

Partial Solutions for *Beginning Logic*,
E.G.Lemmon [Lemmon:1969]

Michael Pucher

April 7, 2005

Contents

1	Propositional Logic	2
2	Predicate Logic	10

Chapter 1

Propositional Logic

Examples:

MTT $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $\neg Q$	A
3	(3) P	A
1,3	(4) Q	1,3 \rightarrow B
1,2,3	(5) $Q \wedge \neg Q$	2,4 \wedge E
1,2	(6) $\neg P$	3,5 \neg E
1	(6) $\neg Q \rightarrow \neg P$	2,6 \rightarrow E

1.)a.)p18 $P \rightarrow (P \rightarrow Q), P \vdash Q$

1	(1) $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	A
2	(2) P	A
1,2	(3) $P \rightarrow Q$	1,2 \rightarrow B
1,2	(4) Q	2,3 \rightarrow B

1.)b.)p18 $Q \rightarrow (P \rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$

1	(1) $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$	A
2	(2) $\neg R$	A
3	(3) Q	A
1,3	(4) $P \rightarrow R$	1,3 \rightarrow B
1,2,3	(5) $\neg P$	2,4 MTT

1.)c.)p18 $P \rightarrow \neg\neg Q, P \vdash Q$

1 (1) $P \rightarrow \neg\neg Q$ A
 2 (2) P A
 1,2 (3) $\neg\neg Q$ 1,2 \rightarrow B
 1,2 (4) Q 3 DN

1.)d.)p18 $\neg\neg Q \rightarrow P, \neg P \vdash \neg Q$

1 (1) $\neg\neg Q \rightarrow P$ A
 2 (2) $\neg P$ A
 1,2 (3) $\neg\neg\neg Q$ 1,2 MTT
 1,2 (4) $\neg Q$ 3 DN

1.)e.)p18 $\neg P \rightarrow \neg Q, Q \vdash P$

1 (1) $\neg P \rightarrow \neg Q$ A
 2 (2) Q A
 2 (3) $\neg\neg Q$ 2 DN
 1,2 (4) $\neg\neg P$ 1,3 MTT
 1,2 (5) P 4 DN

1.)f.)p18 $P \rightarrow \neg Q \vdash Q \rightarrow \neg P$

1 (1) $P \rightarrow \neg Q$ A
 2 (2) Q A
 2 (3) $\neg\neg Q$ 2 DN
 1,2 (4) $\neg P$ 1,3 MTT
 1 (5) $Q \rightarrow \neg P$ 2,4 \rightarrow E

1.)g.)p18 $\neg P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow P$

1 (1) $\neg P \rightarrow Q$ A
 2 (2) $\neg Q$ A
 1,2 (3) $\neg\neg P$ 1,2 MTT
 1,2 (4) P 3 DN
 1 (5) $\neg Q \rightarrow P$ 2,4 \rightarrow E

1.)h.)p18 $\neg P \rightarrow \neg Q \vdash Q \rightarrow P$

1	(1)	$\neg P \rightarrow \neg Q$	A
2	(2)	Q	A
2	(3)	$\neg\neg Q$	2 DN
1,2	(4)	$\neg\neg P$	1,3 MTT
1,2	(5)	P	4 DN
1	(6)	$Q \rightarrow P$	2,5 \rightarrow E

1.)i.)p18 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 \rightarrow B
1,2,3	(5)	R	2,4 \rightarrow B
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 \rightarrow E

1.)j.)p18 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$(P \rightarrow Q)$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$(Q \rightarrow R)$	1,3 \rightarrow B
2,3	(5)	Q	2,3 \rightarrow B
1,2,3	(6)	R	4,5 \rightarrow B
1,2	(7)	$P \rightarrow R$	3,6 \rightarrow E
1	(8)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,7 \rightarrow E

1.)k.)p18 $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)) \vdash R \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow S))$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S))$	A
2	(2)	R	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$Q \rightarrow (R \rightarrow S)$	1,3 \rightarrow B
5	(5)	Q	A
1,3,5	(6)	$R \rightarrow S$	4,5 \rightarrow B
1,2,3,5	(7)	S	2,6 \rightarrow B
1,2,3	(8)	$Q \rightarrow S$	5,7 \rightarrow E
1,2	(9)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	3,8 \rightarrow E
1	(10)	$R \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow S))$	2,9 \rightarrow E

