ΙΑΤΡΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Νίκος Πανταζής
Επίκουρος Καθηγητής Επιδημιολογίας και Ιατρικής Στατιστικής
Εργαστήριο Υγιεινής, Επιδημιολογίας και Ιατρικής Στατιστικής
npantaz@med.uoa.gr

Φίλιππος Ορφανός
Ε.ΔΙ.Π. Επιδημιολογίας και Ιατρικής Στατιστικής
Εργαστήριο Υγιεινής, Επιδημιολογίας και Ιατρικής Στατιστικής
phorfanos@med.uoa.gr

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Περιγραφική στατιστική:
Συνοπτική παρουσίαση δεδομένων

π.χ.
•Μέσα επίπεδα χοληστερόλης σε ένα δείγμα ενηλίκων

•Κατανομή ύψους σε παιδιά 0-14 ετών στην Ελλάδα

Στατιστική συμπερασματολογία:
Συναγωγή συμπερασμάτων για τη σχέση π.χ. μίας μεταβλητής με μία άλλη

π.χ.
•Υπάρχει σχέση μεταξύ καπνίσματος και επιπέδων χοληστερόλης;
•Υπάρχει επίδραση των επιπέδων μολύβδου στο ανάστημα των παιδιών;

Περιγραφική στατιστική

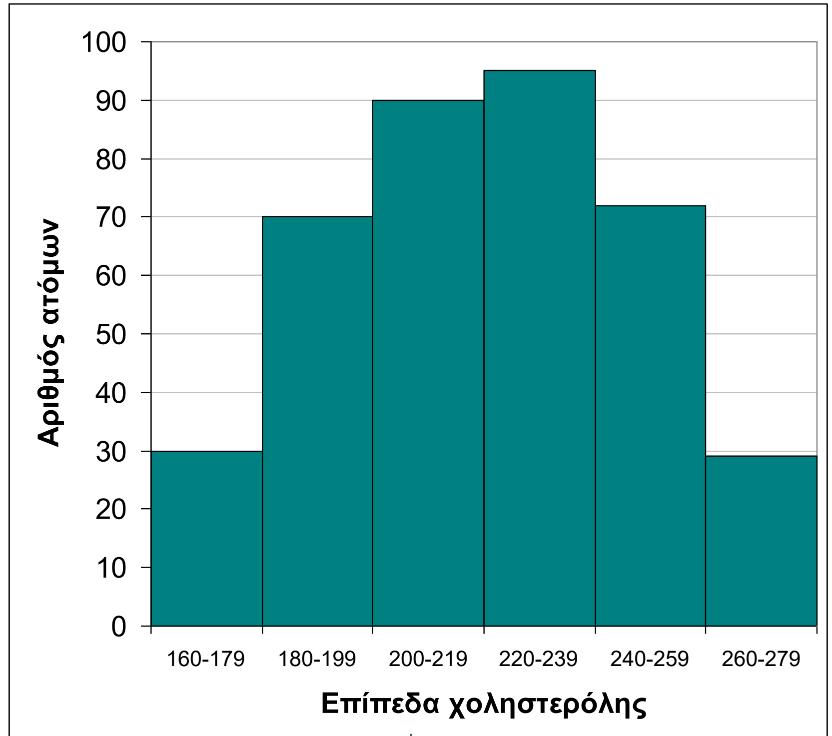
Μεταβλητές

Ποιοτικές
(π.χ. Φύλο, Απουσία/Παρουσία παθολογικού χαρακτηριστικού κλπ)

Ποσοτικές
(Ηλικία, ύψος, επίπεδα σακχάρου κλπ)

Παράδειγμα

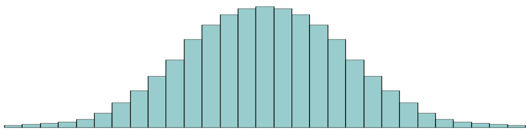
ΑΑ	Επίπεδα χοληστερόλης
1	270
2	180
3	200
4	221
…	…
…	…
250	225



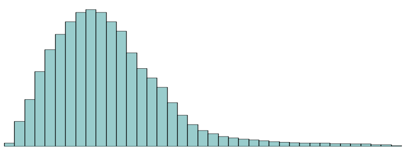
Αντιπροσωπευτικές τιμές θέσης	Αντιπροσωπευτικές τιμές διασποράς
Μέση τιμή (Mean)	Σταθερή απόκλιση (SD)
Διάμεση (Median)	Εκατοστημόρια (Percentiles)
Επικρατούσα ή κορυφή (Mode)	Ακραίες τιμές (Range)

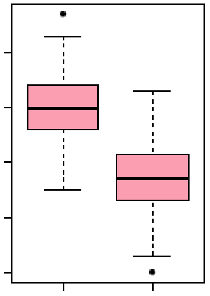
Κατανομές και μέτρα θέσης και διασποράς

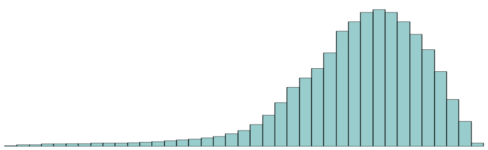
Αν συμμετρικές κατανομές (π.χ. κανονική κατανομή) τότε καταλληλότερα μέτρα είναι η **μέση τιμή** και **σταθερή απόκλιση** και χρησιμοποιείται κυρίως το **ιστόγραμμα**



Αν ασύμμετρες κατανομές (π.χ. λοξή θετικά ή αρνητικά) τότε καταλληλότερα μέτρα είναι η **διάμεσος** (που δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές) και **τα εκατοστημόρια (25ο και 75ο)** και χρησιμοποιείται κυρίως το **θηκόγραμμα**

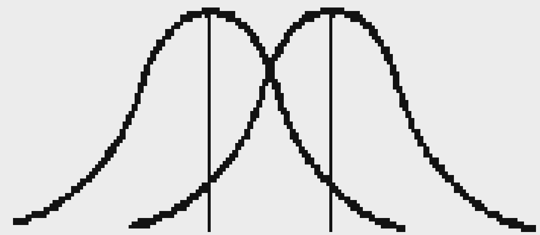




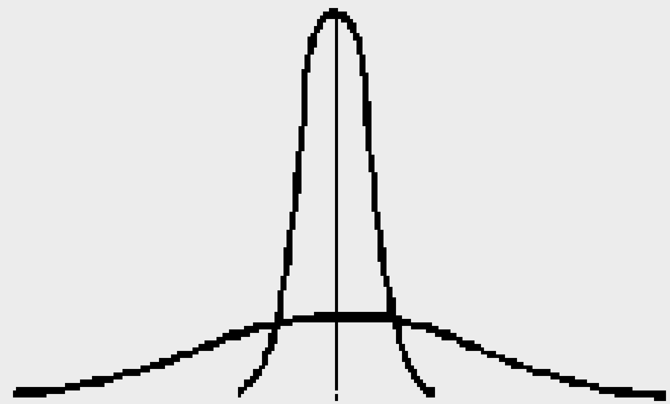


Αν ποιοτικές μεταβλητές τότε χρησιμοποιούνται **ραβδογράμματα** ή κυκλικά διαγράμματα (**πίττες**)

