς</i>   | 82<br>(78%)  | 13<br>(12%)  | 10<br>(10%) | 105<br>(100%) |
| Σύνολο          | 106<br>(52%) | 28<br>(14%)  | 71<br>(34%) | 205<br>(100%) |

Είναι αυτές οι διαφορές στις αναλογίες πραγματικές

ή

είναι αποτέλεσμα τυχαίας διακύμανσης?

*Το  $\chi^2$  συγκρίνει τις αναλογίες της μίας κατηγορίας της μιας μεταβλητής μεταξύ των κατηγοριών της άλλης*

# Αναμενόμενες συχνότητες (Ε)

|                 | Κάπνισμα  |              |            |        |
|-----------------|-----------|--------------|------------|--------|
| Ca Πνεύμονα     | <i>Μη</i> | <i>Πρώην</i> | <i>Νυν</i> | Σύνολο |
| <i>Ασθενείς</i> | 24        | 15           | 61         | 100    |
| <i>Υγιείς</i>   | 82        | 13           | 10         | 105    |
| Σύνολο          | 106       | 28           | 71         | 205    |

# Αναμενόμενες συχνότητες (Ε)

|             | Κάπνισμα |       |     |        |
|-------------|----------|-------|-----|--------|
| Ca Πνεύμονα | Μη       | Πρώην | Νυν | Σύνολο |
| Ασθενείς    | 24       | 15    | 61  | 100    |
| Υγιείς      | 82       | 13    | 10  | 105    |
| Σύνολο      | 106      | 28    | 71  | 205    |

# Αναμενόμενες συχνότητες (Ε)

| Ca Πνεύμονα | Κάπνισμα |       |     | Σύνολο |
|-------------|----------|-------|-----|--------|
|             | Μη       | Πρώην | Νυν |        |
| Ασθενείς    | 24       | 15    | 61  | 100    |
| Υγιείς      | 82       | 13    | 10  | 105    |
| Σύνολο      | 106      | 28    | 71  | 205    |

Στους 205 υπάρχουν 106 μη καπνιστές  
Στους 100 καρκινοπαθείς Χ;

$$205 \cdot X = 100 \cdot 106$$

$$X = \frac{100 \cdot 106}{205} = 51,7$$

$$X = \frac{\text{αντ. οριζόντιο σύνολο} \cdot \text{αντ. καθετο σύνολο}}{\text{γενικό σύνολο}}$$



# Αναμενόμενες συχνότητες (Ε)

|                 | Κάπνισμα  |              |            |        |
|-----------------|-----------|--------------|------------|--------|
| Ca Πνεύμονα     | <i>Μη</i> | <i>Πρώην</i> | <i>Νυν</i> | Σύνολο |
| <i>Ασθενείς</i> | 24        | 15           | 61         | 100    |
| <i>Υγιείς</i>   | 82        | 13           | 10         | 105    |
| Σύνολο          | 106       | 28           | 71         | 205    |

# Αναμενόμενες συχνότητες (Ε)

| Ca Πνεύμονα | Κάπνισμα |       |     | Σύνολο |
|-------------|----------|-------|-----|--------|
|             | Μη       | Πρώην | Νυν |        |
| Ασθενείς    | 24       | 15    | 61  | 100    |
| Υγιείς      | 82       | 13    | 10  | 105    |
| Σύνολο      | 106      | 28    | 71  | 205    |

Στους 205 υπάρχουν 28 πρώην καπνιστές  
Στους 105 υγιείς Χ;

$$205 \cdot X = 105 \cdot 28$$

$$X = \frac{105 \cdot 28}{205} = 14,3$$

$$X = \frac{\text{αντ. οριζόντιο σύνολο} \cdot \text{αντ. κατατο σύνολο}}{\text{γενικό σύνολο}}$$

# Πίνακας παρατηρηθεισών και αναμενόμενων συχνοτήτων

|                       | Κάπνισμα  |              |            |        |
|-----------------------|-----------|--------------|------------|--------|
| Ca Πνεύμονα           | <i>Μη</i> | <i>Πρώην</i> | <i>Νυν</i> | Σύνολο |
| <i>Ασθενείς (Ο Ε)</i> | 24   51,7 | 15   13,7    | 61   34,6  | 100    |
| <i>Υγιείς (Ο Ε)</i>   | 82   54,3 | 13   14,3    | 10   36,4  | 105    |
| Σύνολο                | 106       | 28           | 71         | 205    |

