REMARKS ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

By

LUDWIG WITTGENSTEIN

Edited by

G. H. von WRIGHT

R. RHEES

G. E. M. ANSCOMBE

Translated by

G E. M. ANSCOMBE

THE M.I.T. PRESS

Massachusetts Institute of Technology

Cambridge, Massachusetts, and London, England

BEMERKUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

von

LUDWIG WITTGENSTEIN

Herausgegeben und bearbeitet von

G. H. von WRIGHT

R. RHEES

G. E. M. ANSCOMBE

First published 1956 in Great Britain
by Basil Blackwell
Second printing 1964

First M.I.T. Paperback Edition, June 1967

Library of Congress Catalog Card Number: 67-26366
Printed in the United States of America

TRANSLATOR'S NOTE

I AM indebted to Professor von Wright, Mr. R. Rhees, Miss L. Labowsky, and Mr. P. Geach, who have read the translations here published and have pointed out mistakes and suggested improvements; and to Mr. P. G. Winch who helped with proof-reading. Acknowledgment is also due to the Rockefeller Foundation for financial support during the time I have taken to work on this book, and also for supplying the funds needed for the photography and typing of MSS. and for editorial meetings.

VORWORT DER HERAUSGEBER

Die Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik und Logik, die hier veröffentlicht werden, sind in den Jahren von 1937 bis 1944 entstanden. Nach dieser Zeit ist Wittgenstein nicht mehr zu diesem Gegenstand zurückgekehrt. Dagegen hat er im Zeitraume von 1929 bis etwa 1932 vieles zum selben Thema Gehöriges verfaßt; einen Teil davon hoffen wir zusammen mit anderem Material aus jenen Jahren später zu veröffentlichen.

Diese früheren Arbeiten gehören einer Entwicklungsstufe Wittgensteins an, die noch der Denkweise seiner "Logisch-philosophischen Abhandlung" nahe steht. Die *hier* vorliegenden Bemerkungen sind von der Denkart der "Philosophischen Untersuchungen".

Es scheint ursprünglich Wittgensteins Absicht gewesen zu sein, seine Gedanken über Mathematik und Logik in die "Philosophischen Untersuchungen" mit einzubeziehen. In der Tat war das erste der hier veröffentlichten Bruchstücke (I) Teil einer früheren Fassung des Manuskriptes der "Untersuchungen". Es fängt mit zwei Abschnitten an, die mit §§ 189 und 190 der "Untersuchungen" im Wesentlichen identisch sind.

Dieser Teil I ist augenscheinlich das früheste der hier wiedergegebenen Bruchstücke. Er dürfte im Jahre 1937 entstanden sein. Es ist der einzige Teil dieser Sammlung, der in Maschinenschrift vorlag, und wohl von allen der am meisten durchgearbeitete. Der letzte Abschnitt des Manuskriptes ist hier weggelassen: sein Inhalt findet sich in den "Untersuchungen", §§ 547–568, in verbesserter Fassung wieder. Die Abschnitte 122–130 sind mit §§ 193–197 der "Untersuchungen" zum großen Teil identisch, wurden aber wegen des Zusammenhangs mitaufgenommen.

Dem Teil I waren zwei Anhänge beigefügt. Der eine handelte vom Überraschenden in der Mathematik. Er ist nicht aufgenommen worden. Der andere bespricht Gödels Satz über die Existenz von unbeweisbaren, aber wahren Sätzen im System der "Principia Mathematica". (Anhang I.)

Es dürfte die Absicht Wittgensteins gewesen sein, seinen für die "Philosophischen Untersuchungen" geplanten Beiträge zum Grundlagenproblem der Mathematik — neben dem Anhang über Gödels Satz — auch Anhänge über Cantors Lehre von der Unendlichkeit und Russell's Logik beizufügen. Unter dem Titel "Ansätze" hat er, wahrscheinlich zu Anfang des Jahres 1938 einiges zum Problemkreis der Mengenlehre niedergeschrieben: über das Diagonalverfahren und die verschiedenen Arten der Zahlbegriffe. Einige dieser "Ansätze"

EDITORS' PREFACE

THE remarks on the philosophy of mathematics and logic, which are published here, were written in the years 1937–1944. After that time Wittgenstein did not again return to this topic. He had written a great deal on the subject in the period 1929 to roughly 1932, part of which we hope to publish later, together with other material.

This earlier work belongs to a stage of Wittgenstein's development which is still fairly close to the thought of his *Tractatus Logico-Philosophicus*. The remarks presented in *this* volume are of a piece with the thought of *Philosophical Investigations*.

It appears to have been Wittgenstein's original intention to incorporate his ideas on mathematics and logic in *Philosophical Investigations*. In fact the first of the fragments here published (Part I) was part of an earlier version of the MS. of the *Investigations*. It begins with two entries which are in all essentials identical with §§ 189 and 190 of the *Investigations*.

This Part I is obviously the earliest of the fragments presented here. It must have been written in 1937. It is the only part of this collection which existed in typescript, and is certainly the most worked over of them all. The last portion of the MS. has been left out; its contents occur in an improved version in the *Investigations*, §§ 547–568. The entries 122–130 are in great part the same as §§ 193–197 of the *Investigations*,—but have been retained on account of their context.

Two appendices were attached to Part I. One dealt with surprise in mathematics. It has not been included in this volume. The other discusses Gödel's theorem about the existence of unprovable but true propositions in the system of *Principia Mathematica*. (Appendix I.)

It must have been Wittgenstein's intention to attach appendices on Cantor's theory of infinity and on Russell's logic, as well as the appendix on Gödel's theorem, to the contributions to the problem of the foundations of mathematics which he planned for *Philosophical Investigations*. Under the heading 'Addenda' (probably at the beginning of 1938) he wrote a certain amount on problems of set theory: namely on the diagonal procedure and the different kinds of number-concepts.

werden hier zusammen mit einer Auswahl aus einem anderen ähnliche Gegenstände behandelnden Manuskript veröffentlicht, das in der Zeit von April 1938 bis Januar 1939 entstanden ist. (Anhang II.)

Wittgensteins Auseinandersetzung mit Russell, d. h. mit dem Gedanken von der Herleitbarkeit der Mathematik (Arithmetik) aus dem Logikkalkül, findet sich im Teil II dieser Sammlung. Dieser Teil stammt aus der Zeit von Oktober 1939 bis April 1940. Das Manuskript war das umfangreichste von allen und zugleich, stilistisch und wohl auch sachlich, das am wenigsten vollendete. Immer von neuem wiederholt der Verfasser den Versuch, seine Gedanken über die Natur des mathematischen Beweises klar zu machen: was es heißt, daß der Beweis übersichtlich sein soll, daß er uns ein Bild vorführe, daß er einen neuen Begriff schaffe u. dgl.. Er ist bestrebt, "die Buntheit der Mathematik" zu erklären und den Zusammenhang der verschiedenen Rechentechniken klarzulegen. Mit diesem Streben widersetzt er sich zugleich der Idee einer "Grundlage" der Mathematik, sei es in der Form des Russellschen Logikkalküls oder in der der Hilbertschen Konzeption einer Metamathematik. Die Idee des Widerspruchs und des Widerspruchsfreiheitsbeweises wird ausführlich besprochen.

Die Herausgeber waren der Meinung, dieses Manuskript enthalte eine Fülle wertvoller Gedanken, die nirgendwo sonst in Wittgensteins Aufzeichnungen anzutreffen seien. (Der Standpunkt, der hier von ihm eingenommen wird, ist sogar zum Teil von seinen späteren Gedanken prinzipiell verschieden.) Andererseits war es auch klar, daß das Manuskript nicht ungekürzt veröffentlicht werden konnte. Eine Auslese war deshalb vonnöten. Die Aufgabe war sehr schwer, und die Herausgeber fühlen sich von dem Resultat wenig befriedigt.

Im Herbst 1940 hat sich Wittgenstein von neuem mit der Philosophie der Mathematik befaßt und einiges zur Frage des Regelfolgens — eines seiner am häufigsten wiederkehrenden Gedankenthemata — niedergeschrieben. Diese Aufzeichnungen haben wir hier nicht veröffentlicht. Im Mai 1941 wurde die Arbeit wieder aufgenommen und führte bald zu Untersuchungen, aus denen hier — als Teil V — eine beträchtliche Auswahl veröffentlicht wird.

Dieser Teil V wurde zu verschiedenen Zeiten verfaßt. Dir erste Hälfte (§§ 1–16) wurde größtenteils im Juni 1941 geschrieben. Sie bespricht das Verhältnis zwischen mathematischem Satz und Erfahrungssatz, zwischen Rechnung und Experiment, behandelt von neuem den Begriff des Widerspruchs und der Widerspruchsfreiheit und endet in der Nähe des Gödelschen Problems. Die zweite Hälfte stammt aus dem Frühjahr 1944. Sie handelt hauptsächlich vom Begriff des Regelfolgens, des mathematischen Beweises und des logischen Schließens.

Some of these 'Addenda' are here published together with a selection from another MS. treating of the same topics, and written in the period April 1938–January 1939. (Appendix II.)

Wittgenstein's working out of his position in regard to Russell, i.e. in regard to the idea of the derivability of mathematics (arithmetic) from the calculus of logic, is to be found in Part II of this collection. This part derives from the period October 1939–April 1940. The manuscript was the most extensive of all, and also the least perfect in style and indeed in content. The author repeatedly attempts to clarify his ideas on the nature of mathematical proof, on what it means to say that a proof must be perspicuous; that it presents us with a picture, that it creates a new concept, and the like. His endeavour is to explain "the motley of mathematics" and to set forth the connexion between different calculating techniques. Simultaneously with this endeavour he sets himself against the idea of a 'foundation' of mathematics, whether in the form of the Russellian logical calculus or of the Hilbertian conception of a metamathematics. The idea of contradiction and of a consistency proof is discussed at length.

The editors were of the opinion that this manuscript contained a large number of valuable ideas which are not to be found elsewhere in Wittgenstein's writings. (The point of view which he adopts here is even in part quite different from that of his later ideas.) On the other hand it was also clear that the manuscript could not be published without cuts. For this reason it was necessary to make a selection. The task was very difficult, and the editors feel little satisfaction with the result.

In the autumn of 1940 Wittgenstein occupied himself anew with the philosophy of mathematics, and wrote a certain amount on the subject of 'following a rule'—one of the subjects to which his thoughts most frequently returned. We have not published these writings here. Work on this was resumed in May 1941 and led to investigations of which a considerable selection is here published as Part V.