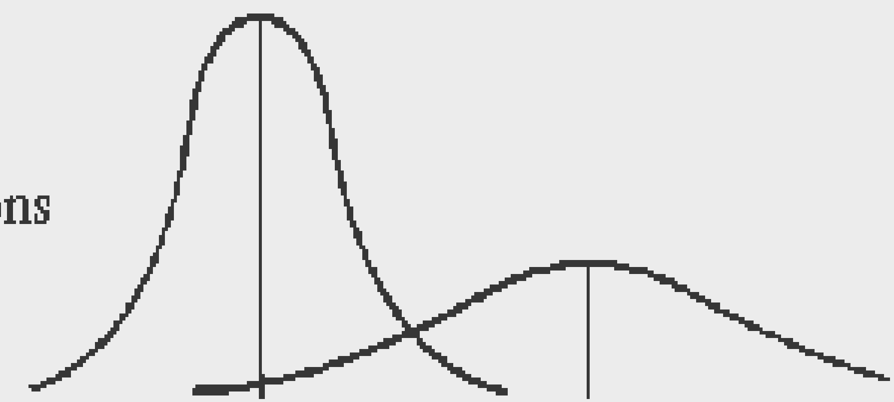
Different Means
Same Standard Deviation



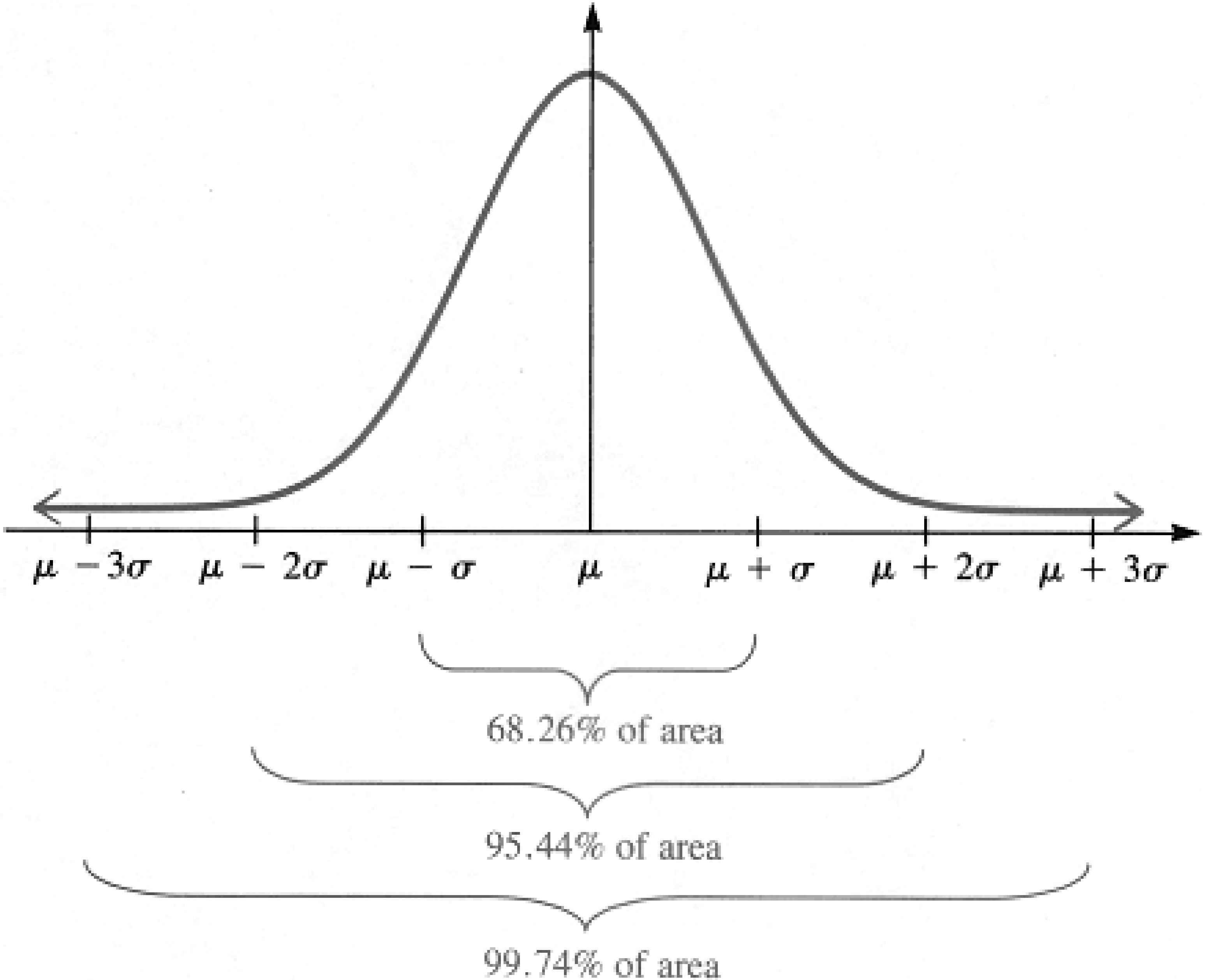
Same Mean
Different Standard Deviations



Different Means
Different Standard Deviations



Κανονική κατανομή Ν(μ, σ^2)



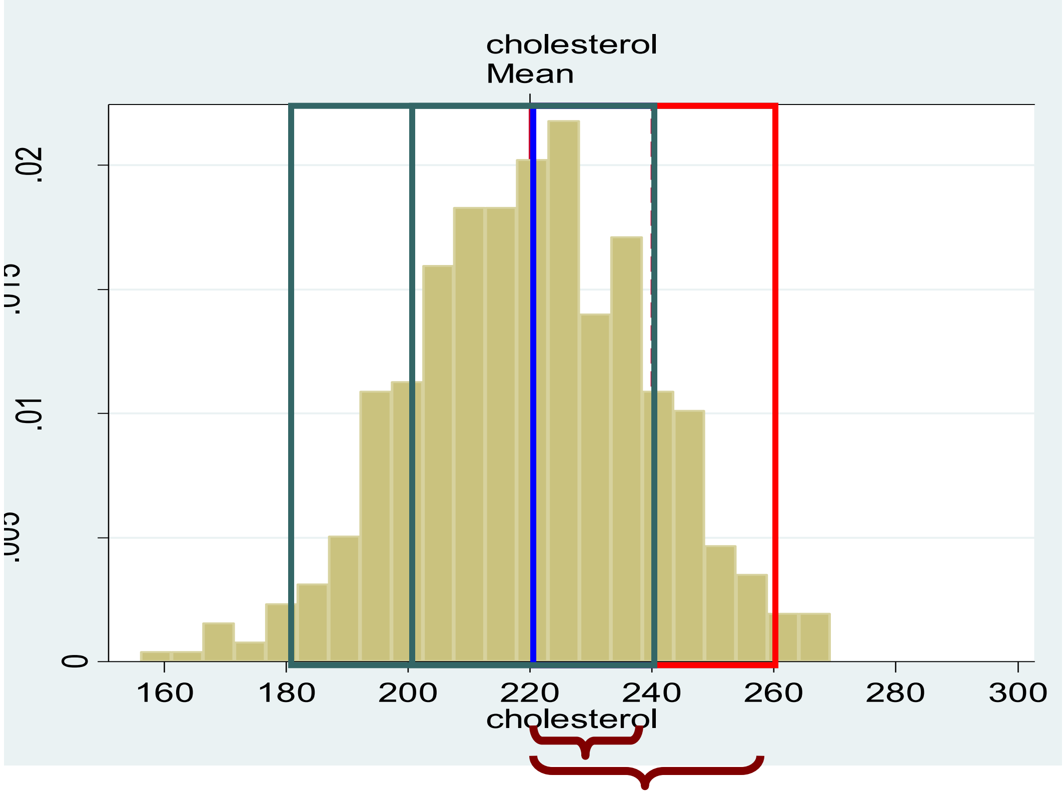
Παράδειγμα

- N=500 άτομα
- Χοληστερόλη
  - Μέση τιμή ($\bar{X}$) 220 μg/dl
  - Σταθερή απόκλιση (SD) 20 μg/dl