***Είναι οι διαφορές πραγματικές ή είναι αποτέλεσμα τυχαίας διακύμανσης;***

→ **X<sup>2</sup>-test:** Θα υπολογίσω την πιθανότητα να βρω τέτοιας τάξης διαφορές στην τύχη - όταν δηλαδή δεν υπάρχει σχέση μεταξύ καπνίσματος και καρκίνου

- Αν η πιθανότητα να βρω τέτοιας τάξης διαφορές **κατά τύχη** είναι πολύ μικρή ( $\leq 0,05$ ) τότε οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές

Οι στήλες του Πίνακα K=3, οι γραμμές του Πίνακα L=2, κελιά=6

# Προϋποθέσεις για $\chi^2$

---

- Όλες οι **αναμενόμενες** συχνότητες  $> 1$

&

- Το πολύ 20% των αναμενόμενων συχνοτήτων  $< 5$

# Υπολογισμός του $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O - E)^2}{E}$$

O: παρατηρηθείσες συχνότητες

E: αναμενόμενες συχνότητες

m: αριθμός κελιών

|                | Κάπνισμα  |           |           |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| Ca Πνεύμονα    | Μη        | Πρώην     | Νυν       |
| Ασθενείς (O E) | 24   51,7 | 15   13,7 | 61   34,6 |
| Υγιείς (O E)   | 82   54,3 | 13   14,3 | 10   36,4 |

$$\chi^2 = \frac{(24 - 51,7)^2}{51,7} + \frac{(15 - 13,7)^2}{13,7} + \frac{(61 - 34,6)^2}{34,6} + \frac{(82 - 54,3)^2}{54,3} + \frac{(13 - 14,3)^2}{14,3} + \frac{(10 - 36,4)^2}{36,4}$$

$$\chi^2 = 14,8 + 0,1 + 20,1 + 14,1 + 0,1 + 19,2 = 68,4$$

# Πως κρίνω αν η διαφορά είναι «αρκετά μεγάλη»

Ανατρέχω στον αντίστοιχο πίνακα

Βαθμοί ελευθερίας:

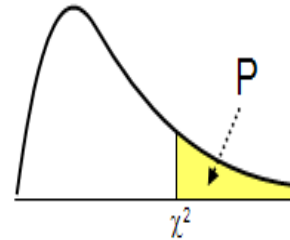
$$(K - 1)(L - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$$

K: αριθμός στηλών,

L: αριθμός γραμμών

Αν  $X^2 \geq$  οριακή τιμή  $\rightarrow$  απορρίπτω  $H_0$   
και συμπεραίνω ότι  
η σχέση είναι στατιστικά σημαντική  
στο συγκεκριμένο επίπεδο  
σημαντικότητας

Chi-square distribution table



|    | P         |          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|-----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| DF | 0.995     | 0.975    | 0.20   | 0.10   | 0.05   | 0.025  | 0.02   | 0.01   | 0.005  | 0.002  | 0.001  |
| 1  | 0.0000393 | 0.000982 | 1.642  | 2.706  | 3.841  | 5.024  | 5.412  | 6.635  | 7.879  | 9.550  | 10.828 |
| 2  | 0.0100    | 0.0506   | 3.219  | 4.605  | 5.991  | 7.378  | 7.824  | 9.210  | 10.597 | 12.429 | 13.816 |
| 3  | 0.0717    | 0.216    | 4.642  | 6.251  | 7.815  | 9.348  | 9.837  | 11.345 | 12.838 | 14.796 | 16.266 |
| 4  | 0.207     | 0.484    | 5.989  | 7.779  | 9.488  | 11.143 | 11.668 | 13.277 | 14.860 | 16.924 | 18.467 |
| 5  | 0.412     | 0.831    | 7.289  | 9.236  | 11.070 | 12.833 | 13.388 | 15.086 | 16.750 | 18.907 | 20.515 |
| 6  | 0.676     | 1.237    | 8.558  | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 15.033 | 16.812 | 18.548 | 20.791 | 22.458 |
| 7  | 0.989     | 1.690    | 9.803  | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 16.622 | 18.475 | 20.278 | 22.601 | 24.322 |
| 8  | 1.344     | 2.180    | 11.030 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 18.168 | 20.090 | 21.955 | 24.352 | 26.124 |

|    |      |      |      |       |
|----|------|------|------|-------|
| BE | 10%  | 5%   | 1%   | 0,10% |
| 2  | 4,61 | 5,99 | 9,21 | 13,82 |