This Part V was written at various times. The first half (§§ 1–16) was written mainly in June 1941. It deals with the relation between mathematical and empirical propositions, between calculation and experiment; it gives a fresh treatment of the notion of contradiction and consistency; and in conclusion it skirts around Gödel's problem. The second half belongs to the spring of 1944. It treats mainly of the concepts of following a rule, of mathematical proofs, and of

Es finden sich hier zahlreiche Berührungspunkte mit den in der Zwischenzeit entstandenen Manuskripten einerseits (Teile III und IV) und mit Gedanken der "Philosophischen Untersuchungen" andererseits. Eine Anzahl von Bemerkungen haben die Herausgeber hier fortgelassen, weil sie sich in den "Untersuchungen" wörtlich wiederfinden. — Die beiden Hälften waren in demselben Manuskriptbuch eingetragen, was ein Anzeichen unter anderen dafür sein dürfte, daß der Verfasser sie als zusammengehörig betrachtet hat.

Teil III ist einem Manuskript aus dem Jahre 1942, Teil IV zwei Manuskripten aus den Jahren 1942 und 1943 entnommen. Manches in diesen Abschnitten trägt den Charakter von "Vorstudien" zur zweiten Hälfte des Teiles V, sie enthalten aber auch eine Fülle von Material, das der Verfasser dort nicht benutzt hat.

Im Teil IV bespricht Wittgenstein Gegenstände, die sich mit Brouwer und dem s.g. Intuitionismus berühren: das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und mathematische Existenz; den Dedekind-Schnitt und die extensionale und die intensionale Betrachtungsweise in der Mathematik.

Die chronologische Anordnung des Stoffes hatte zur Folge, daß ein und dasselbe Thema manchmal an verschiedenen Stellen behandelt wird. Hätte Wittgenstein seine Aufzeichnungen zu einem Buche zusammengestellt, so hätte er wohl manche dieser Wiederholungen vermieden. Eine derartige Zusammenstellung zu versuchen, haben sich die Herausgeber nicht zugetraut.

Es muß noch einmal betont werden: was hier veröffentlicht wird, ist eine *Auswahl* aus umfangreicheren Manuskripten. Vielleicht wird es später wünschenswert erscheinen, daß auch das hier Weggelassene, oder jedenfalls ein Teil desselben, gedruckt wird. Wir glauben aber, es war nicht unsere Aufgabe, dieses Bedürfnis nach Veröffentlichung eines umfangreicheren Materials vorwegzunehmen.

Für die Numerierung der ausgewählten Stücke sind die Herausgeber verantwortlich. Die Gliederung der Aufzeichnungen in 'Bemerkungen' — hier durch weitere Abstände von einander getrennt — ist dagegen Wittgensteins eigene. Die Ordnung der Abschnitte haben wir mit wenigen Ausnahmen nicht antasten wollen. Jedoch haben wir manchmal, besonders am Schluß des dritten und vierten Teiles, zum selben Thema Gehöriges aus verschiedenen Stellen der Aufzeichnungen zusammengebracht.

Die Inhaltsverzeichnisse und das Register sollen dem Leser zu einem Überblick verhelfen und zu leichterem Wiederfinden der Stellen beim Nachsuchen dienen. Für die in den Inhaltsverzeichnissen angedeutete thematische Gliederung des Stoffes sind die Herausgeber allein verantwortlich.

logical inference. There are here numerous points of contact with the manuscripts written in the intervening period (Parts III and IV) on the one hand, and with the ideas of *Philosophical Investigations* on the other. The editors have here omitted a number of remarks because they occur *verbatim* in the *Investigations*. The two halves were written in the same notebook, which is an indication that the author regarded them as belonging together.

Part III is taken from a manuscript of 1942, Part IV from two manuscripts of 1942 and of 1943. Much in these parts has the character of preliminary studies for the second half of Part V, but they also contain a quantity of material that the author did not use there.

In Part IV Wittgenstein discusses topics relating to Brouwer and 'Intuitionism': the law of excluded middle and mathematical existence; the Dedekind cut and the extensional and intensional points of view in mathematics.

The chronological arrangement of material has had the consequence that one and the same subject is sometimes dealt with in different places. If Wittgenstein had himself arranged his material into a single work, he would presumably have avoided some of these repetitions. The editors have not ventured to aim at such an arrangement.

We must emphasize once more that what is here published is a *selection* from more extensive manuscripts. It will perhaps later appear desirable to publish what is omitted here, or part of it. We believe, however, that it was not our business to anticipate such a demand for the publication of more extensive material.

The editors are responsible for the numbering of the selected sections, but the division into separate 'remarks', here indicated by a space between them, is Wittgenstein's own. With few exceptions, we have not interfered with their order. Sometimes, however, especially at the end of Part III and of Part IV, we have brought together remarks on the same topic that occurred in different places in the manuscripts.

The tables of contents and the index are intended to help the reader to survey the whole, and also to make it easier to look up passages. The editors have the sole responsibility for the division of the material by subjects suggested in the tables of contents.

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I

1–5. Das Problem des Regelfolgens. (Vgl. "Philosophische Untersuchungen" §§ 189, 190, etc.) — Übergänge durch eine Formel bestimmt (1–2). Fortsetzung einer Reihe (3). Unerbittlichkeit der Mathematik; Mathematik und Wahrheit (4–5). Bemerkung über das Messen (5).

6–23. Das logische Schließen. — Das Wort "alle"; der Schluß aus '$(x).fx$' auf 'fa' (10–16). Schließen und Wahrheit (17–23).

24–74. Der Beweis. — Der Beweis als Figur oder Muster, Paradigma. Hand-und-Drudenfuß-Beispiel (25, etc.). Der Beweis als Bild eines Experiments (36). Das 100-Kugeln-Beispiel (36, etc.). Zusammenlegen von Figuren aus Teilen (42–72). Die mathematische Überraschung. Beweis und Überzeugung. Mathematik und Wesen (32, 73, 74). Die *Tiefe* des Wesens: das tiefe Bedürfnis nach der Übereinkunft (74).

75–105. Rechnung und Experiment. — Das 'Entfalten' von mathematischen Eigenschaften. Das 100-Kugeln-Beispiel (75, 86, 88). Entfalten von Eigenschaften eines Vielecks (76), einer Kette (79, 80, 91, 92). Messen (93, 94). Geometrische Beispiele (96–98). Interne Eigenschaften und Relationen (102–105); farbenlogische Beispiele.

106–112. Der mathematische Glaube.

113–141. Der logische Zwang. — Inwiefern ist das logische Argument ein Zwang? (113–117). Die Unerbittlichkeit der Logik mit der des Gesetzes verglichen (118). Die 'logische Maschine' und die Kinematik starrer Körper (119–125). 'Die Härte des logischen Muß' (121). Die Maschine als Symbol für ihre Wirkungsweise (122). Die Verwendung eines Wortes mit einem Schlag erfassen (123–130). Die Möglichkeit als Schatten der Wirklichkeit (125). Die unverstandene Verwendung des Wortes als seltsamer Vorgang gedeutet (127). (Zu 122–130 vgl. "Philosophische Untersuchungen" §§ 191–197.) Die Gesetze der Logik als "Denkgesetze" (131–133). Sich in einer Rechnung irren (134–136). Bemerkung über Messen (139). Logische Unmöglichkeit (140). "Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen" (141).

TABLE OF CONTENTS

Part I

1–5. Following a rule (Cf. *Philosophical Investigations* §§ 189–90 ff.).—Steps determined by a formula (1–2). Continuation of a series (3). Inexorability of mathematics; mathematics and truth (4–5). Remark on measuring (5).

6–23. Logical inference.—The word "all"; inference from '(x).*fx*' to '*fa*' (10–16). Inference and truth (17–23).

24–74. Proof.—Proof as pattern or model (paradigm). Example: hand and pentacle (25 ff.). Proof as picture of an experiment (36). Example: 100 marbles (36 ff.). Construction of figures out of their parts (42–72). Mathematical surprise. Proof and conviction. Mathematics and essence (32, 73, 74). The depth of the essence: the deep need for the convention (74).

75–105. Calculation and experiment.—The 'unfolding' of mathematical properties. Example of 100 marbles (75, 86, 88). Unfolding the properties of a polygon (76), and of a chain (79, 80, 91, 92). Measuring (93, 94). Geometrical examples (96–98). Internal properties and relations (102–105); examples from the logic of colour.

106–112. Mathematical belief.

113–141. Logical compulsion.—In what sense does logical argument compel? (113–117). The inexorability of logic compared with that of the law (118). The 'logical machine' and the kinematics of rigid bodies' (119–125). 'The hardness of the logical *must*' (121). The machine as symbolizing its way of working (122). The employment of a word grasped in a flash (123–130). Possibility as a shadow of reality (125). The employment of a word misunderstood and interpreted as a queer process (127). (For 122–130 see also *Philosophical Investigations* §§ 191–197.) The laws of logic as 'laws of thought' (131–133). Going wrong in a calculation (134–136). Remark on measuring (139). Logical impossibility (140). "What we are supplying is really remarks on the natural history of man" (141).

142–155. Begründung eines Rechenvorgangs und eines logischen Schlusses. — Rechnen ohne Sätze (142–144). Das Holzverkaufen-Beispiel (142–151). "Sind unsre Schlußgesetze ewig und unveränderlich?" (154). Die Logik ist *vor* der Wahrheit (155).

156–169. Mathematik, Logik und Erfahrung. — Beweis und Experiment (156–161). Was an der Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache (164). Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker (167).

Anhang I

1–4. Arten der Sätze. — Arithmetik ohne Sätze betrieben (4).

5–7. Wahrheit und Beweisbarkeit im System der "Principia Mathematica".

8–19. Diskussion eines Satzes '*P*', der seine eigene Unbeweisbarkeit im System der "Principia Mathematica" behauptet. — Rolle des Widerspruchs im Sprachspiel (11–14, 17).

20. Die Sätze der Logik. 'Satz' und 'satzartiges Gebilde'.

Anhang II

1–3. Das Diagonalverfahren. — Der Begriff 'unabzählbar' (2). Vergleich der Begriffe der reellen Zahl und der Kardinalzahl (3).

4. Die Krankheit einer Zeit.

5. Diskussion des Satzes: "Es gibt keine größte Kardinalzahl".

6–7. Irrationalzahlen.

8–9. $\aleph_0$.

10–13. Diskussion des Satzes: "Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach ordnen".

14. Vergleich von verschiedenen Spielen.

15–16. Diskussion des Satzes, daß die Brüche (Zahlenpaare) in eine unendliche Reihe geordnet werden können.

17. Das Wort "unendlich".

18. Finitismus, Behaviourism. Allgemeine Bemerkungen.

142–155. Foundation of a calculating procedure and of a logical inference.—Calculating without propositions (142–144). Example: sale of timber (142–151). "Are our laws of inference eternal and unalterable"? (154). Logic precedes truth (155).

156–169. Mathematics, logic, and experience.—Proof and experiment (156–161). What in mathematics is logic: it moves in the rules of our language (164). The mathematician is an inventor, not a discoverer (167).