Πως μεταφράζεται η σταθερή απόκλιση;

π.χ. Περίπου το 95% των ατόμων έχουν επίπεδα χοληστερόλης στο εύρος $\bar{X}\pm2*SD$ (δηλαδή από 180-260 μg/dl) (υποθέτοντας ότι το μέγεθος ακολουθεί την κανονική κατανομή)

α) Πόσοι περίπου έχουν τιμές χοληστερόλης 240-260 μg/dl;



- Στο 180-260 μg/dl (X±2*SD): 95% των παρατηρήσεων
- Επομένως, στο **220-260** το (95/2)% = 47,5 % των παρατηρήσεων
- Στο 200-240 (X±1*SD): 68% των παρατηρήσεων
- Επομένως στο **220-240**: (68/2)=34% των παρατηρήσεων

- Τελικά, στο 240-260: 47,5%-34% =13,5 % των παρατ.

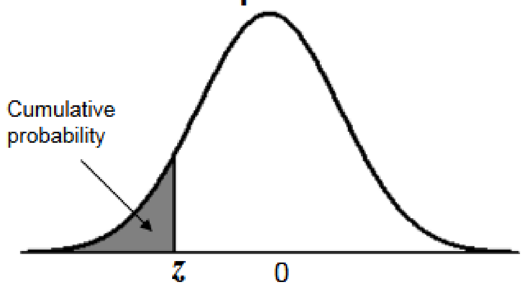
n1 = 13,5 % * 500 = 68 άτομα

β) Πόσοι περίπου έχουν τιμές χοληστερόλης 170-210 μg/dl;

- Οι τιμές 170 και 210 δεν μπορούν να προκύψουν από προσθαφαίρεση ακέραιων πολλαπλασίων της SD
- Θα εργαστούμε με το μετασχηματισμό $z=(x-\mu)/\sigma$ και πίνακες αθροιστικής κατανομής της N(0,1)
- Πίνακες δίνουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της N(0,1) [συνηθίζεται η ονομασία Φ(z)] δηλ. την πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την N(0,1) να είναι μικρότερη κάποιας δεδομένης τιμής z: $Pr(Z<z)$, $Z \sim N(0,1)$
  - $P(170<X<210)=$
  - $P[(170-220)/20 < Z < (210-220)/20]=$
  - $P(-2{,}5 < Z < -0{,}5)=$
  - $\Phi(-0{,}5)-\Phi(-2{,}5)=$
  - 0,30854 - 0,00621 = 0,30233 ή 30,23%
- n=30,23%*500=151 άτομα

TABLES

Cumulative probabilities for the standard normal distribution



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483

Άσκηση

Σε ένα τυχαίο δείγμα 1098 ατόμων ηλικίας 20-39 ετών από έναν πληθυσμό, η μέση τιμή της απώλειας επιθηλιακής πρόσφυσης είναι 0.82 mm και η σταθερή απόκλιση 0.23 mm.

(α) Πόσα περίπου άτομα θα έχουν τιμές απώλειας επιθηλιακής πρόσφυσης μεταξύ 1.05 και 1.28 mm;

(β) Πόσα άτομα θα έχουν τιμές πάνω από 0.50 mm;

Άσκηση

- N=1098 άτομα

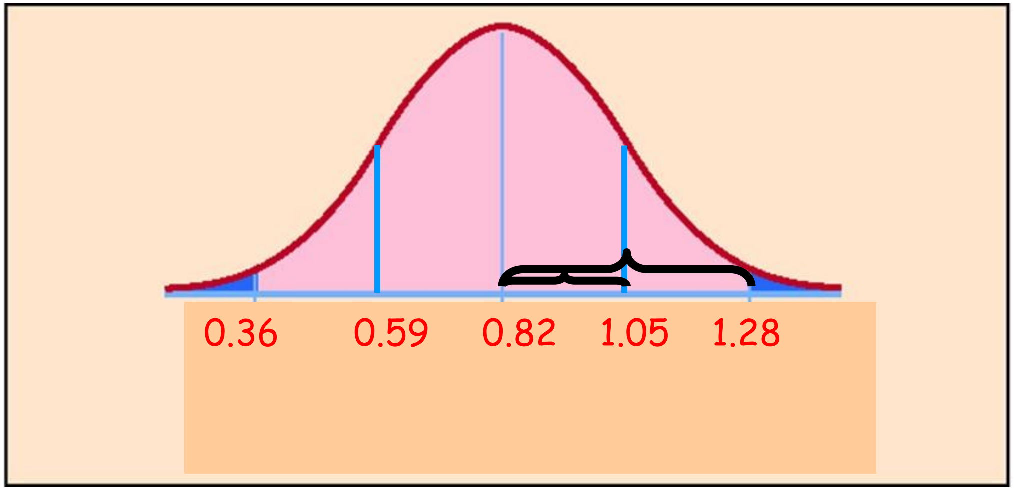
- Επιθηλιακή πρόσφυση
  - Μέση τιμή ($\bar{X}$) 0.82 mm
  - Σταθερή απόκλιση (SD) 0.23 mm

Πως μεταφράζεται η σταθερή απόκλιση;

π.χ. Περίπου το 95% των ατόμων έχουν επιθηλιακή πρόσφυση στο εύρος $\bar{X}$ ± 2*SD (δηλαδή από 0.36 – 1.28 mm)

(υποθέτοντας ότι το μέγεθος ακολουθεί την κανονική κατανομή)

Πόσα άτομα έχουν τιμές απώλειας επιθηλ. πρόσφ. 1.05 – 1.28



α) 0.36 – 1.28 → **95%** των παρατηρήσεων

0.82 – 1.28 → $\frac{95}{2}$ % = 47.5 % των παρατηρήσεων

0.59 – 1.05 → **68%** των παρατηρήσεων

0.82 – 1.05 → $\frac{68}{2}$ % = 34 % παρατηρήσεων

Τελικά από 1.05 έως 1.28: 47.5%-34% = 13.5 % των παρατ.

n1 = 13.5 % * 1098 ≅ 148 άτομα

β) Θέλουμε να βρούμε πόσα περίπου άτομα θα έχουν τιμές πάνω από 0.50 mm

$\overline{X} - z * SD = 0.50$

0.82 - z * 0.23 = 0.50 $\Rightarrow$ z * 0.23 = 0.82-0.50

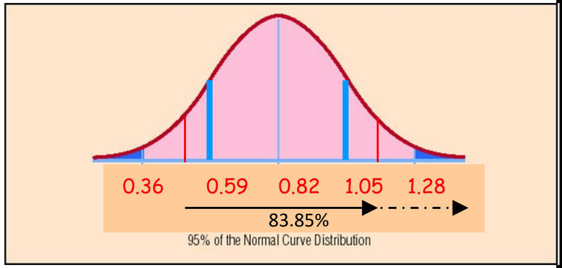
z * 0.23 =0.32 $\Rightarrow$ **z = 1.4**

0.82 – 1.4 * 0.23, 0.82 + 1.4 * 0.23
0.50 , 1.14 → **83.85 % παρατ.**

Εκτός 16.15%
Πάνω από 1.14:
16.15 / 2= 8.1 % παρατ.