$\uparrow$   
 $X^2=68,4$   
 $68,4 > 13,82$   
 $p < 0,001$

# Αξιολόγηση: συμπέρασμα - ερμηνεία

---

**Συμπέρασμα:** Υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ καρκίνου του πνεύμονα και ιστορικού καπνίσματος

**Ερμηνεία:** Οι καπνιστές έχουν αυξημένο κίνδυνο ανάπτυξης καρκίνου του πνεύμονα από τον αναμενόμενο, οι μη καπνιστές μικρότερο, ενώ στους πρώην δεν αλλάζει

Takemura et al. **Relation between Breastfeeding and the Prevalence of Asthma. The Tokorozawa Childhood Asthma and Pollinosis Study.** Am. Journal of Epidemiology, 2001

**TABLE 2.** Comparison between subjects with asthma (*n* = 2,315) and controls (*n* = 21,513), according to selected risk factors, Tokorozawa Childhood Asthma and Pollinosis Study, Japan, February 2–17, 1998

| Variables                  | Asthma<br>(mean (SD*)) |      | Controls<br>(mean (SD)) |      | <i>p</i><br>value |
|----------------------------|------------------------|------|-------------------------|------|-------------------|
| Age (years)                | 10.71 (2.45)           |      | 10.77 (2.53)            |      | 0.30†             |
|                            | No.                    | %    | No.                     | %    |                   |
| Gender                     |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| Male                       | 1,429                  | 61.7 | 10,676                  | 49.6 |                   |
| Female                     | 886                    | 38.3 | 10,837                  | 50.4 |                   |
| Parental smoking           |                        |      |                         |      | 0.14‡             |
| (+)                        | 1,254                  | 54.2 | 11,997                  | 55.8 |                   |
| (–)                        | 1,061                  | 45.8 | 9,516                   | 44.2 |                   |
| Parental history of asthma |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| (+)                        | 522                    | 22.6 | 1,898                   | 8.8  |                   |
| (–)                        | 1,793                  | 77.4 | 19,615                  | 91.2 |                   |
| Feeding pattern            |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| Breastfeeding only         | 992                    | 42.9 | 8,620                   | 40.1 |                   |
| Mixed                      | 966                    | 41.7 | 9,134                   | 42.4 |                   |
| Artificial feeding         | 357                    | 15.4 | 3,759                   | 17.5 |                   |

\* SD, standard deviation.

† *p* value for *t* test.

‡ *p* value for chi-squared test.



**Ερμηνεία:**

Γονείς καπνιστές (ναι/όχι) – άσθμα (ναι/όχι)

p-value = 0.14, σχέση μη στατιστικά σημαντική

**Ερμηνεία:**

Γονείς με άσθμα (ναι/όχι) – άσθμα (ναι/όχι)

p-value < 0.01, σχέση στατιστικά σημαντική

**Ερμηνεία:**

Θηλασμός (αποκλειστικά/αποκλειστικά με συμπλήρωμα γάλακτος/συνδυασμός) – άσθμα (ναι/όχι)

p-value < 0.01, σχέση στατιστικά σημαντική

Takemura et al. **Relation between Breastfeeding and the Prevalence of Asthma. The Tokorozawa Childhood Asthma and Pollinosis Study.** Am. Journal of Epidemiology, 2001

**TABLE 2.** Comparison between subjects with asthma ( $n = 2,315$ ) and controls ( $n = 21,513$ ), according to selected risk factors, Tokorozawa Childhood Asthma and Pollinosis Study, Japan, February 2–17, 1998