Appendix I

1–4. Kinds of proposition.—Arithmetic done without propositions (4).

5–7. Truth and provability in the system of *Principia Mathematica*.

8–19. Discussion of a proposition '*P*' which asserts its own unprovability in the system of *Principia Mathematica.*—The role of contradiction in the language-game (11–14, 17).

20. The propositions of logic. 'Proposition' and 'propositional formation'.

Appendix II

1–3. The diagonal procedure.—The concept 'non-denumerable' (2). Comparison of the concepts of real number and cardinal number (3).

4. The sickness of a time.

5. Discussion of the proposition "There is no greatest cardinal number".

6–7. Irrational numbers.

8–9. $\aleph_0$.

10–13. Discussion of the proposition "Fractions cannot be arranged in order of magnitude".

14. Comparison of different games.

15–16. Discussion of the proposition that the fractions (number-pairs) can be arranged in an infinite series.

17. The word "infinite".

18. Finitism, Behaviourism. General remarks.

Teil II

1–2. Der Beweis. — Der mathematische Beweis muß übersichtlich sein. Rolle der Definitionen (2).

3–8. Russells Logik und die Idee von der Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik. — Die Anwendung der Rechnung muß für sich selber sorgen (4). Beweis im Russell-Kalkül, im Dezimalkalkül, und im Einserkalkül.

9–11. Der Beweis. — Der Beweis als einprägsames Bild (9). Die Reproduktion einer Beweisfigur (10–11).

12–20. Russells Logik und das Problem von der Verhältnis verschiedener Rechentechniken zu einander. — Was ist die Erfindung des Dezimalsystems? (12). Beweis im Russell-Kalkül und im Dezimalsystem (13). Übersehbare und unübersehbare Zahlzeichen (16). Verhältnis von gekürzten und ungekürzten Rechentechniken zu einander (17–20).

21–44. Der Beweis. — Identität und Reproduzierbarkeit eines Beweises (21). Der Beweis als Vorbild; Beweis und Experiment (22–24). Beweis und mathematische Überzeugung (25–26). Im Beweis haben wir uns zu einer Entscheidung durchgerungen (27). Der bewiesene Satz als Regel. Er soll uns zeigen was zu sagen *Sinn* hat (28). Die Sätze der Mathematik als 'Instrumente der Sprache' (29). Das mathematische Muß: eine Gleise in der Sprache gelegt (30). Der Beweis führt einen neuen Begriff ein (31). Welchen Begriff schafft '$p \supset p$'? '$p \supset p$' als Angelpunkt der sprachlichen Darstellungsweise (32–33). Der Beweis als Teil einer Institution (36). Bedeutung des Unterschieds von Sinnbestimmung und Sinnverwendung (37). Anerkennung eines Beweises; die 'geometrische' Auffassung des Beweises (38–40). Der Beweis als Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung (41). "Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein" (42). "Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut's schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht und fällt" (43). In der Mathematik können wir den logischen Beweisen entlaufen (44).

45–64. Russells Logik. — Verhältnis der gewöhnlichen Beweistechnik zu der Russellschen (45). Kritik der Auffassung von der Logik als 'Grundlage' der Mathematik. Die Mathematik ist ein *buntes Gemisch* von Rechentechniken. Die abgekürzte Technik als neuer Aspekt der unabgekürzten (46–48). Bemerkung zur Trigonometrie (50). Die Dezimalnotation ist unabhängig von dem

PART II

1–2. Proof.—Mathematical proof must be perspicuous. Role of definitions (2).

3–8. Russell's logic and the idea of the reduction of arithmetic to symbolic logic.—The application of the calculation must take care of itself (4). Proof in the Russellian calculus, in the decimal calculus, and in the stroke calculus.

9–11. Proof.—Proof as a memorable picture (9). The reproduction of the pattern of a proof (10–11).

12–20. Russell's logic and the problem of the mutual relation of different calculating techniques.—What is the invention of the decimal system? (12). Proof in the Russellian calculus and in the decimal system (13). Signs for numbers that can, and that cannot, be taken in (16). Relation of abbreviated and unabbreviated calculating techniques to one another (17–20).

21–44. Proof.—Identity and reproducibility of a proof (21). The proof as model. Proof and experiment (22–24). Proof and mathematical conviction (25–26). In the proof we have won through to a decision (27). The proved proposition as a rule. It serves to shew us what it makes *sense* to say (28). The propositions of mathematics as 'instruments of language' (29). The proof introduces a new concept (31). What concept does '$p \supset p$' produce? (32). '$p \supset p$' as pivot of the linguistic method of representation (33). The proof as part of an institution (36). Importance of the distinction between determining and using a sense (37). Acceptance of a proof; the 'geometrical' conception of proof (38–40). The proof as adoption of a particular employment of signs (41). "The proof must be a procedure plain to view" (42). "Logic as foundation of mathematics does not work if only because the cogency of the logical proof stands and falls with its geometrical cogency" (43). In mathematics we can get away from logical proofs (44).

45–64. Russell's logic.—Relation between the ordinary and the Russellian technique of proof (45). Criticism of the conception of logic as the 'foundation' of mathematics. Mathematics is a *motley* of calculating techniques. The abbreviated technique as a new aspect of the unabbreviated (46–48). Remark on trigonometry (50). The decimal notation is independent of calculation

Rechnen mit Einerstrichen (51). Warum Russells Logik uns nicht *dividieren* lehrt (52). Warum die Mathematik nicht Logik ist (53). Der rekursive Beweis (54). Beweis und Experiment (55). Das Entsprechen verschiedener Kalküle; Strichnotation und Dezimalnotation (56–57). Mehrere Beweise eines und desselben Satzes; Beweis und Sinn eines mathematischen Satzes (58–62). Die *genaue* Entsprechung eines überzeugenden Übergangs in der Musik und in der Mathematik (63).

65–76. Rechnung und Experiment. — Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze? (65). Mathematische Sätze als Prophezeiungen von übereinstimmenden Rechenresultaten aufgefaßt (66). Zum Phänomen des Rechnens gehört Übereinstimmung (67). Wenn eine Rechnung ein Experiment ist, was ist dann ein Fehler in der Rechnung? (68). Die Rechnung als Experiment und als *Weg* (69). Ein Beweis dient der Verständigung. Ein Experiment setzt sie voraus (71). Mathematik und die Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen (72). Der Begriff des Rechnens schließt Verwirrung aus (75–76).

77–90. Der Widerspruch. — Ein Spiel, in dem, wer anfängt, immer gewinnen muß (77). Rechnen mit $(a-a)$. Die Abgründe in einem Kalkül sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe (78). Diskussion des heterologischen Paradoxes (79). Der Widerspruch vom Standpunkt des Sprachspiels betrachtet. Der Widerspruch als 'heimliche Krankheit' des Kalküls (80). Widerspruch und Brauchbarkeit eines Kalküls (81). Der Widerspruchsfreiheitsbeweis und der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den Widerspruch (82–89). "Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch und zum Beweis der Widerspruchsfreiheit zu ändern" (82). Die Rolle des Satzes: "Ich muß mich verrechnet haben" — der Schlüssel zum Verständnis der 'Grundlagen' der Mathematik (90).

Teil III

1–7. Über Axiome. — Das Einleuchten der Axiome (1–3). Einleuchten und Verwendung (2–3). Axiom und Erfahrungssatz (4–5). Die Negation eines Axioms (5). Der mathematische Satz steht auf vier Füßen, nicht auf dreien (7).

8–9. Regelfolgen. — Beschreibung mit Hilfe einer Regel (8).

10. Die arithmetische Annahme ist nicht an der Erfahrung gebunden.

with unit strokes (51). Why Russell's logic does not teach us to *divide* (52). Why mathematics is not logic (53). Recursive proof (54). Proof and experiment (55). The correspondence of different calculi; stroke notation and decimal notation (56–57). Several proofs of one and the same proposition; proof and the sense of a mathematical proposition (58–62). The *exact* correspondence of a convincing transition in music and in mathematics (63).

65–76. Calculation and experiment.—Are the propositions of mathematics anthropological propositions? (65). Mathematical propositions conceived as prophecies of concordant results of calculating (66). Agreement is part of the phenomenon of calculating (67). If a calculation is an experiment, what in that case is a mistake in calculation? (68). The calculation as an experiment and as a *path* (69). A proof subserves mutual understanding. An experiment presupposes it (71). Mathematics and the science of conditional calculating reflexes (72). The concept of calculation excludes confusion (75–76).

77–90. Contradiction.—A game in which the one who moves first must always win (77). Calculating with $(a - a)$. The chasms in a calculus are not there if I do not see them (78). Discussion of the heterological paradox (79). Contradiction regarded from the point of view of the language-game. Contradiction as a 'hidden sickness' of the calculus (80). Contradiction and the usability of a calculus (81). The consistency proof and the misuse of the idea of *mechanical* insurance against contradiction (82–89). "My aim is to change the *attitude* towards contradiction and the consistency proof." (82) The role of the proposition: "I must have miscalculated"—the key to understanding the 'foundations' of mathematics (90).

PART III

1–7. On axioms.—The self-evidence of axioms (1–3). Self-evidence and use (2–3). Axiom and empirical proposition (4–5). The negation of an axiom (5). The mathematical proposition stands on four legs, not on three (7).

8–9. Following a rule.—Description by means of a rule (8).

10. The arithmetical assumption is not tied to experience.

11–13. Die Auffassung der Arithmetik als Naturgeschichte der Zahlen. — Die Beurteilung der Erfahrung mittels des Bildes (12).

14. Beziehung des logischen (mathematischen) Satzes nach außen.

15–19. Die Möglichkeit angewandte Mathematik ohne reine Mathematik zu treiben. — Mathematik muß nicht in *Sätzen* getrieben werden; der Schwerpunkt kann ganz im *Tun* liegen (15). Das kommutative Gesetz als Beispiel (16–17).

20. Das Rechnen als maschinelle Tätigkeit.

21. Das Bild als Beweis.

22, 27. Intuition.

26. Was ist der Unterschied zwischen *nicht* Rechnen und *falsch* Rechnen?

29–33. Beweis und mathematische Begriffsbildung. — Der Beweis ändert die Begriffsbildung. Die Begriffsbildung als Grenze der Empirie (29). Der Beweis *zwingt* nicht, sondern *führt* (30). Der Beweis leitet unsere Erfahrungen in bestimmte Kanäle (31, 33). Beweis und Vorhersage (33).

34. Das philosophische Problem ist: Wie können wir die Wahrheit sagen, und dabei diese starken Vorurteile *beruhigen*?

35–36. Der mathematische Satz. — Wir erkennen ihn an, *indem* wir ihm den Rücken drehen (35). Die Wirkung des Beweises: man stürzt sich in die neue Regel hinein (36).