Άρα συνολικά 83.85+8.1=91.95 %

n_2 = 91.95 % * 1098 $\cong$ 1010 **άτομα**



ΠΙΝΑΚΑΣ Π1

Κανονική κατανομή. **Το εκατοστιαίο ποσοστό των παρατηρήσεων των οποίων οι τιμές περιλαμβάνονται μεταξύ των τιμών $\bar{x}$ + Zs και $\bar{x}$ − Zs και το εκατοστιαίο ποσοστό των παρατηρήσεων των οποίων οι τιμές βρίσκονται εκτός των παραπάνω τιμών (δηλαδή είναι μεγαλύτερες της $\bar{x}$ + Zs ή μικρότερες της $\bar{x}$ − Zs). Με $\bar{x}$ παριστάνεται η μέση τιμή, με s η σταθερή απόκλιση και με Z το κάθε φορά υποπολλαπλάσιο ή πολλαπλάσιο της σταθερής απόκλισης (standard normal deviate).**

Z	Μεταξύ των $\bar{x}$ + Zs και $\bar{x}$ − Zs	Εκτός των $\bar{x}$ + Zs και $\bar{x}$ − Zs
0,00	0,00	100,00
0,10	7,97	92,03
0,20	15,85	84,15
0,30	23,58	76,42
0,40	31,08	68,92
0,50	38,29	61,71
0,60	45,15	54,85
0,70	51,61	48,39
0,80	57,63	42,37
0,90	63,19	36,81
1,00	68,27	31,73
1,10	72,87	27,13
1,20	76,99	23,01
1,30	80,64	19,36
1,40	83,85	16,15
1,50	86,64	13,36
1,60	89,04	10,96
1,645	**90,00**	**10,00**
1,70	91,09	8,91
1,80	92,81	7,19
1,90	94,26	5,74
1,960	**95,00**	**5,00**
2,00	95,44	4,56
2,10	96,43	3,57
2,20	97,22	2,78
2,30	97,85	2,15
2,40	98,36	1,64
2,50	98,76	1,24
2,576	**99,00**	**1,00**
2,60	99,07	0,93
2,70	99,31	0,69
2,80	99,49	0,51
2,90	99,63	0,37
3,00	99,73	0,27
3,10	99,81	0,19
3,20	99,86	0,14
3,30	99,90	0,10
3,40	99,93	0,07
3,50	99,95	0,05
3,891	99,99	0,01

γ) Πώς ορίζονται τα φυσιολογικά όρια;

$$\bar{X} \pm 2 * SD$$

$$220 \pm 2 * 20$$

180 260

Εντός (180 – 260) → 95 % των παρατηρήσεων

Εκτός (180 – 260) → 5 % των παρατηρήσεων

n = 5 % * 500 = **25 άτομα**

Παράδειγμα

- 25 παιδιά από πόλη Α (χαμηλά επίπεδα μολύβδου)
- 20 παιδιά από πόλη Β (υψηλά επίπεδα μολύβδου)

- Διαφέρει το ανάστημα των παιδιών στις δύο περιοχές;

Περιοχή
(επίπεδα μολύβδου)

???

Ανάστημα παιδιών

Ποιοτική μεταβλητή με 2 επίπεδα:
Περιοχή Α – Περιοχή Β

Ποσοτική μεταβλητή

One-sample t-test, independent samples t-test, paired t-test

H_0: $\mu_1 = \mu_0$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_0$

$\longrightarrow$ $t = \dfrac{|\bar{X} - \mu_0|}{SE_{\bar{X}}}$, *n-1 β.ε.*

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

$\longrightarrow$ $t = \dfrac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{SE_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}}$, *n-2 β.ε.*

H_0: $\mu_\delta = 0$

H_1: $\mu_\delta \neq 0$

$\longrightarrow$ $t = \dfrac{|\bar{d}|}{SE_{\bar{d}}}$, *n-1 β.ε.*

t-test δύο ανεξάρτητων δειγμάτων

- **Προϋποθέσεις**:
  - Η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει ακολουθεί την κανονική κατανομή και στους 2 ανεξάρτητους πληθυσμούς.
  - Οι τυπικές αποκλίσεις δεν διαφέρουν.(F-test). Εναλλακτικά ελέγχουμε αν η μια δεν είναι διπλάσια της άλλης.

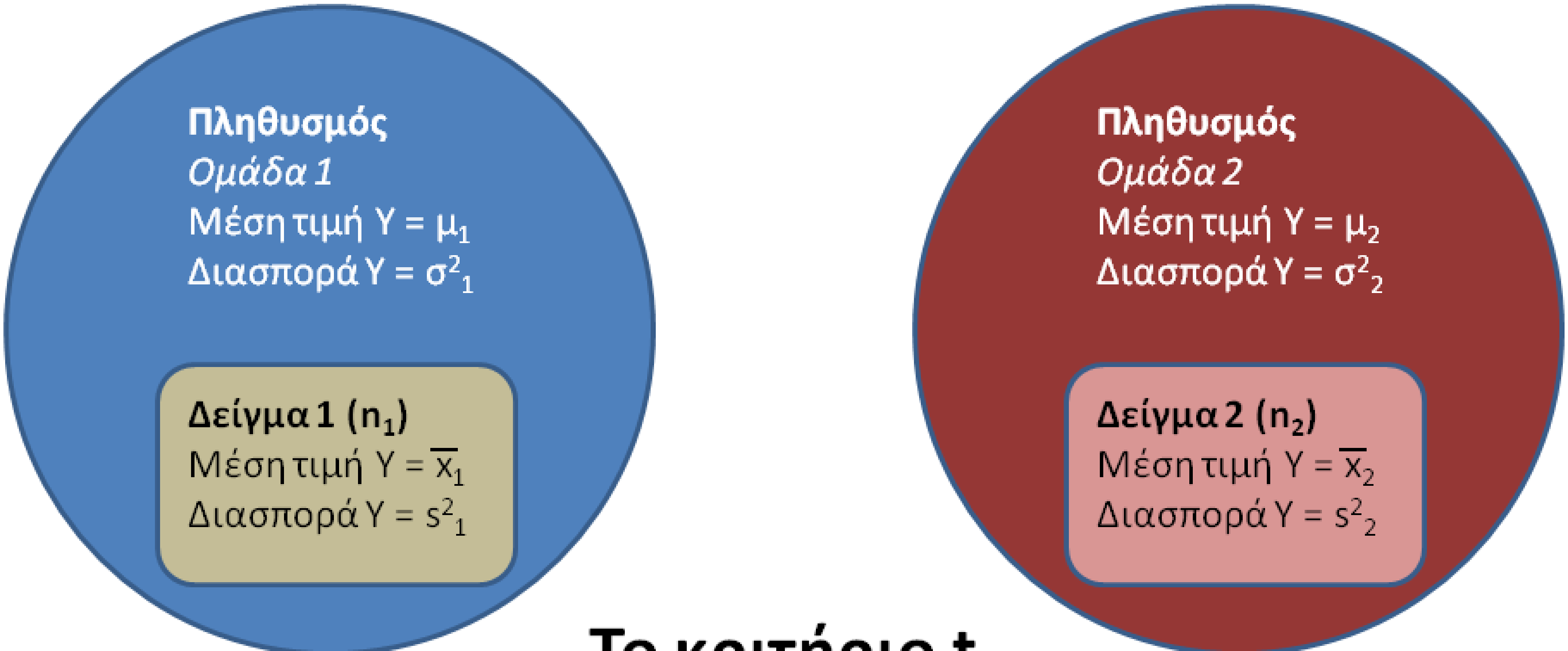
- Μηδενική υπόθεση

$$H_0: \ \mu_1=\mu_2$$

- Εναλλακτική υπόθεση

$$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

t-test (δύο ανεξάρτητων δειγμάτων)