| Variables                  | Asthma<br>(mean (SD*)) |      | Controls<br>(mean (SD)) |      | <i>p</i><br>value |
|----------------------------|------------------------|------|-------------------------|------|-------------------|
| Age (years)                | 10.71 (2.45)           |      | 10.77 (2.53)            |      | 0.30†             |
|                            | No.                    | %    | No.                     | %    |                   |
| Gender                     |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| Male                       | 1,429                  | 61.7 | 10,676                  | 49.6 |                   |
| Female                     | 886                    | 38.3 | 10,837                  | 50.4 |                   |
| Parental smoking           |                        |      |                         |      | 0.14‡             |
| (+)                        | 1,254                  | 54.2 | 11,997                  | 55.8 |                   |
| (–)                        | 1,061                  | 45.8 | 9,516                   | 44.2 |                   |
| Parental history of asthma |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| (+)                        | 522                    | 22.6 | 1,898                   | 8.8  |                   |
| (–)                        | 1,793                  | 77.4 | 19,615                  | 91.2 |                   |
| Feeding pattern            |                        |      |                         |      | <0.01‡            |
| Breastfeeding only         | 992                    | 42.9 | 8,620                   | 40.1 |                   |
| Mixed                      | 966                    | 41.7 | 9,134                   | 42.4 |                   |
| Artificial feeding         | 357                    | 15.4 | 3,759                   | 17.5 |                   |

Ωστόσο η δοκιμασία  $\chi^2$  δεν δίνει το μέγεθος της σχέσης...

# Δοκιμασία $\chi^2$ κατά ζεύγη (McNemar's test)

- Εφαρμόζεται όταν υπάρχει αντιστοιχία των παρατηρήσεων ανά ζεύγη
  - Πχ. πριν-μετά στα ίδια άτομα
  - Πχ. εξομοιωμένα ζεύγη ατόμων σε μελέτες ασθενών μαρτύρων
- Το  $\chi^2$  κατά ζεύγη είναι πιο ισχυρό από το απλό  $\chi^2$ , εφόσον βέβαια έχουμε την αντιστοιχία σε ζεύγη.

# Δοκιμασία $\chi^2$ κατά ζεύγη (McNemar's test)

**Παράδειγμα:** Θέλουμε να διερευνήσουμε αν η ποιότητα ζωής βελτιώνεται με βάση συγκεκριμένη θεραπευτική αγωγή για το άσθμα.

Εκτιμούμε την ποιότητα ζωής με βάση ερωτηματολόγιο πριν και μετά την εφαρμογή της θεραπευτικής αγωγής για 1 μήνα σε 100 άτομα.

| Ποιότητα ζωής |                         |                |
|---------------|-------------------------|----------------|
| προ-θεραπείας | 1 μήνα μετά τη θεραπεία | Συχνότητα      |
| Καλή          | Καλή                    | 30             |
| Κακή          | Κακή                    | 50             |
| Καλή          | Κακή                    | 5 = $\epsilon$ |
| Κακή          | Καλή                    | 15 = $\zeta$   |

*Discordant pairs*

$\chi^2$  κατά ζεύγη: βασίζεται στα  $\epsilon$  και  $\zeta$   
 $\epsilon = \zeta$  εάν ισχύει η μηδενική υπόθεση

# Δοκιμασία $\chi^2$ κατά ζεύγη (McNemar's test)

**Δεδομένα:** Από τα 100 άτομα, 30 δήλωσαν καλή και πριν και μετά, 50 σε κανέναν, 5 μόνο πριν τη θεραπεία, 15 μόνο μετά τη θεραπεία

Πιθανότητα καλής ποιότητας ζωής (ΚΛΠΖ) = % ατόμων που δήλωσαν  
καλή ποιότητα ζωής

$$P(\text{ΚΛΠΖ προ θεραπείας}) = \frac{30+5}{100} = \frac{30+5}{100} = 35\%$$

$$P(\text{ΚΛΠΖ μετά θεραπείας}) = \frac{30+15}{100} = \frac{30+15}{100} = 45\%$$

***Τυχαία ή στατιστικά σημαντική η διαφορά του 10%;***

## Τύπος για τη δοκιμασία $\chi^2$ κατά ζεύγη

$$\chi^2 = \frac{(\varepsilon - \zeta)^2}{\varepsilon + \zeta}$$

$$\chi^2 = \frac{(\varepsilon - \zeta)^2}{\varepsilon + \zeta} = \frac{(5 - 15)^2}{5 + 15} = \frac{(-10)^2}{20} = \frac{100}{20} = 5$$