39, 42. Synthetischer Charakter der mathematischen Sätze. — Die Verteilung der Primzahlen als Beispiel (42).

40. Das Resultat als Äquivalent der Operation gesetzt.

41. Daß der Beweis übersichtlich sein muß, heißt, daß Kausalität im Beweise keine Rolle spielt.

43–44. Intuition in der Mathematik.

47. Der mathematische Satz als Begriffsbestimmung, die auf die Entdeckung einer neuen Form folgt.

48. Das Arbeiten der mathematischen Maschine ist nur das *Bild* des Arbeitens einer Maschine.

49. Das Bild als Beweis.

50–51. Das Umkehren eines Wortes.

11–13. The conception of arithmetic as the natural history of numbers. —Judging experience by means of the picture (12).

14. External relation of the logical (mathematical) proposition.

15–19. The possibility of doing applied mathematics without pure mathematics.—Mathematics need not be done in *propositions*; the centre of gravity may lie in *action* (15). The commutative law as an example (16–17).

20. Calculation as a mechanical activity.

21. The picture as a proof.

22, 27. Intuition.

26. What is the difference between *not* calculating and calculating *wrong*?

29–33. Proof and mathematical concept formation.—Proof alters concept formation. Concept formation as the limit of the empirical (29). Proof does not *compel*, but *guides* (30). Proof conducts our experience into definite channels (31, 33). Proof and prediction (33).

34. The philosophical problem is: how can we tell the truth and at the same time *pacify* these strong prejudices?

35–36. The mathematical proposition.—We acknowledge it *by* turning our back on it (35). The effect of the proof: one plunges into the new rule (36).

39, 42. Synthetic character of mathematical propositions.—The distribution of primes as an example (42).

40. The result set up as equivalent to the operation.

41. That proof must be perspicuous means that causality plays no part in proof.

43–44. Intuition in mathematics.

47. The mathematical proposition as determination of a concept, following upon the discovery of a new form.

48. The working of the mathematical machine is only the *picture* of the working of a machine.

49. The picture as a proof.

50–51. Reversal of a word.

52–53. Mathematischer Satz und Erfahrungssatz. — Die Annahme eines mathematischen Begriffes drückt die sichere Erwartung gewisser Erfahrungen aus; aber die Festsetzung dieses Maßes ist dem Aussprechen der Erwartungen nicht äquivalent (53).

55–60. Der Widerspruch. — Der Lügner (58). Der Widerspruch als etwas Über-propositionales aufgefaßt, als Denkmal mit einem Januskopf über den Sätzen der Logik thronend (59).

Teil IV

1–4. Die Mathematik als Spiel und als maschinenhafte Tätigkeit. — Rechnet die Rechenmaschine? (2). Wieweit muß man einen Begriff vom 'Satz' haben, um die Russellsche mathematische Logik zu verstehen? (4).

5–8. Tut ein Mißverständnis, die mögliche Anwendung der Mathematik betreffend, der Rechnung als einem Teil der Mathematik Eintrag? — Mengenlehre (7).

9–13. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik. — Wo kein Entscheidungsgrund vorliegt, muß er erst erfunden werden, um der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten einen Sinn zu geben.

14–16 und 21–23. 'Alchemie' des Unendlichkeitsbegriffes und anderer mathematischen Begriffen mit unverstandenen Anwendungen. — Unendliche Vorhersagungen (23).

17–20. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Der mathematische Satz als Gebot. Mathematische Existenz.

24–27. Existenzbeweis in der Mathematik. — "Der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik" (24; siehe auch 46 u. 48). Das mathematisch Allgemeine steht zum mathematisch Besonderen nicht in dem Verhältnis wie sonst das Allgemeine zum Besonderen (25). Existenzbeweise die keine Konstruktion des Existierenden zulassen (26–27).

28. Der Beweis durch *reductio ad absurdum*.

29–40. Vom Extensionalen und Intensionalen in der Mathematik; der Dedekind-Schnitt. — Die geometrische Illustration der Analysis (29). Dedekinds Satz ohne Irrationalzahlen (30). Wie kommt dieser Satz zu einem tiefen Inhalt? (31). Das Bild der Zahlengeraden (32, 37). Diskussion des Begriffs des Schnittes (33–34). Die Allgemeinheit der Funktionen eine ungeordnete Allgemein-

52–53. Mathematical and empirical propositions.—The assumption of a mathematical concept expresses the confident expectation of certain experiences; but the establishment of this measure is not equivalent to the expression of the expectations (53).

55–60. Contradiction.—The liar (58). Contradiction conceived as something supra-propositional, as a monument with a Janus head enthroned above the propositions of logic (59).

Part IV

1–4. Mathematics as a game and as a machine-like activity.—Does the calculating machine calculate? (2). How far is it necessary to have a concept of 'proposition' in order to understand Russell's mathematical logic? (4).

5–8. Is a misunderstanding about the possible application of mathematics any objection to a calculation as part of mathematics?—Set theory (7).

9–13. The law of excluded middle in mathematics.—Where there is nothing to base a decision on, we must invent something in order to give the application of the law of excluded middle a sense.

14–16 and 21–23. 'Alchemy' of the concept of infinity and of other mathematical concepts whose application is not understood.—Infinite predictions (23).

17–20. The law of excluded middle. The mathematical proposition as a commandment. Mathematical existence.

24–27. Existence proofs in mathematics.—"The harmful invasion of mathematics by logic" (24; see also 46 and 48). The mathematically general does not stand to the mathematically particular in the same relation as does the general to the particular elsewhere (25). Existence proofs which do not admit of the construction of what exists (26–27).

28. Proof by *reductio ad absurdum*.

29–40. On the extensional and intensional in mathematics; Dedekind's theorem without irrational numbers (30). How does this theorem come by its deep content? (31). The picture of the number line (32, 37). Discussion of the concept of a cut (33–34). Generality in the realm of functions is an unordered generality (38). Disheit (38). Diskussion des mathematischen Funktionsbegriffs; Extension und Intension in der Analysis (39–40).

41. Begriffe die in 'notwendigen' Sätzen vorkommen, müssen auch in nicht notwendigen eine Bedeutung haben.

42–46. Vom Beweis und Verstehen des mathematischen Satzes. — Der Beweis als *Bewegung* von einem Begriff zum andern aufgefaßt (42). Einen mathematischen Satz verstehen (45–46). Der Beweis führt einen neuen Begriff ein. Der Beweis soll mich von etwas überzeugen (45). Existenzbeweis und Konstruktion (46).

47. Ein Begriff ist nicht wesentlich ein Prädikat.

48. Die 'mathematische Logik' hat das Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verblendet.

49. Das Zahlzeichen gehört zu einem Begriffszeichen und ist nur mit diesem ein Maß.

50. Vom Begriff der Allgemeinheit.

51. Der Beweis zeigt, *wie* das Resultat sich ergibt.

52–53. Allgemeine Bemerkungen. — Der Philosoph ist der, der in sich viele Krankheiten des Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden Menschenverstandes kommen kann (53).

TEIL V

1. Die Rolle der Sätze, die von Maßen handeln und nicht Erfahrungssätze sind. Ein solcher Satz (z.B., 12 Zoll = 1 Fuß) ruht in einer Technik, und also in den Bedingungen dieser Technik; hat aber nicht den Sinn, diese Bedingungen auszusprechen.

2. Die Rolle der Regel. Mittels ihrer kann man auch Voraussagungen machen. Dies beruht auf Eigenschaften der Maßstäbe und der Menschen, die sie gebrauchen.

3. Ein mathematischer Satz — eine Umformung des Ausdrucks. Die Regel in ihrer Nützlichkeit und in ihrer Würde betrachtet. Wie sollen zwei arithmetische Ausdrücke dasselbe sagen? Die Arithmetik setzt sie einander gleich.

4. Einer, der Arithmetik lernt, indem er nur meinen Beispielen folgt. Sage ich, "Wenn du mit diesen Zahlen machst, was ich dir auf den andern vorgemacht habe, wirst du das und das erhalten" — so scheint das sowohl eine Vorhersage wie auch ein mathematischer Satz zu sein.

cussion of the mathematical concept of a function; extension and intension in analysis (39–40).

41. Concepts occurring in 'necessary' propositions must also have a meaning in non-necessary ones.

42–46. On proof and understanding of a mathematical proposition.—The proof conceived as a *movement* from one concept to another (42). Understanding a mathematical proposition (45–46). The proof introduces a new concept. The proof serves to convince one of something (45). Existence proof and construction (46).

47. A concept is not essentially a predicate.

48. 'Mathematical logic' has completely blinded the thinking of mathematicians and philosophers.

49. The numerical sign goes along with the sign for a concept and only together with this is it a measure.

50. On the concept of generality.

51. The proof shews *how* the result is yielded.

52–53. General remarks.—The philosopher is the man who has to cure himself of many sicknesses of the understanding before he can reach the notions of the healthy human understanding.

PART V

1. The role of propositions that treat of measures and are not empirical propositions. Such a proposition (e.g. 12 inches = 1 foot) is embedded in a technique, and so in the conditions of this technique; but it is not a statement of those conditions.

2. The role of a rule. It can also be used to make predictions. This depends on properties of the measuring rods and of the people who use them.

3. A mathematical proposition—a transformation of the expression. The rule considered from the point of view of usefulness and from that of dignity. How are two arithmetical expressions supposed to say the same thing? They are made equivalent in arithmetic.

4. Someone who learns arithmetic simply by following my examples. If I say, "If you do with these numbers what I did for you with the others, you will get such-and-such a result"—this seems to be both a prediction and a mathematical proposition.

5. Ist nicht der Gegensatz zwischen Regeln der Darstellung und Sätzen, welche beschreiben, einer, der nach allen Richtungen hin abfällt?

6. Was ist einem mathematischen Satz und einem mathematischen Beweis gemein, daß sie beide "mathematisch" heißen?

Der Beweis als Bild. Nicht die Approbation allein macht dies Bild zur Rechnung, sondern die Übereinstimmung der Approbationen.

7. Ändert sich der Sinn des Satzes, wenn ein Beweis gefunden wird? Der neue Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein.

8. Der Russellsche '$\sim f(f)$'.
Sagen wir, wir erhielten manche unserer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Sind sie dadurch illegitim?
Könnte man nicht einen Widerspruch gelten lassen?

9. "Eine Methode, die einen Widerspruch mechanisch vermeidet." Nicht schlechte Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück Mathematik erfunden.

10. Müssen die logischen Axiome immer überzeugend sein?

11. Die Leute, die gelegentlich durch Ausdrücke vom Werte 0 kürzen.

12. Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat, sobald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann — hat sie keinen gehabt, so lang ich das *nicht* wußte?

Man denkt, der Widerspruch *muß* sinnlos sein.

13. Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?
Ein guter Engel wird immer nötig sein.

14. Der praktische Wert des Rechnens. Rechnung und Experiment.
Eine Rechnung als ein Teil der Technik eines Experiments.
Die Rechnungshandlung kann auch ein Experiment sein.

15. Soll die Mathematik Tatsachen zu Tage bringen? Bestimmt sie nicht erst den Charakter dessen, was wir 'Tatsache' nennen? Lehrt sie uns nicht nach Tatsachen zu fragen?

In der Mathematik gibt es keine kausalen Zusammenhänge, nur die Zusammenhänge des Bildes.

16. Bemerkungen.

17. Das Netz von Fugen einer Mauer. Warum nennen wir dies ein mathematisches Problem?

Macht die Mathematik Experimente mit *Einheiten*?

5. Does not the contrast between rules of description and descriptive propositions shade off on every side?

6. What is common to a mathematical proposition and a mathematical proof, that they should both be called "mathematical"?

The proof as a picture. It is not assent alone which makes this picture into a calculation, but the consensus of assents.

7. Does the sense of the proposition change when a proof has been found? The new proof gives the proposition a place in a new system.

8. Russell's '$\sim f(f)$'.

Let us say we have got some of our results because of a hidden contradiction. Does that make them illegitimate?

Might we not let a contradiction stand?

9. "A method for avoiding a contradiction mechanically." It is not bad mathematics that is amended here, but a new bit of mathematics is invented.

10. Must logical axioms always be convincing?

11. The people who sometimes reduce by expressions of value 0.

12. If the calculation has lost its point for me, as soon as I know that I can get any arbitrary result from it—did it have no point as long as I did *not* know this?

One thinks that contradiction *has* to be senseless.

13. What does mathematics need a foundation for?

A good angel will always be necessary.

14. The practical value of calculating. Calculation and experiment.

A calculation as part of the technique of an experiment.

The activity of calculating can also be an experiment.

15. Is mathematics supposed to bring facts to light? Does it not take mathematics to determine the character of what we call a 'fact'? Does it not teach us to ask about certain facts?

In mathematics there are no causal connexions, only the connexions of the pattern.

16. Remarks.

17. The network of joins in a wall. Why do we call this a mathematical problem?

Does mathematics make experiments with *units*?

18. "Der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar" — wie ist das zu verstehen?

19. Die Konstruktion eines Satzzeichens aus Axiomen, nach Regeln; und es scheint, wir haben den wirklichen Sinn des Satzes als falsch demonstriert, und ihn zu gleicher Zeit bewiesen.

20. Rechnung und Erfahrung.

21. Zeigt der Widerspruch von "heterologisch" eine logische Eigenschaft dieses Begriffs?

22. Ein Spiel; und nach einem gewissen Zug, erweist sich jeder Versuch, weiterzuspielen, als den Regeln entgegen.

23. Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels.

Logischer Schluß, und nicht-logischer Schluß.

Die logischen Schlußregeln können weder falsch noch richtig sein. Sie bestimmen die Bedeutung der Zeichen.

24. Ein zweckmäßiger Vorgang mit Zahlzeichen muß nicht sein, was wir "Rechnen" nennen.

25. Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch Mathematik?

26. Daß sie Begriffe bilde, kann einem großen Teil der Mathematik wesentlich sein; und in anderen Teilen keine Rolle spielen.

27. Die Leute sehen einen Widerspruch nicht, und ziehen Schlüsse aus ihm.

Kann es eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?

28. Wenn wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch gefunden würde, so bewiese das, eine Arithmetik mit einem solchen Widerspruch könnte sehr gute Dienste leisten.

29. "Die Klasse der Löwen ist nicht ein Löwe, die Klasse der Klassen aber eine Klasse."

30. "Ich lüge immer." Welche Rolle könnte dieser Satz im menschlichen Leben spielen?

31. Logischer Schluß. Ist nicht eine Regel etwas willkürliches?

"Es ist den Menschen unmöglich, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen."

18. "The proposition that says of itself that it is unprovable"—how is this to be understood?

19. The construction of a propositional sign from axioms according to rules; it appears that we have demonstrated the actual sense of the proposition to be false, and at the same time proved it.

20. Calculation and experience.

21. Does the "heterological" contradiction shew a logical character of this concept?

22. A game. And after a certain move any attempt to go on playing proves to be against the rules.

23. Logical inference is part of a language game.

Logical inference and non-logical inference.

The rules of logical inference can be neither wrong nor right. They determine the meaning of the signs.

24. A reasonable procedure with numerals need not be what we call "calculating".

25. Is not a mathematics with an application that is sheer fantasy, still mathematics?

26. The formation of concepts may be essential to a great part of mathematics; and have no role in other parts.

27. A people who do not notice a contradiction, and draw conclusions from it.

Can it be a mathematical task to make mathematics into mathematics?

28. If a contradiction were actually found in arithmetic, this would show that an arithmetic with such a contradiction can serve us very well.

29. "The class of lions is not a lion, but the class of classes is a class."

30. "I always lie." What part might this sentence play in human life?

31. Logical inference. Is not a rule something arbitrary?

"It is impossible for human beings to recognize an object as different from itself."

32. "Richtig — d.h., das stimmt mit der Regel überein."

33. "Das *Gleiche* bringen" — wie kann ich das Einem erklären?

34. Wann soll man von einem Beweis der Existenz von '777' in einer Entwicklung reden?

35. "Begriffsbildung" kann verschiedenes heißen.

Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs.

---

36. Gehört es zum Begriff des Rechnens, daß die Menschen im allgemeinen zu diesem Resultat gelangen?

37. Wenn ich etwa frage, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt — was tut die Mathematik in diesem Fall?

38. Fragen über die Weise, wie die Mathematik Begriffe bildet.

---

39. Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren?

40. Eine Addition von Formen. Möglichkeiten im Falten eines Stücks Papier. Wie, wenn man keine Spaltung zwischen der geometrischen Möglichkeit und der physikalischen Möglichkeit machte?

Könnten nicht Leute u. U. mit Ziffern rechnen, ohne daß ein bestimmtes Resultat herauskommen *müßte*?

Wem die Rechnung einen kausalen Zusammenhang entdeckt, der rechnet nicht.

Die Mathematik ist normativ.

41. Die Einführung einer neuen Schlußregel als Übergang zu einem neuen Sprachspiel.

42. Beobachtung, daß eine Fläche rot und blau gefärbt ist, aber nicht, daß sie rot ist. Schlüsse davon.
Kann die Logik uns sagen, was wir beobachten müssen?

43. Eine Fläche mit Streifen von wechselnden Farben.

Könnte man Implikationen beobachten?

44. Einer sagt, er sieht einen rot und gelben Stern, aber nichts Gelbes.

45. "Ich halte mich an eine Regel."

32. "Correct—i.e. it conforms to the rule."

33. "Bringing the *same*"—how can I explain this to someone?

34. When should we speak of a proof of the existence of '777' in an expansion?

35. "Concept formation" may mean various things.

The concept of a rule for forming an infinite decimal.

---

36. Is it essential to the concept of calculating, that people generally reach this result?

37. If I ask, e.g., whether a certain body moves according to the equation of a parabola—what does mathematics do in this case?

38. Questions about the way in which mathematics forms concepts.

---

39. Can one not make mathematical experiments after all?

40. Adding shapes. Possibilities in folding a piece of paper. Suppose we did not separate geometrical and physical possibility?

Might not people in certain circumstances calculate with figures, without a particular result's *having* to come out?

If the calculation shews you a causal connexion, you are not calculating.

Mathematics is normative.

41. The introduction of a new rule of inference as a transition to a new language game.

42. Observation that a surface is red and blue, but not that it is red. Inferences from this.
Can logic tell us what we must observe?

43. A surface with stripes of changing colours.

Could implications be observed?

44. Someone says he sees a red and yellow star, but not anything yellow.

45. "I hold to a rule."

46. Das mathematische Muß — der Ausdruck einer Einstellung zur Technik der Rechnens.
Der Ausdruck dafür, daß die Mathematik Begriffe bildet.

47. Der Fall, man sehe den Komplex von A und B, aber weder A noch B.
Kann ich A und B sehen, aber nur A ∨ B beobachten?
Und umgekehrt.

48. Erfahrungen und zeitlose Sätze.

49. Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff?

50. Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man "Begriff" nennen will.

51. Beweis und Bild.

46. The mathematical *must*—the expression of an attitude towards the technique of calculating.
The expression of the fact that mathematics forms concepts.

47. The case of seeing the complex formed from A and B, but seeing neither A nor B.
Can I see A and B, but only observe A ∨ B?
And *vice versa*.

48. Experiences and timeless propositions.

49. In what sense can a proposition of arithmetic be said to give us a concept?

50. Not every language-game contains something that we want to call a "concept".

51. Proof and picture.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

REMARKS ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

I

Circa 1937–1938

1. Wir verwenden den Ausdruck: "die Übergänge sind durch die Formel . . . bestimmt". Wie wird er verwendet?—Wir können etwa davon reden, daß Menschen durch Erziehung (Abrichtung) dahingebracht werden, die Formel $y = x^2$ so zu verwenden, daß Alle, wenn sie die gleiche Zahl für x einsetzen, immer die gleiche Zahl für y herausrechnen. Oder wir können sagen: "Diese Menschen sind so abgerichtet, daß sie alle auf den Befehl '$+ 3$' auf der gleichen Stufe den gleichen Übergang machen." Wir könnten dies so ausdrücken: "Der Befehl '$+ 3$' bestimmt für diese Menschen jeden Übergang von einer Zahl zur nächsten völlig." (Im Gegensatz zu andern Menschen, die auf diesen Befehl nicht wissen, was sie zu tun haben, oder die zwar mit Sicherheit, aber ein jeder in anderer Weise, auf ihn reagieren.)

Wir können anderseits verschiedene Arten von Formeln und zu ihnen gehörige verschiedene Arten der Verwendung (verschiedene Arten der Abrichtung) einander entgegensetzen. Wir *nennen* dann Formeln einer bestimmten Art (und der dazugehörigen Verwendungsweise) "Formeln, welche eine Zahl y für ein gegebenes x bestimmen", und Formeln anderer Art, solche, "die die Zahl y für ein gegebenes x nicht bestimmen". ($y = x^2 + 1$ wäre von der ersten Art, $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$, $y = x^2 + z$ von der zweiten.) Der Satz: "die Formel . . . bestimmt eine Zahl y" ist dann eine Aussage über die Form der Formeln—und es ist nun ein Satz "Die Formel, die ich hingeschrieben habe, bestimmt y", oder "Hier steht eine Formel, die y bestimmt", zu unterscheiden von einem Satz wie: "Die Formel $y = x^2$ bestimmt die Zahl y für ein gegebenes x". Die Frage "Steht dort eine Formel, die y bestimmt?" heißt dann dasselbe wie: "Steht dort eine Formel dieser Art, oder jener Art?"; was wir aber mit der Frage anfangen sollen: "Ist $y = x^2$ eine Formel, die y für ein gegebenes x bestimmt?"—ist nicht ohne weiteres klar. Diese Frage könnte man etwa an einen Schüler stellen, um zu prüfen, ob er die Verwendung des Ausdrucks "bestimmen" versteht; oder es könnte eine mathematische Aufgabe sein, zu berechnen, ob auf der rechten Seite der Formel nur eine Variable steht, wie z.B. im Fall: $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$.