Το κριτήριο t

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}}} \qquad s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Αν ισχύει η H0, το t ακολουθεί την t-κατανομή με n1+n2-2 βαθμούς ελευθερίας

Στατιστική αξιολόγηση

- Ελέγχουμε την τιμή t στον πίνακα με τις οριακές τιμές (συνήθως με την τιμή που αντιστοιχεί στο 5% επίπεδο σημαντικότητας) σε n_1+n_2-2 βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ) (degrees of freedom - df) όπου n_1 και n_2 ο αριθμός ατόμων στις 2 ομάδες

- Αν <u>t ≥ οριακή τιμή</u> → απορρίπτω H_0 και συμπεραίνω ότι η σχέση <u>είναι</u> στατιστικά σημαντική

- Αν <u>t < οριακή τιμή</u> → η σχέση <u>δεν είναι</u> στατιστικά σημαντική

- Σαν πρώτο βήμα, θα υπολόγιζα το μέσο ύψος στις δύο περιοχές

$$\bar{X}_1 = \frac{125+122+130+.....+119}{25} = \frac{3092}{25} = 123{,}68 \text{ cm}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{122+114+124+...+113}{20} = \frac{2411}{20} = 120{,}55 cm$$

- Είναι αυτή η διαφορά πραγματική ή είναι αποτέλεσμα τυχαίας δειγματοληψίας?

  → t-test: θα υπολογίσω την πιθανότητα να βρω μία τέτοια τάξης διαφορά **στην τύχη** δηλαδή όταν το ανάστημα στις δύο περιοχές δεν διαφέρει (σφάλμα τύπου Ι)

  → **αν η πιθανότητα να βρω μία τέτοια τάξης διαφορά όταν οι περιοχές είναι παρόμοιες είναι πολύ μικρή (<0.05) τότε η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική**

$$(s_1)\ SD_1 = \sqrt{\frac{\sum_i (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_i X_{1i}^2 - \frac{(\sum_i X_{1i})^2}{n_1}}{n_1 - 1}}$$

$$\sum_i X_{1i}^2 = 125^2 + 122^2 + 130^2 + \ldots + 119^2 = 383002$$

$$(\sum_i X_{1i})^2 = 3092^2 = 9560464$$

$$SD_1 = \sqrt{\frac{383002 - \frac{9560464}{25}}{24}} = \sqrt{\frac{383002 - 382418,56}{24}}$$

$$= \sqrt{\frac{583,44}{24}} = \sqrt{24,31}$$ **= 4,93 cm**

Όμοια: (s_2) SD_2= 4,12 cm

Επομένως: s_1=4,93 cm, s_2=4,12 cm
n_1=25, n_2=20

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(25-1)4,93^2+(20-1)4,12^2}{25+20-2}} = 4,59$$

$$t = \frac{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right|}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{\left|123,68-120,55\right|}{4,59\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}} = \frac{3,13}{1,38} = 2,27$$

Απόλυτη τιμή διαφοράς μέσων τιμών στις δύο ομάδες του δείγματος

Τυπικό σφάλμα (Standard Error=SE) διαφοράς μέσων τιμών στις δύο ομάδες του δείγματος

Β.Ε= $n_1+n_2-2 = 25+20-2 = 43$

<u>Αξιολόγηση στους πίνακες του t –test</u>

Πίνακας t-κατανομής

df	0.10	0.05	0.025	0.01
2	2.9200	4.3027	6.2054	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.1765	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.4954	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.1634	4.0321
6	1.9432	2.4469	2.9687	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.8412	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.6338	3.1693
11	1.7959	2.2010	2.5931	3.1058
12	1.7823	2.1788	2.5600	3.0545
13	1.7709	2.1604	2.5326	3.0123
14	1.7613	2.1448	2.5096	2.9768
15	1.7531	2.1315	2.4899	2.9467
16	1.7459	2.1199	2.4729	2.9208
17	1.7396	2.1098	2.4581	2.8982
18	1.7341	2.1009	2.4450	2.8784
19	1.7291	2.0930	2.4334	2.8609
20	1.7247	2.0860	2.4231	2.8453
21	1.7207	2.0796	2.4138	2.8314
22	1.7171	2.0739	2.4055	2.8188
23	1.7139	2.0687	2.3979	2.8073
24	1.7109	2.0639	2.3910	2.7970
25	1.7081	2.0595	2.3846	2.7874
26	1.7056	2.0555	2.3788	2.7787
27	1.7033	2.0518	2.3734	2.7707
28	1.7011	2.0484	2.3685	2.7633
29	1.6991	2.0452	2.3638	2.7564
30	1.6973	2.0423	2.3596	2.7500
31	1.6955	2.0395	2.3556	2.7440
32	1.6939	2.0369	2.3518	2.7385
33	1.6924	2.0345	2.3483	2.7333
34	1.6909	2.0322	2.3451	2.7284
35	1.6896	2.0301	2.3420	2.7238
36	1.6883	2.0281	2.3391	2.7195
37	1.6871	2.0262	2.3363	2.7154
38	1.6860	2.0244	2.3337	2.7116
39	1.6849	2.0227	2.3313	2.7079
40	1.6839	2.0211	2.3289	2.7045
41	1.6829	2.0195	2.3267	2.7012
42	1.6820	2.0181	2.3246	2.6981
43	1.6811	2.0167	2.3226	2.6951

Αξιολόγηση στους πίνακες του t –test

Β.Ε.	10%	5%	1%	1‰
43	**1,68**	**2,02**	**2,71**	**3,55**

t=2.27>2.02

Άρα απορρίπτω την H_0 (⇔p<5%)

2,02 < t=**2.27**< **2,71**

1**%** < **p <** 5**%**

Συμπέρασμα - Ερμηνεία

Συμπέρασμα: Το ανάστημα των παιδιών **διαφέρει σε βαθμό στατιστικά σημαντικό** στις δύο περιοχές

Ερμηνεία : Τα παιδιά από περιοχές με **χαμηλά επίπεδα μολύβδου** είναι <u>κατά μέσο όρο</u> **υψηλότερα** από τα παιδιά από περιοχές με **υψηλά επίπεδα μόλυβδου**