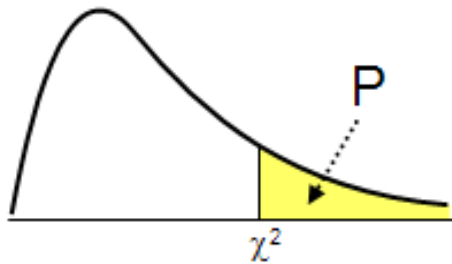
$$\chi^2 \text{ κατά ζεύγη} = 5$$

# Πως κρίνω αν η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική;

Ανατρέχω στον αντίστοιχο πίνακα

► Βαθμοί ελευθερίας = 1

Chi-square distribution table



$$5 > 3.841$$

Στατιστικά σημαντικό στο 5% ( $p < 0.05$ )

|    | P         |          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|-----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| DF | 0.995     | 0.975    | 0.20   | 0.10   | 0.05   | 0.025  | 0.02   | 0.01   | 0.005  | 0.002  | 0.001  |
| 1  | 0.0000393 | 0.000982 | 1.642  | 2.706  | 3.841  | 5.024  | 5.412  | 6.635  | 7.879  | 9.550  | 10.828 |
| 2  | 0.0100    | 0.0506   | 3.219  | 4.605  | 5.991  | 7.378  | 7.824  | 9.210  | 10.597 | 12.429 | 13.816 |
| 3  | 0.0717    | 0.216    | 4.642  | 6.251  | 7.815  | 9.348  | 9.837  | 11.345 | 12.838 | 14.796 | 16.266 |
| 4  | 0.207     | 0.484    | 5.989  | 7.779  | 9.488  | 11.143 | 11.668 | 13.277 | 14.860 | 16.924 | 18.467 |
| 5  | 0.412     | 0.831    | 7.289  | 9.236  | 11.070 | 12.833 | 13.388 | 15.086 | 16.750 | 18.907 | 20.515 |
| 6  | 0.676     | 1.237    | 8.558  | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 15.033 | 16.812 | 18.548 | 20.791 | 22.458 |
| 7  | 0.989     | 1.690    | 9.803  | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 16.622 | 18.475 | 20.278 | 22.601 | 24.322 |
| 8  | 1.344     | 2.180    | 11.030 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 18.168 | 20.090 | 21.955 | 24.352 | 26.124 |

# Τύπος για τη δοκιμασία $\chi^2$ κατά ζεύγη

---

**Συμπέρασμα:** Υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ ποιότητας ζωής και λήψης της θεραπευτικής αγωγής

**Ερμηνεία:** Η ποιότητα ζωής φαίνεται να βελτιώνεται με την χρήση της συγκεκριμένης θεραπευτικής αγωγής σε ασθενείς με άσθμα



# Διαστήματα αξιοπιστίας αναλογιών

- Μία αναλογία  $p = \frac{r}{n}$  που υπολογίστηκε από κάποιο δείγμα υπόκειται σε **τυχαία δειγματοληπτική διακύμανση**
- Δειγματοληπτική διακύμανση = **πιθανό σφάλμα**, υπολογίζεται διαφορετικά ανάλογα με τον αριθμό  $n$  και την υπολογισθείσα  $p$
- Π.χ. Για μεγάλα  $n$ ,  $p$ :  $SE(p) = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ , όπου  $q = (1 - p)$
- Όρια αξιοπιστίας της αναλογίας (κατ' αναλογία με τα όρια αξιοπιστίας μέσης τιμής)
- **Περιορισμός:** οι αναλογίες (και συνεπώς τα όρια αξιοπιστίας τους) δεν μπορούν να είναι μικρότερες του 0 ή μεγαλύτερες του 1.

# Παράδειγμα

Ανάμεσα σε 240 άτομα τα 34 βρέθηκαν να είναι Rhesus αρνητικά. Ποια είναι η αναλογία των ατόμων αυτών και ποια είναι τα 95% όρια αξιοπιστίας της;

- $p = \frac{34}{240} = 0.142$
- $SE(p) = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.142 \cdot (1-0.142)}{240}} = \sqrt{\frac{0.122}{240}} = 0.0225$
- $p \pm 1.96 \cdot SE(p) = 0.142 \pm 1.96 \cdot 0.0225 = 0.142 \pm 0.044$

**95% CI: (0.098–0.186)**

Άρα η πραγματική αναλογία των Rhesus αρνητικών στον αντίστοιχο πληθυσμό περιλαμβάνεται με πιθανότητα 95% ανάμεσα στα όρια 0.098 και 0.186. Η πιθανότερη τιμή της αναλογίας αυτής είναι εκείνη που υπολογίστηκε, δηλαδή 0.142.