2. "Wie die Formel gemeint wird, das bestimmt, welche Übergänge zu machen sind." Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint

I

Circa 1937–1938

1. We use the expression: "The steps are determined by the formula . . .". How is it used?—We may perhaps refer to the fact that people are brought by their education (training) so to use the formula $y = x^2$, that they all work out the same value for y when they substitute the same number for x. Or we may say: "These people are so trained that they all take the same step at the same point when they receive the order 'add 3' ". We might express this by saying: for these people the order "add 3" completely determines every step from one number to the next. (In contrast with other people who do not know what they are to do on receiving this order, or who react to it with perfect certainty, but each one in a different way.)

On the other hand we can contrast different kinds of formula, and the different kinds of use (different kinds of training) appropriate to them. Then we *call* formulae of a particular kind (with the appropriate methods of use) "formulae which determine a number y for a given value of x", and formulae of another kind, ones which "do not determine the number y for a given value of x". ($y = x^2 + 1$ would be of the first kind, $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$, $y = x^2 + z$ of the second.) The proposition "The formula . . . determines a number y" will then be a statement about the form of the formulae—and now we must distinguish such a proposition as "The formula which I have written down determines y", or "Here is a formula which determines y", from one of the following kind: "The formula $y = x^2$ determines the number y for a given value of x". The question "Is the formula written down there one that determines y?" will then mean the same as "Is what is there a formula of this kind or that?"—but it is not clear off-hand what we are to make of the question "Is $y = x^2$ a formula which determines y for a given value of x?" One might address this question to a pupil in order to test whether he understands the use of the word "to determine"; or it might be a mathematical problem to work out whether there was only one variable on the right-hand side of the formula, as e.g. in the case: $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$.

2. "The way the formula is meant determines which steps are to be taken." What is the criterion for the way the formula is meant?

ist? Doch wohl die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen.

Wir sagen z.B. Einem, der ein uns unbekanntes Zeichen gebraucht: "Wenn du mit '$x!2$' meinst: x^2, so erhältst du *diesen* Wert für y, wenn du damit $\sqrt{x}$ meinst, *jenen.*"—Frage dich nun: Wie macht man es, mit "$x!2$" das eine, oder das andere *meinen*?

So kann also das Meinen die Übergänge zum voraus bestimmen.

3. *Wie weiß ich*, daß ich im Verfolg der Reihe + 2 schreiben muß

"20004, 20006"

und nicht

"20004, 20008"?

—(Ähnlich ist die Frage: "Wie weiß ich, daß diese Farbe 'rot' ist?")

"Aber du weißt doch z.B., daß du immer die *gleiche* Zahlenfolge in den Einern schreiben mußt: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, u.s.w."—Ganz richtig! das Problem muß auch schon in dieser Zahlenfolge, ja auch schon in *der*: 2, 2, 2, 2, u.s.w. auftreten.—Denn wie weiß ich, daß ich nach der 500sten "2" "2" schreiben soll? daß nämlich an dieser Stelle "2" 'die gleiche Ziffer' ist? Und wenn ich es *zuvor* weiß, was hilft mir dies Wissen für später? Ich meine: wie weiß ich dann, wenn der Schritt wirklich zu machen ist, was ich mit jenem früheren Wissen anzufangen habe?

(Wenn zur Fortsetzung der Reihe + 1 eine Intuition nötig ist, dann auch zur Fortsetzung der Reihe + 0.)

"Aber willst du sagen, daß der Ausdruck '+ 2' es für dich zweifelhaft läßt, was du, nach 2004 z.B., schreiben sollst?"—Nein; ich antworte ohne Bedenken: "2006". Aber darum ist es ja überflüssig, daß dies schon früher festgelegt wurde. Daß ich keinen Zweifel habe, wenn die Frage an mich herantritt, heißt eben nicht, daß sie früher schon beantwortet worden war.

"Aber ich weiß doch auch, daß, welche Zahl immer man mir geben wird, ich die folgende gleich mit Sicherheit werde angeben können."—Ausgenommen ist doch gewiß der Fall, daß ich sterbe, ehe ich dazu komme, und viele andere Fälle. Daß ich aber so sicher bin, daß ich werde fortsetzen können, ist natürlich sehr wichtig.—

4. "Worin liegt dann aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik?"—Wäre für sie nicht ein gutes Beispiel die Unerbittlichkeit, mit der auf eins zwei folgt, auf zwei drei, usw.?—Das heißt doch wohl: in der *Kardinalzahlenreihe* folgt; denn in einer andern Reihe folgt ja etwas anderes. Und ist denn *diese* Reihe nicht eben durch diese Folge *definiert*?—"Soll das also heißen, daß es gleich richtig ist, auf welche Weise immer Einer zählt, und daß jeder zählen kann, wie er will?"—Wir würden es wohl nicht "zählen" nennen, wenn jeder

Presumably the way we always use it, the way we were taught to use it.

We say, for instance, to someone who uses a sign unknown to us: "If by '$x!2$' you mean x^2, then you get this value for y, if you mean $\sqrt{x}$, that one".—Now ask yourself: how does one *mean* the one thing or the other by "$x!2$"?

That will be how meaning it can determine the steps in advance.

3. *How do I know* that in working out the series + 2 I must write

"20004, 20006"

and not

"20004, 20008"?

—(The question: "How do I know that this colour is 'red'?" is similar.)

"But you surely know for example that you must always write the *same* sequence of numbers in the units: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, etc."—Quite true: the problem must already appear in this sequence, and even in *this* one: 2, 2, 2, 2, etc.—For how do I know that I am to write "2" after the five hundredth "2"? i.e. that 'the same figure' in that place is "2"? And if I know it *in advance*, what use is this knowledge to me later on? I mean: how do I know what to do with this earlier knowledge when the step actually has to be taken?

(If intuition is needed to continue the series + 1, then it is also needed to continue the series + 0.)

"But do you mean to say that the expression '+ 2' leaves you in doubt what you are to do e.g. after 2004?"—No; I answer "2006" without hesitation. But just for that reason it is superfluous to suppose that this was determined earlier on. My having no doubt in face of the question does *not* mean that it has been answered in advance.

"But I surely also know that whatever number I am given I shall be able, straight off and with certainty, to give the next one.—Certainly my dying first is excluded, and a lot of other things too. But my being so certain of being able to go on is naturally very important.—

4. "But then what does the peculiar inexorability of mathematics consist in?"—Would not the inexorability with which two follows one and three two be a good example?—But presumably this means: follows in the *series of cardinal numbers*; for in a different series something different follows. And isn't *this* series just *defined* by this sequence?—"Is that supposed to mean that it is equally correct whichever way a person counts, and that anyone can count as he pleases?"—We should presumably not call it "counting" if everyone said the

irgendwie Ziffern nacheinander ausspräche; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir "zählen" nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Tätigkeiten unseres Lebens. Das Zählen, und Rechnen, ist doch—z.B.—nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (und das heißt: *so* zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf "eins" "zwei", auf "zwei" "drei" sagen, u.s.f. —"Aber ist dieses Zählen also nur ein *Gebrauch*; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit?" Die *Wahrheit* ist, daß das Zählen sich bewährt hat.—"Willst du also sagen, daß 'wahr-sein' heißt: brauchbar (oder nützlich) sein?"—Nein; sondern, daß man von der natürlichen Zahlenreihe—ebenso wie von unserer Sprache—nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern: sie sei brauchbar und, vor allem, *sie werde verwendet*.

5. "Aber folgt es nicht mit logischer Notwendigkeit, daß du zwei erhältst, wenn du zu eins eins zählst, und drei, wenn du zu zwei eins zählst, u.s.f.; und ist diese Unerbittlichkeit nicht dieselbe, wie die des logischen Schlusses?"—Doch! sie ist dieselbe.—"Aber entspricht denn der logische Schluß nicht einer Wahrheit? Ist es nicht *wahr*, daß das aus diesem folgt?"—Der Satz: "es ist wahr, daß das aus diesem folgt", heißt einfach: das folgt aus diesem. Und wie verwenden wir diesen Satz?—Was würde denn geschehen, wenn wir anders schlößen—*wie* würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten?

Wie würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten, wenn unsere Zollstäbe aus sehr weichem Gummi wären, statt aus Holz und Stahl?—"Nun, wir würden nicht das richtige Maß des Tisches kennen lernen." —Du meinst, wir würden nicht, oder nicht zuverlässig, *die* Maßzahl erhalten, die wir mit unsern harten Maßstäben erhalten. *Der* wäre also im Unrecht, der den Tisch mit dem dehnbaren Maßstab gemessen hätte und behauptete, er mäße 1.80 m nach unserer gewöhnlichen Meßart; sagt er aber, der Tisch mißt 1.80 m nach der seinen, so ist das richtig.—"Aber das ist dann doch überhaupt kein Messen!"—Es ist unserm Messen ähnlich und kann unter Umständen 'praktische Zwecke' erfüllen. (Ein Kaufmann könnte auf diese Weise verschiedene Kunden verschieden behandeln.)

Einen Maßstab, der sich bei geringer Erwärmung außerordentlich stark ausdehnte, würden wir—unter gewöhnlichen Umständen—deshalb *unbrauchbar* nennen. Wir könnten uns aber Verhältnisse denken, in denen gerade dies das Erwünschte wäre. Ich stelle mir vor, wir nehmen die Ausdehnung mit freiem Auge wahr; und wir legen Körpern in Räumen von ungleicher Temperatur die gleiche Maßzahl numbers one after the other *anyhow*; but of course it is not simply a question of a name. For what we call "counting" is an important part of our life's activities. Counting and calculating are not—e.g.—simply a pastime. Counting (and that means: counting like *this*) is a technique that is employed daily in the most various operations of our lives. And that is why we learn to count as we do: with endless practice, with merciless exactitude; that is why it is inexorably insisted that we shall all say "two" after "one", "three" after "two" and so on.—But is this counting only a *use*, then; isn't there also some truth corresponding to this sequence?" The *truth* is that counting has proved to pay.—"Then do you want to say that 'being true' means: being usable (or useful)?"—No, not that; but that it can't be said of the series of natural numbers—any more than of our language—that it is true, but: that it is usable, and, above all, *it is used*.

