

Προτασιακός λογισμός: Κανόνες απόδειξης

1. Υποθετική απόδειξη (ΥΑ)

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} p \quad \Upsilon \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q \end{array} \right. \\ \hline p \rightarrow q \end{array}$$

2. Modus Ponendo Ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

3. Modus Tollendo Tolens (MT)

$$\begin{array}{l} \sim q \\ p \rightarrow q \\ \hline \sim p \end{array}$$

4. Διπλή άρνηση (~~)

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \sim \sim p \end{array}$$

5. Εισαγωγή Λ (ΕισΛ)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

6. Εισαγωγή V (ΕισV)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \vee q \quad \eta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \quad \eta \\ \\ q \\ \hline p \vee q \end{array}$$

7. Εξαγωγή Λ (ΕξΛ)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline p \quad \eta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$$

8. Εξαγωγή V (ΕξV)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

9. Εις άτοπον απαγωγή (ΑΑ)

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q \wedge \sim q \end{array} \right. \\ \hline \sim p \end{array}$$

10. Ισοδυναμία (↔)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array}$$

11. Αντικατάσταση ισοδυνάμων (↔)

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ [\dots p \dots] \\ \hline [\dots q \dots] \quad \eta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ [\dots q \dots] \\ \hline [\dots p \dots] \end{array}$$

Παραδείγματα:

{p → q, q → r} ⊢ p → r

- | | | |
|----|-------|--------|
| 1. | p → q | Υ |
| 2. | q → r | Υ |
| 3. | p | Υ |
| 4. | q | 1,3 MP |
| 5. | r | 2,4 MP |
| 6. | p → r | 3-5 ΥΑ |

{p → q, r → s} ⊢ (p ∨ r) → (q ∨ s)

- | | | |
|-----|-------------------|----------|
| 1. | p → q | Υ |
| 2. | r → s | Υ |
| 3. | p ∨ r | Υ |
| 4. | p | Υ |
| 5. | q | 1,4 MP |
| 6. | q ∨ s | 5 Εισ∨ |
| 7. | r | Υ |
| 8. | s | 2,7 MP |
| 9. | q ∨ s | 8 Εισ∨ |
| 10. | (p ∨ r) → (q ∨ s) | 3-6-9 ΥΑ |