1.)l.)p18 $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1) $P \rightarrow Q$	A
2	(2) $Q \rightarrow R$	A
3	(3) P	A
1,3	(4) Q	1,3 \rightarrow B
1,2,3	(5) R	2,4 \rightarrow B
1,2	(6) $P \rightarrow R$	3,5 \rightarrow E
1	(7) $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 \rightarrow E

1.)m.)p18 $P \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

1	(1) P	A
2	(2) $P \rightarrow Q$	A
1,2	(3) Q	1,2 \rightarrow B
1	(4) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$	2,3 \rightarrow E

1.)n.)p18 $P \vdash (\neg(Q \rightarrow R) \rightarrow \neg P) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$

1	(1) P	A
2	(2) $\neg(Q \rightarrow R) \rightarrow \neg P$	A
1	(3) $\neg\neg P$	1 DN
1,2	(4) $\neg\neg(Q \rightarrow R)$	2,3 MTT
1,2	(5) $Q \rightarrow R$	4 DN
6	(6) $\neg R$	A
1,2,6	(7) $\neg Q$	5,6 MTT
1,2	(8) $\neg R \rightarrow \neg Q$	6,7 \rightarrow E
1	(9) $(\neg(Q \rightarrow R) \rightarrow \neg P) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$	2,8 \rightarrow E

1.)a.)p27 $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

1	(1) P	A
2	(2) Q	A
1,2	(3) $P \wedge Q$	1,2 \wedge E
1	(4) $Q \rightarrow (P \wedge Q)$	2,3 \rightarrow E

1.)b.)p27 $P \wedge (Q \wedge R) \vdash Q \wedge (P \wedge R)$

- 1 (1) $P \wedge (Q \wedge R)$ A
 1 (2) P 1 \wedge B
 1 (3) $Q \wedge R$ 1 \wedge B
 1 (4) Q 3 \wedge B
 1 (5) R 3 \wedge B
 1 (6) $P \wedge R$ 2,5 \wedge E
 1 (7) $Q \wedge (P \wedge R)$ 4,6 \wedge E

1.) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P \vdash R$

- 1 (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ A
 2 (2) $P \rightarrow Q$ A
 3 (3) P A
 2,3 (4) Q 2,3 \rightarrow B
 1,3 (5) $Q \rightarrow R$ 1,3 \rightarrow B
 1,2,3 (6) R 4,5 \rightarrow B

2.) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

- 1 (1) $P \rightarrow Q$ A
 2 (2) $(Q \rightarrow R)$ A
 3 (3) P A
 1,3 (4) Q 1,3 \rightarrow B
 1,2,3 (5) R 2,4 \rightarrow B

3.) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$

- 1 (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ A
 2 (2) $P \wedge Q$ A
 2 (3) P 2 \wedge B
 2 (4) Q 2 \wedge B
 1,2 (5) $Q \rightarrow R$ 1,3 \rightarrow B
 1,2 (6) R 4,5 \rightarrow B
 1 (7) $(P \wedge Q) \rightarrow R$ 2,6 \rightarrow E

4.) $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

1	(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$	A
2	(2) $P \wedge Q$	A
2	(3) P	2 \wedge B
2	(4) Q	2 \wedge B
1,2	(5) R	1,2 \rightarrow B
1	(6) $Q \rightarrow R$	3,5 \rightarrow E
1	(7) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	4,6 \rightarrow E

5.) $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

1	(1) $P \wedge Q$	A
1	(2) P	1 \wedge B
1	(3) Q	1 \wedge B
1	(4) $Q \wedge P$	2,3 \wedge E

6.) $P \vee Q \vdash Q \vee P$

1	(1) $P \vee Q$	A
2	(2) P	A
2	(3) $Q \vee P$	2 \vee E
4	(4) Q	A
4	(5) $Q \vee P$	4 \vee E
1	(5) $Q \vee P$	1,2,3,4,5 \vee B