5. "But doesn't it follow with logical necessity that you get two when you add one to one, and three when you add one to two? and isn't this inexorability the same as that of logical inference?"—Yes! it is the same.—"But isn't there a truth corresponding to logical inference? Isn't it *true* that this follows from that?"—The proposition: "It is true that this follows from that" means simply: this follows from that. And how do we use this proposition?—What would happen if we made a different inference—*how* should we get into conflict with truth?

How should we get into conflict with truth, if our footrules were made of very soft rubber instead of wood and steel?—"Well, we shouldn't get to know the correct measurement of the table."—You mean: we should not get, or could not be sure of getting, *that* measurement which we get with our rigid rulers. So if you had measured the table with the elastic rulers and said it measured five feet by our usual way of measuring, you would be wrong; but if you say that it measured five feet by your way of measuring, that is correct.—"But surely that isn't measuring at all!"—It is similar to our measuring and capable, in certain circumstances, of fulfilling 'practical purposes'. (A shopkeeper might use it to treat different customers differently.)

If a ruler expanded to an extraordinary extent when slightly heated, we should say—in normal circumstances—that that made it *unusable*. But we could think of a situation in which this was just what was wanted. I am imagining that we perceive the expansion with the naked eye; and we ascribe the same numerical measure of length to bodies in der Länge bei, wenn sie auf den Maßstab, der fürs Auge bald länger bald kürzer ist, gleich weit reichen.

Man kann dann sagen: Was hier "messen" und "Länge" und "längengleich" heißt, ist etwas Anderes, als was wir so nennen. Der Gebrauch dieser Wörter ist hier ein anderer als der unsere; aber er ist mit ihm *verwandt*, und auch wir gebrauchen diese Wörter auf vielerlei Weise.

6. Man muß sich klar machen, worin Schließen eigentlich besteht. Man wird etwa sagen, es besteht im Übergang von einer Behauptung zu einer andern. Aber heißt das, daß Schließen etwas ist, was stattfindet beim Übergang von der einen zur andern Behauptung, also *ehe* die andere ausgesprochen ist—oder, daß Schließen darin besteht, die eine Behauptung auf die andere folgen zu lassen, d.h., z.B. nach ihr auszusprechen? Wir stellen uns, verleitet durch die besondere Verwendung des Verbums "schließen", gern vor, das Schließen sei eine eigentümliche Tätigkeit, ein Vorgang im Medium des Verstandes, gleichsam ein Brauen der Nebel, aus welchem dann die Folgerung auftaucht. Sehen wir aber doch zu, was dabei geschieht!—Da gibt es einen Übergang von einem Satz zum andern auf dem Weg über andere Sätze, also durch eine Schlußkette; aber von diesem brauchen wir nicht zu reden, da er ja eine andere Art von Übergang voraussetzt, nämlich den von einem Glied der Kette zum nächsten. Es kann nun zwischen den Gliedern ein Vorgang der Überleitung stattfinden. An diesem Vorgang ist nun nichts Okkultes; er ist ein Ableiten des einen Satzzeichens aus dem andern nach einer Regel; ein Vergleichen der beiden mit irgendeinem Paradigma, das uns das Schema des Übergangs darstellt; oder dergleichen. Das kann auf dem Papier, mündlich, oder 'im Kopf' vor sich gehen.—Der Schluß kann aber auch so gezogen werden, daß der eine Satz, ohne Überleitung, nach dem andern ausgesprochen wird; oder die Überleitung besteht nur darin, daß wir "Also", oder "Daraus folgt" sagen, oder dergl. . . . Man nennt es dann "Schluß", wenn der gefolgerte Satz sich tatsächlich aus der Prämisse ableiten *läßt*.

7. Was heißt es nun, daß sich ein Satz aus einem andern, vermittels einer Regel, ableiten *läßt*? Läßt sich nicht alles aus allem vermittels *irgend* einer Regel—ja nach jeder Regel mit entsprechender Deutung—ableiten? Was heißt es, wenn ich z.B. sage: diese Zahl läßt sich durch die Multiplikation jener beiden erhalten? Dies ist eine Regel, die sagt, daß wir diese Zahl erhalten müßen, wenn anders wir *richtig* multiplizieren; und diese Regel können wir dadurch erhalten, daß wir die beiden Zahlen multiplizieren, oder auch auf andere Weise (obwohl man auch jeden Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt, eine 'Multiplikation' nennen könnte). Man sagt nun, ich habe multipliziert, wenn

rooms of different temperatures, if they measure the same by the ruler which to the eye is now longer, now shorter.

It can be said: What is here called "measuring" and "length" and "equal length", is something different from what we call those things. The use of these words is different from ours; but it is *akin* to it; and we too use these words in a variety of ways.

6. We must get clear what inferring really consists in: We shall perhaps say it consists in the transition from one assertion to another. But does this mean that inferring is something that takes place when we are making a transition from one assertion to another, and so *before* the second one is uttered—or that inferring consists in making the one assertion follow upon the other, that is, e.g., in uttering it after the other? Misled by the special use of the verb "infer" we readily imagine that inferring is a peculiar activity, a process in the medium of the understanding, as it were a brewing of the vapour out of which the deduction arises. But let's look at what happens here.—There is a transition from one proposition to another *via* other propositions, that is, a chain of inferences; but we don't need to talk about this; for it presupposes another kind of transition, namely that from one link of the chain to the next. Now a process of forming the transition may occur between the links. There is nothing occult about this process; it is a derivation of one sentence from another according to a rule; a comparison of both with some paradigm or other, which represents the schema of the transition; or something of the kind. This may go on on paper, orally, or 'in the head'.—The conclusion may however also be drawn in such a way that the one proposition is uttered after the other, without any such process; or the process may consist merely in our saying "Therefore" or "It follows from this", or something of the kind. We call it a "conclusion" when the inferred proposition *can* in fact be derived from the premise.

7. Now what does it mean to say that one proposition *can* be derived from another by means of a rule? Can't anything be derived from anything by means of *some* rule—or even according to any rule, with a suitable interpretation? What does it mean for me to say e.g.: this number can be got by multiplying these two numbers? This is a rule telling us that we must get this number if we multiply *correctly*; and we can obtain this rule by multiplying the two numbers, or again in a different way (though any procedure that leads to this result might be called 'multiplication'). Now I am said to have multiplied when

ich die Multiplikation 265 × 463 ausgeführt habe, aber auch, wenn ich sage: "4 mal 2 ist 8", obwohl hier kein Rechnungsvorgang zum Produkt geführt hat (das ich aber auch hätte *ausrechnen* können). Und so sagen wir auch, es werde ein Schluß gezogen, wo er nicht errechnet wird.

8. Ich darf aber doch nur folgern, was wirklich *folgt*!—Soll das heißen: nur das, was den Schlußregeln gemäß folgt; oder soll es heißen: nur das, was *solchen* Schlußregeln gemäß folgt, die irgendwie mit einer Realität übereinstimmen? Hier schwebt uns in vager Weise vor, daß diese Realität etwas sehr abstraktes, sehr allgemeines und sehr hartes ist. Die Logik ist eine Art von Ultra-Physik, die Beschreibung des 'logischen Baus' der Welt, den wir durch eine Art von Ultra-Erfahrung wahrnehmen (mit dem Verstande etwa). Es schweben uns hier vielleicht Schlüsse vor wie dieser: "Der Ofen raucht, also ist das Ofenrohr wieder verlegt." (Und *so* wird dieser Schluß gezogen! Nicht so: "Der Ofen raucht, und wenn immer der Ofen raucht, ist das Ofenrohr verlegt; also . . .".)

9. Was wir 'logischer Schluß' nennen, ist eine Transformation des Ausdrucks. Z.B. die Umrechnung von einem Maß auf ein anderes. Auf der einen Kante eines Maßstabes sind Zoll aufgetragen, auf der andern cm. Ich meße den Tisch in Zoll und gehe dann *auf dem Maßstab* zu cm über.—Und freilich gibt es auch beim Übergang von einem Maß zum andern richtig und falsch; aber mit welcher Realität stimmt hier das Richtige überein? Wohl mit einer *Abmachung*, oder einem *Gebrauch*, und etwa mit den praktischen Bedürfnissen.

10. "Aber muß denn nicht—z.B.—aus '$(x).fx$' 'fa' folgen, *wenn* '$(x).fx$' so gemeint ist, wie wir es meinen?"—Und wie äußert es sich, *wie* wir es meinen? Nicht durch die ständige Praxis seines Gebrauchs? und etwa noch durch gewiße *Gesten*—und was dem ähnlich ist.——Es ist aber, als hinge dem Wort "alle", wenn *wir* es sagen, noch etwas an, womit ein anderer Gebrauch unvereinbar wäre; nämlich die *Bedeutung*. " 'Alle' heißt doch: *alle*!" möchten wir sagen, wenn wir sie erklären sollen; und dabei machen wir eine gewisse Geste und Miene.

Hacke alle diese Bäume um!——Ja, verstehst du nicht, was '*alle*' heißt? (Er hatte *einen* stehen lassen.) Wie hat er gelernt, was 'alle' heißt? Doch wohl durch Übung.—Und freilich diese Übung hat nun nicht nur bewirkt, daß er auf den Befehl *das tut*,—sondern sie hat das Wort mit einer Menge von Bildern (visuellen und andern) umgeben, von denen das eine oder das andere auftaucht, wenn wir das Wort hören und

I have carried out the multiplication 265 × 463, and also when I say: "twice four is eight", although here no calculating procedure led to the product (which, however, I could also have *worked out*). And so we also say a conclusion is drawn, where it is not calculated.

8. But still, I must only infer what really *follows*!—Is this supposed to mean: only what follows, going by the rules of inference; or is it supposed to mean: only what follows, going by *such* rules of inference as somehow agree with some (sort of) reality? Here what is before our minds in a vague way is that this reality is something very abstract, very general, and very rigid. Logic is a kind of ultra-physics, the description of the 'logical structure' of the world, which we perceive through a kind of ultra-experience (with the understanding e.g.). Here perhaps inferences like the following come to mind: "The stove is smoking, so the chimney is out of order again". (And *that* is how this conclusion is drawn! Not like this: "The stove is smoking, and whenever the stove smokes the chimney is out of order; and so . . .".)

9. What we call 'logical inference' is a transformation of our expression. For example, the translation of one measure into another. One edge of a ruler is marked in inches, the other in centimetres. I measure the table in inches and go over to centimetres *on the ruler*.—And of course there is such a thing as right and wrong in passing from one measure to the other; but what is the reality that 'right' accords with here? Presumably a *convention*, or a *use*, and perhaps our practical requirements.