Ερώτημα β:
95 % όρια αξιοπιστίας της διαφοράς του μέσου αναστήματος

Διαφορά μέσων τιμών:

$$\delta = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 3{,}13 \quad cm$$

$$95\% \, \Delta.\mathrm{E}.: \delta \pm t \; * SE_\delta$$

όπου

$$SE_\delta = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 1{,}38\, cm$$

Πίνακας t-κατανομής

df	0.10	0.05	0.025	0.01
2	2.9200	4.3027	6.2054	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.1765	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.4954	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.1634	4.0321
6	1.9432	2.4469	2.9687	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.8412	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.6338	3.1693
11	1.7959	2.2010	2.5931	3.1058
12	1.7823	2.1788	2.5600	3.0545
13	1.7709	2.1604	2.5326	3.0123
14	1.7613	2.1448	2.5096	2.9768
15	1.7531	2.1315	2.4899	2.9467
16	1.7459	2.1199	2.4729	2.9208
17	1.7396	2.1098	2.4581	2.8982
18	1.7341	2.1009	2.4450	2.8784
19	1.7291	2.0930	2.4334	2.8609
20	1.7247	2.0860	2.4231	2.8453
21	1.7207	2.0796	2.4138	2.8314
22	1.7171	2.0739	2.4055	2.8188
23	1.7139	2.0687	2.3979	2.8073
24	1.7109	2.0639	2.3910	2.7970
25	1.7081	2.0595	2.3846	2.7874
26	1.7056	2.0555	2.3788	2.7787
27	1.7033	2.0518	2.3734	2.7707
28	1.7011	2.0484	2.3685	2.7633
29	1.6991	2.0452	2.3638	2.7564
30	1.6973	2.0423	2.3596	2.7500
31	1.6955	2.0395	2.3556	2.7440
32	1.6939	2.0369	2.3518	2.7385
33	1.6924	2.0345	2.3483	2.7333
34	1.6909	2.0322	2.3451	2.7284
35	1.6896	2.0301	2.3420	2.7238
36	1.6883	2.0281	2.3391	2.7195
37	1.6871	2.0262	2.3363	2.7154
38	1.6860	2.0244	2.3337	2.7116
39	1.6849	2.0227	2.3313	2.7079
40	1.6839	2.0211	2.3289	2.7045
41	1.6829	2.0195	2.3267	2.7012
42	1.6820	2.0181	2.3246	2.6981
43	1.6811	$\boxed{2.0167}$	2.3226	2.6951

Ερώτημα β:
95 % όρια αξιοπιστίας της διαφοράς του μέσου αναστήματος

$$95\%\,\Delta.\mathrm{E}.:\ \delta \pm t\ * SE_{\delta}$$

$$3{,}13 \pm 2{,}02 * 1{,}38\ cm$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

0,34 5,92

95% ΔΕ: **(0,34 - 5,92) cm**

Ερμηνεία: Τα παιδιά από περιοχές με **χαμηλά επίπεδα μολύβδου** είναι υψηλότερα κατά μέσο όρο κατά **3,13 cm** από τα παιδιά από περιοχές με **υψηλά επίπεδα μολύβδου**, με **95 % όρια αξιοπιστίας της διαφοράς 0,34 – 5,92 cm**

t-test για σύγκριση μέσων

Παράδειγμα: *σχέση στοματικής υγείας & ΔΜΣ*

Έστω 2 ομάδες: ομάδα Α (n_1 άτομα) και ομάδα Β (n_2 άτομα)

Δίνονται οι τιμές του Δείκτη μάζας σώματος (ΔΜΣ) σε κάθε ομάδα:

Ομάδα Α: 225 άτομα με πλήρη νωδότητα

Ομάδα Β: 110 άτομα με 11 έως 32 δόντια

Έστω μ_1 η μέση τιμή του ΔΜΣ στην ομάδα Α και μ_2 στην Β

Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι 2 μέσες τιμές είναι ίσες ή διαφέρουν

H_0: $\mu_1=\mu_2$ (Μηδενική υπόθεση)

H_a: $\mu_1\neq\mu_2$ (Εναλλακτική υπόθεση)

Παράδειγμα: *σχέση στοματικής υγείας & ΔΜΣ*

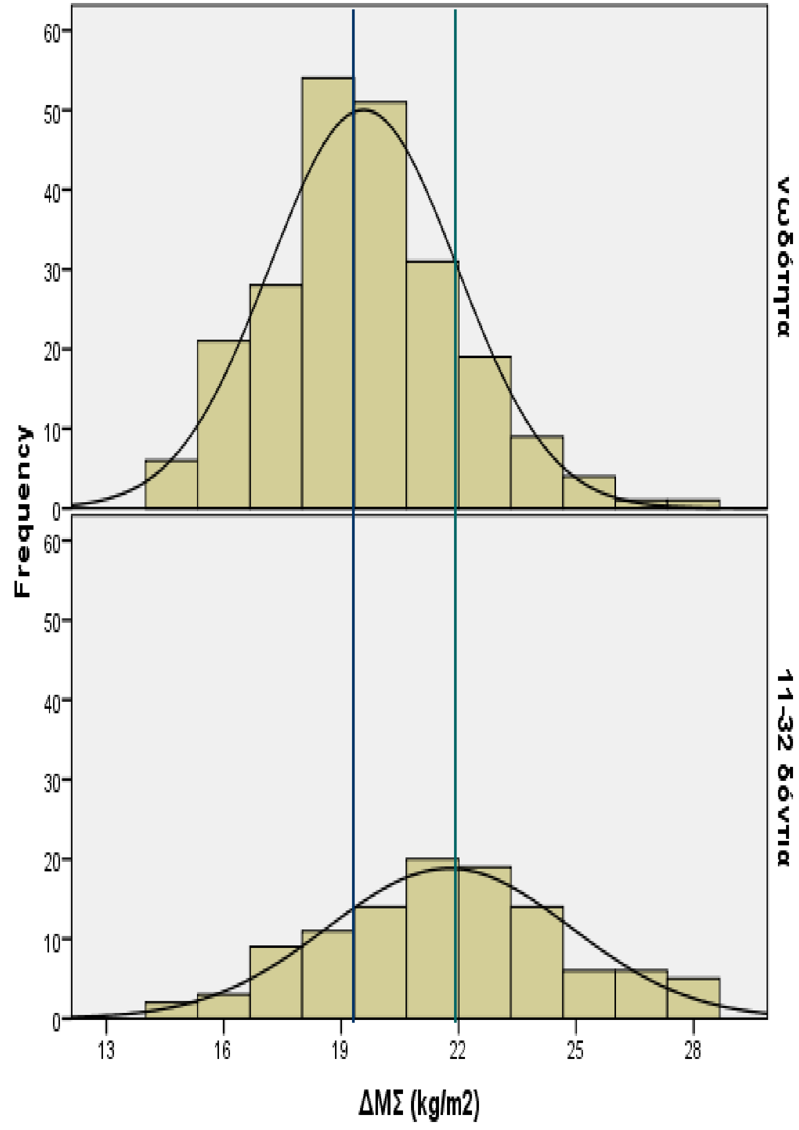
Ομάδα A: n_1=225 άτομα με νωδότητα

$\bar{x}_1$=19.6, SD_1=2.4

Ομάδα B: n_2=110 άτομα

με 11 έως 32 δόντια

$\bar{x}_2$=21.8, SD_2=3.1



Παράδειγμα: *σχέση στοματικής υγείας & ΔΜΣ*

Ερευνητικό ερώτημα:

Διαφέρουν οι τιμές του ΔΜΣ κατά μέσο όρο στις δύο ομάδες (άτομα με πλήρη νωδότητα και άτομα με 11 έως 32 δόντια);

H_0: $\mu_1=\mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$ (Μηδενική υπόθεση)

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (Εναλλακτική υπόθεση)