7.) $Q \rightarrow R \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$

1	(1) $Q \rightarrow R$	A
2	(2) $P \vee Q$	A
3	(3) P	A
3	(4) $P \vee R$	3 \vee E
5	(5) Q	A
1,5	(6) R	1,5 \rightarrow B
1,5	(7) $P \vee R$	6 \vee E
1,2	(8) $P \vee R$	2,3,4,5,7 \vee B
1	(9) $(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$	2,8 \rightarrow E

8.) $P \vee (Q \vee R) \vdash Q \vee (P \vee R)$

1	(1)	$P \vee (Q \vee R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee R$	2 \vee E
2	(4)	$Q \vee (P \vee R)$	3 \vee E
5	(5)	$Q \vee R$	A
6	(6)	Q	A
6	(7)	$Q \vee (P \vee R)$	6 \vee E
8	(8)	R	A
8	(9)	$P \vee R$	8 \vee E
8	(10)	$Q \vee (P \vee R)$	9 \vee E
5	(11)	$Q \vee (P \vee R)$	5,6,7,8,10 \vee B
1	(12)	$Q \vee (P \vee R)$	1,2,4,5,11 \vee B

12.) $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee Q)$	A
3	(3)	$\neg Q$	A
1,3	(4)	$\neg P$	1,3 MTT
1,3	(5)	$\neg P \vee Q$	4 \vee E
1,2,3	(6)	$\neg(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$	2,5 \wedge E
1,2	(7)	$\neg\neg Q$	6,3 \neg E
1,2	(8)	Q	7 DN
1,2	(9)	$\neg P \vee Q$	8 \vee E
1,2	(10)	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$	2,9 \wedge E
1	(11)	$\neg\neg(\neg P \vee Q)$	2,10 \neg E
1	(12)	$\neg P \vee Q$	11 DN

13.) $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$

1	(1) $\neg P \vee Q$	A
2	(2) P	A
3	(3) $\neg P$	A
4	(4) $\neg Q$	A
2,3	(5) $\neg P \wedge P$	2,3 $\wedge E$
2,3	(6) $\neg(\neg P \vee Q)$	1,5 $\neg E$
7	(7) Q	A
4,7	(8) $\neg Q \wedge Q$	4,7 $\wedge E$
4,7	(9) $\neg(\neg P \vee Q)$	1,8 $\neg E$
1,2,4	(10) $\neg(\neg P \vee Q)$	1,3,6,7,9 $\vee B$
1,2,4	(11) $\neg(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$	1,10 $\wedge E$
1,2	(12) $\neg\neg Q$	4,11 $\neg E$
1,2	(13) Q	12 DN
1	(14) $P \rightarrow Q$	2,13 $\rightarrow E$

14.) $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$

1	(1) $P \rightarrow Q$	2,13 $\rightarrow E$
2	(2) $P \wedge \neg Q$	A
2	(3) P	2 $\wedge B$
2	(4) $\neg Q$	2 $\wedge B$
1,2	(5) Q	1,3 $\rightarrow B$
1,2	(6) $Q \wedge \neg Q$	4,5 $\wedge E$
1	(7) $\neg(P \wedge \neg Q)$	2,6 $\neg E$

15.) $\neg(P \wedge \neg Q) \vdash P \rightarrow Q$

1	(1) $\neg(P \wedge \neg Q)$	A
2	(2) P	A
3	(3) $\neg Q$	A
2,3	(4) $P \wedge \neg Q$	2,3 $\wedge E$
1,2,3	(5) $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$	1,4 $\wedge E$
2,3	(6) $\neg(\neg P \vee Q)$	1,5 $\neg E$
1,2	(7) $\neg\neg Q$	3,5 $\neg E$
1,2	(8) Q	7 DN
1	(9) $P \rightarrow Q$	2,8 $\rightarrow E$

Chapter 2

Predicate Logic

Bibliography

[Lemmon:1969] E. G. Lemmon: *Beginning Logic*, Chapman and Hall