Θα απαντήσουμε στο ερώτημα μέσω των εκτιμήσεων του δείγματος μας για τις μέσες τιμές: $\bar{X}_1$ **=19.6 και** $\bar{X}_2$**=21.8**. Είναι πιθανό η παρατηρούμενη διαφορά στις δύο μέσες τιμές να οφείλεται σε τυχαίες διακυμάνσεις;

Ή πρέπει να συμπεράνουμε ότι η παρατηρούμενη διαφορά οφείλεται σε διαφορετικές πραγματικές μέσες τιμές των δύο πληθυσμών υπό έλεγχο;

$$SE_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad \text{όπου} \quad S = \sqrt{\left[\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}\right]}$$

$$SE_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = 0.336$$

$$t = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{SE(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \frac{|19.6-21.8|}{0.336} = \frac{2.2}{0.336} = 6.56$$

και για ΒΕ = 225+110-2 = 333 ανατρέχουμε στους πίνακες

Αξιολόγηση στους πίνακες του t –test

t=6.56 >1.97 →
η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική στο 5%

Συμπέρασμα: Ο ΔΜΣ **διαφέρει** σε βαθμό στατιστικά σημαντικό στις δύο ομάδες.

Ερμηνεία: Τα άτομα με 11-32 δόντια έχουν κατά μέσο όρο υψηλότερο ΔΜΣ από τα άτομα με πλήρη νωδότητα.

Degrees of freedom	Significance level 10%	5%	1%
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.894	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
60	1.671	2.000	2.660
70	1.667	1.994	2.648
80	1.664	1.990	2.639
90	1.662	1.987	2.632
100	1.660	1.984	2.626
120	1.658	1.980	2.617
150	1.655	1.976	2.609
200	1.653	1.972	2.601
300	1.650	1.968	2.592
400	1.649	1.966	2.588
500	1.648	1.965	2.586
600	1.647	1.964	2.584
∞	1.645	1.960	2.576

95% Διάστημα αξιοπιστίας της διαφοράς των δύο μέσων τιμών

Μέση Διαφορά στον ΔΜΣ:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 19.6 - 21.8 = -2.2$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,0.05} * SE_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$$

$$= -2.2 \pm 1.97 * 0.336 =$$

-2.9 -1.5

Ερμηνεία: Τα άτομα με πλήρη νωδότητα έχουν χαμηλότερο ΔΜΣ κατά μέσο όρο κατά -2.2 kg/m^2 από τα άτομα με 11-32 δόντια, με 95 % όρια αξιοπιστίας της διαφοράς (-2.9 , -1.5)

Προσοχή: Δεν περιλαμβάνει το 0 (συμβαδίζει με τον έλεγχο υπόθεσης)

Παράδειγμα: *σχέση στοματικής υγείας & ΔΜΣ*

Ομάδα A: n_1=225

με νωδότητα

$\bar{X}_1$=19.6, SD_1=2.4

SE_1 = 0.16

95%$ΔΕ_μ$: [19.2 , 19.9]

-2.2±1.97*0.336=[-2.9 , -1.5]

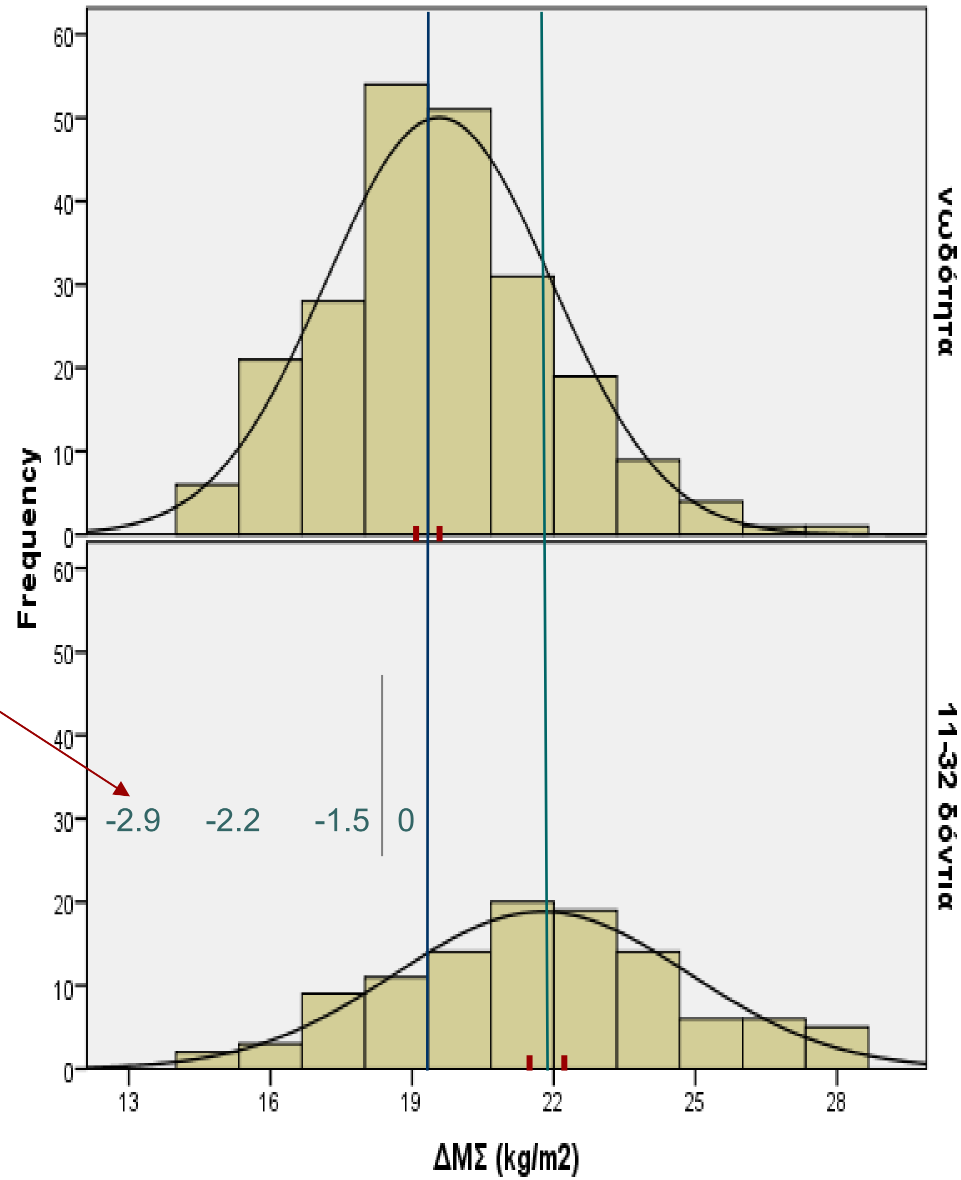
Ομάδα B: n_2=110

με 11 έως 32 δόντια

$\bar{X}_2$=21.8, SD_2=3.1

SE_2 = 0.295

95%$ΔΕ_μ$: [21.2 , 22.4]



Παράδειγμα 3

Ασθενής	ΤΚΕ πριν	ΤΚΕ μετά
1	12	22
2	9	18
3	6	14
4	7	10

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, συγκρίναμε τις μέσες τιμές δύο διαφορετικών ομάδων ατόμων (περιοχές A και B)

- Εδώ, θέλουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές ΤΚΕ πριν και μετά την εμφάνιση του νοσήματος στους ΙΔΙΟΥΣ ασθενείς → Paired t-test

Ασθενής	ΤΚΕ πριν	ΤΚΕ μετά	δ
1	12	22	-10
2	9	18	-9
3	6	14	-8
4	7	10	-3
$\bar{\delta}$			-7.5

Independent samples t-test vs. paired t-test

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

H_0: $\mu_\delta = 0$

H_1: $\mu_\delta \neq 0$

$$t = \frac{\left|\overline{\delta}\right|}{SE_\delta}$$

Τ.Κ.Ε. 4 ατόμων πριν και μετά τη νόσο

Άτομο	Πριν	Μετά	δ	$δ^2$
1ο	12	22	-10	100
2ο	9	18	-9	81
3ο	6	14	-8	64
4ο	7	10	-3	9
			Σδ= - 30	$\Sigma\delta^2 = 254$

$$\bar{\delta} = -30/4 = -7,5mm$$

$$SD_{\delta}=\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2-\frac{(\Sigma\delta)^2}{n}}{n-1}}=\sqrt{\frac{254-\frac{900}{4}}{3}}=3{,}11\ mm$$

$$SE_{\delta}=\frac{SD}{\sqrt{n}}=\frac{3{,}11}{2}=1{,}56\quad mm$$

$$t=\frac{\left|\bar{\delta}\right|}{SE_{\delta}}=\frac{7{,}5}{1{,}56}=4{,}81$$

Αξιολόγηση στους πίνακες της t κατανομής

BE=n-1=3

BE	10%	5%	1%	1‰
3	**2,35**	**3,18**	**5,84**	**12,92**

3,18<t=4,81<5,84

1% < p < 5%

Συμπέρασμα: Η Τ.Κ.Ε. διαφέρει σε βαθμό στατιστικά σημαντικό πριν και μετά τη προσβολή από το νόσημα

Ερμηνεία: Το νόσημα προκαλεί αύξηση της Τ.Κ.Ε σε βαθμό στατιστικά σημαντικό.

β) 99 % CI της διαφοράς

$$\bar{\delta} \pm \boxed{t} * SE_{\delta}$$

df	0.10	0.05	0.025	0.01
2	2.9200	4.3027	6.2054	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.1765	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.4954	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.1634	4.0321
6	1.9432	2.4469	2.9687	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.8412	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.6338	3.1693
11	1.7959	2.2010	2.5931	3.1058
12	1.7823	2.1788	2.5600	3.0545
13	1.7709	2.1604	2.5326	3.0123
14	1.7613	2.1448	2.5096	2.9768
15	1.7531	2.1315	2.4899	2.9467
16	1.7459	2.1199	2.4729	2.9208
17	1.7396	2.1098	2.4581	2.8982
18	1.7341	2.1009	2.4450	2.8784
19	1.7291	2.0930	2.4334	2.8609
20	1.7247	2.0860	2.4231	2.8453
21	1.7207	2.0796	2.4138	2.8314
22	1.7171	2.0739	2.4055	2.8188
23	1.7139	2.0687	2.3979	2.8073
24	1.7109	2.0639	2.3910	2.7970
25	1.7081	2.0595	2.3846	2.7874
26	1.7056	2.0555	2.3788	2.7787
27	1.7033	2.0518	2.3734	2.7707
28	1.7011	2.0484	2.3685	2.7633
29	1.6991	2.0452	2.3638	2.7564
30	1.6973	2.0423	2.3596	2.7500
31	1.6955	2.0395	2.3556	2.7440
32	1.6939	2.0369	2.3518	2.7385
33	1.6924	2.0345	2.3483	2.7333
34	1.6909	2.0322	2.3451	2.7284
35	1.6896	2.0301	2.3420	2.7238
36	1.6883	2.0281	2.3391	2.7195
37	1.6871	2.0262	2.3363	2.7154
38	1.6860	2.0244	2.3337	2.7116
39	1.6849	2.0227	2.3313	2.7079
40	1.6839	2.0211	2.3289	2.7045
41	1.6829	2.0195	2.3267	2.7012
42	1.6820	2.0181	2.3246	2.6981
43	1.6811	2.0167	2.3226	2.6951

β) 99 % ΔΕ της διαφοράς

$$\bar{\delta} \pm t \; * SE_{\delta}$$

-7,5 ± **5,84***1,56

-16,61   1,61

99 % CI: -16,61 μέχρι 1,61

Το διάστημα -16,6 μέχρι 1,6 περιέχει με πιθανότητα 99% την πραγματική διαφορά της Τ.Κ.Ε. μετά την προσβολή από τη νόσο

Παράδειγμα: *διαφορά θερμοκρασίας πρωί-βράδυ*

Πέντε άτομα που έπασχαν από μια νόσο θερμομετρήθηκαν το πρωί (ομάδα Α) και το βράδυ (ομάδα Β) της ίδιας μέρας. Οι τιμές της θερμοκρασίας (σε ^{o}C) ήταν:

Άτομο	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
Πρωινή θερμ.	37.1	37.4	37.2	37.3	37.0
Βραδινή θερμ.	37.8	38.2	38.1	38.1	37.6

Υπάρχει διαφορά μεταξύ πρωινής και βραδινής θερμοκρασίας;

Εφαρμογή του t-test κατά ζεύγη, επειδή οι μετρήσεις έχουν γίνει στην ίδια ερευνητική μονάδα.

Άτομο	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
Διαφορά θερμ. (δ)	0.7	0.8	0.9	0.8	0.6

$\bar{d}$=0.76 SD_d=0.112 SE_d=0.112/ √5=0.05

Degrees of freedom	Significance level 10%	5%	1%
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.894	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169

Άρα: t = 0.76/0.05=15.2.

Οι βαθμοί ελευθερίας για το t-test κατά ζεύγη είναι n-1. Η αντίστοιχη τιμή της κατανομής t στο 5% είναι t=2.78.

Άρα η μέση διαφορά είναι στατιστικά σημαντική.

Απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση της μη ύπαρξης διαφοράς ($\mu_1=\mu_2$) και, συμπεραίνω ότι η μέση βραδινή θερμοκρασία διαφέρει από τη μέση πρωινή (με πιθανότητα <5% το εύρημα αυτό να είναι τυχαίο).

Το 95% ΔΕ της διαφοράς είναι:

$$\bar{d} \pm \mathrm{t} * SE_d = 0.76 \pm 2.78 * 0.05 = (0.62, 0.90)$$

Το 99% ΔΕ;

Αντί για το 5%, χρησιμοποιήσουμε το 1%, δηλαδή t = 4.6:

$$\bar{d} \pm \mathrm{t} * SE_d = 0.76 \pm 4.60 * 0.05 = (0.53, 0.99)$$

- το 0 δεν περιλαμβάνεται στο 99% Δ.Ε.
- το νέο διάστημα έχει μεγαλύτερο εύρος.

Για τη σύγκριση των επιπέδων της χοληστερόλης πριν και μετά τη χορήγηση φαρμακευτικού σκευάσματος σε 200 ασθενείς, εφαρμόστηκε η δοκιμασία t κατά ζεύγη και έδωσε p=0.02 ενώ η εφαρμογή της δοκιμασίας t για ανεξάρτητα δείγματα έδωσε p=0.09. Ποια συμπεράσματα προκύπτουν για την αποτελεσματικότητα του φαρμάκου;

Απάντηση: Υπεροχή ισχύος του t-test κατά ζεύγη (βιολογική μεταβλητότητα)