10. "But doesn't e.g. 'fa' have to follow from '$(x).fx$' *if* '$(x).fx$' is meant in the way we mean it?"—And how does *the way* we mean it come out? Doesn't it come out in the constant practice of its use? and perhaps further in certain *gestures*—and similar things.——But it is as if there were also something attached to the word "all", when *we* say it; something with which a different use could not be combined; namely, the *meaning*. " 'All' surely means: *all*!" we should like to say, when we have to explain this meaning; and we make a particular gesture and face.

Cut down all these trees!——But don't you understand what '*all*' means? (He had left one standing.) How did he learn what 'all' means? Presumably by practice.—And of course this practice did not only bring it about that he *does this* on receiving the order—it surrounded the word with a whole lot of pictures (visual and others) of which one or another comes up when we hear and speak the word.

aussprechen. (Und wenn wir Rechenschaft darüber geben sollen, was die 'Bedeutung' des Wortes ist, greifen wir zuerst *ein* Bild aus dieser Masse heraus—und verwerfen es dann wieder als unwesentlich, wenn wir sehen, daß einmal dies, einmal jenes auftritt, und manchmal keines.)

Man lernt die Bedeutung von "alle", indem man lernt, daß aus '$(x).fx$' 'fa' folgt.—Die Übungen, die den Gebrauch dieses Wortes einüben, seine Bedeutung lehren, zielen immer dahin, daß eine Ausnahme nicht gemacht werden darf.

11. Wie *lernen* wir denn schließen? Oder lernen wir es nicht?

Weiß das Kind, daß aus der doppelten Verneinung die Bejahung folgt?—Und wie *überzeugt* man es davon? Wohl dadurch, daß man ihm einen Vorgang zeigt (eine doppelte Umkehrung, zweimalige Drehung um 180, u.dergl.) den es nun als Bild der Verneinung annimmt.

Und man macht den Sinn von '$(x).fx$' klar, indem man darauf dringt, daß aus ihm 'fa' folgt.

12. "Aus 'alle', wenn es *so* gemeint ist, muß doch *das* folgen."—Wenn es *wie* gemeint ist? Überlege es dir, wie meinst du es? Da schwebt dir etwa noch ein Bild vor—und mehr hast du nicht.—Nein, es *muß* nicht—aber es *folgt*: Wir *vollziehen* diesen Übergang.

Und wir sagen: Wenn das nicht folgt, dann waren es eben nicht *alle*—und das zeigt nur, wie wir mit Worten in so einer Situation reagieren.—

13. Es kommt uns vor, daß außer dem *Gebrauch* des Wortes "alle" noch etwas anderes sich geändert haben muß, wenn aus '$(x).fx$' nicht mehr 'fa' folgen soll; etwas, was dem Wort selbst anhängt.

Ist das nicht ähnlich, wie wenn man sagt: "Wenn dieser Mensch anders handelte, dann müßte auch sein Charakter ein anderer sein." Nun das kann in manchen Fällen etwas heißen und in manchen nicht. Wir sagen: "aus dem Charakter fließt die Handlungsweise", und so fließt aus der Bedeutung der Gebrauch.

14. Das zeigt dir—könnte man sagen—wie fest verbunden gewisse Gesten, Bilder, Reaktionen, mit einem ständig geübten Gebrauch sind.

'Es drängt sich uns das Bild auf. . . .' Es ist sehr interessant, daß Bilder sich uns *aufdrängen*. Und wäre das nicht, wie könnte ein Satz wie der "What's done cannot be undone" uns etwas sagen?

15. Wichtig ist, daß in unserer Sprache—in unserer natürlichen Sprache—'alle' ein Grundbegriff ist und 'alle außer einem' weniger fundamental; d.h., es gibt dafür nicht *ein* Wort, auch nicht eine charakteristische Geste.

(And if we are supposed to give an account of what the 'meaning' of the word is, we first pull out *one* from this mass of pictures—and then reject it again as non-essential when we see that now this, now that, picture presents itself, and sometimes none at all.)

One learns the meaning of "all" by learning that '*fa*' follows from '$(x).fx$'.—The exercises which practise one in the use of this word, which teach its meaning, always aim at the disallowance of any exception.

11. For how do we *learn* to infer? Or don't we learn it?

Does a child know that an affirmative follows from a double negative?—And how does one *shew* him that it does? Presumably by shewing him a process (a double inversion, two turns through 180° and similar things) which he then takes as a picture of negation.

And the meaning of '$(x).fx$' is made clear by our insisting on '*fa*' 's following from it.

12. "From '*all*', if it is meant *like this*, *this* must surely follow!"—If it is meant like *what*? Consider how you mean it. Here perhaps a further picture comes to your mind—and that is all you have got.—No, it is not true that it *must*—but it *does* follow: we *perform* this transition.

And we say: If this does not follow, then it simply wouldn't be *all*—and that only shews how we react with words in such a situation.—

13. It strikes us as if something else, something over and above the *use* of the word "all", must have changed if '*fa*' is no longer to follow from '$(x).fx$'; something attaching to the word itself.

Isn't this like saying: "If this man were to act differently, his character would have to be different". Now this may mean something in some cases and not in others. We say "behaviour flows from character" and that is how use flows from meaning.

14. This shews you—it might be said—how closely certain gestures, pictures, reactions, are linked with a constantly practised use.

'The picture forces itself on us. . . .' It is very interesting that pictures do *force* themselves on us. And if it were not so, how could such a sentence as "What's done cannot be undone" mean anything to us?

15. It is important that in our language—our natural language—'all' is a fundamental concept and 'all but one' less fundamental; i.e. there is not a *single* word for it, nor yet a characteristic gesture.

16. Der *Witz* des Wortes "alle" ist ja, daß es keine Ausnahme zuläßt.—Ja, das ist der Witz seiner Verwendung in unserer Sprache; aber welche Verwendungsarten wir als 'Witz' empfinden, das hängt damit zusammen, welche Rolle diese Verwendung in unserm ganzen Leben spielt.

17. Auf die Frage, worin denn das Schließen besteht, hören wir etwa: "Wenn ich die Wahrheit der Sätze . . . erkannt habe, so bin ich nun berechtigt, . . . hinzuschreiben."—Inwiefern berechtigt? Hatte ich früher kein Recht, es hinzuschreiben?—"Jene Sätze überzeugen mich von der Wahrheit dieses Satzes." Aber darum handelt sich's natürlich auch nicht.—"Nach diesen Gesetzen vollführt der Geist die besondere Tätigkeit des logischen Schließens." Das ist gewiß interessant und wichtig; aber ist es denn auch wahr? schließt er immer nach *diesen* Gesetzen? Und worin besteht die besondere Tätigkeit des Schließens? —Darum ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen; was das Schließen im Sprachspiel für ein Vorgang ist.

Z.B.: In einer Vorschrift steht: "Alle, die über 1.80 m hoch sind, sind in die . . . Abteilung aufzunehmen." Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein anderer teilt sie den und den Abteilungen zu.—"N.N. 1.90 m."—"Also N.N. in die . . . Abteilung." Das ist Schließen.

18. Was nennen wir, nun, 'Schlüsse' bei Russell, oder bei Euklid? Soll ich sagen: die Übergänge von einem Satz zum nächsten im Beweis? Aber wo steht der *Übergang*?—Ich sage, bei Russell folge ein Satz aus einem andern, wenn jener aus diesem gemäß der Stellung der beiden in einem Beweise, und den ihnen beigefügten Zeichen, abzuleiten ist,—wenn wir das Buch lesen. Denn, dieses Buch zu lesen ist ein Spiel, welches gelernt sein will.

19. Man ist sich oft im Unklaren, worin das Folgen und Folgern eigentlich besteht; was für ein Sachverhalt, und Vorgang, es ist. Die eigentümliche Verwendung dieser Verben legt uns nahe, daß Folgen das Bestehen einer Verbindung zwischen Sätzen ist, der wir beim Folgern nachgehen. Dies zeigt sich sehr lehrreich in Russell's Darstellung ("Principia Mathematica"). Daß ein Satz $\vdash q$ aus einem Satz $\vdash p \supset q . p$ folgt, ist hier ein logisches Grundgesetz:

9.12. What is implied by a true premiss is true. Pp.

Dieses berechtige uns nun, heißt es, $\vdash q$ aus $\vdash p \supset q . p$ zu schließen. Aber worin besteht denn 'schließen', die Prozedur, zu der wir berechtigt werden? Doch darin, den einen Satz—in irgendeinem Sprachspiel—

16. The *point* of the word "all" is that it admits no exception.—True, that is the point of its use in our language; but the kinds of use we feel to be the 'point' are connected with the role that such-and-such a use has in our whole life.

17. When we ask what inferring consists in, we hear it said e.g.: "If I have recognized the truth of the propositions . . ., then I am justified in further writing down . . .".—In what sense justified? Had I no right to write that down before?—"Those propositions convince me of the truth of this proposition." But of course that is not what is in question either.—"The mind carries out the special activity of logical inference according to these laws." That is certainly interesting and important; but then, is it true? Does the mind always infer according to *these* laws? And what does the special activity of inferring consist in?—This is why it is necessary to look and see how we carry out inferences in the practice of language; what kind of procedure in the language-game inferring is.

For example: a regulation says "All who are taller than five foot six are to join the . . . section". A clerk reads out the men's names and heights. Another allots them to such-and-such sections.—"N.N. five foot nine." "So N.N. to the . . . section." That is inference.

18. Now, what do we call 'inferences' in Russell or Euclid? Am I to say: the transitions from one proposition to the next one in the proof? But where is the *passage* to be found?—I say that in Russell one proposition follows from another if the one can be derived from the other according to the position of both in a proof and the appended signs—when we read the book. For reading this book is a game that has to be learnt.

19. One is often in the dark about what following and inferring really consists in; what kind of fact, and what kind of procedure, it is. The peculiar use of these verbs suggests to us that following is the existence of a connexion between propositions, which connexion we follow up when we infer. This comes out very instructively in Russell's account (*Principia Mathematica*). That a proposition $\vdash q$ follows from a proposition $\vdash p \supset q.p$ is here a fundamental law of logic:

9.12. What is implied by a true premiss is true. Pp.

Now this, one says, justifies us in inferring $\vdash q$ from $\vdash p \supset q.p$. But what does 'inferring', the procedure that is now justified, consist in? Surely in this: that in some language-game we utter, write down nach dem andern als Behauptung auszusprechen, anzuschreiben, und dergl.; und wie kann mich jenes Grundgesetz *dazu* berechtigen?

20. Russell will doch sagen: "*So* werde ich schließen und so ist es *richtig*." Er will uns also einmal mitteilen, wie er schließen will: das geschieht durch eine *Regel* des Schließens. Wie lautet sie? Daß dieser Satz jenen impliziert?——Doch wohl, daß in den Beweisen dieses Buchs ein solcher Satz nach einem solchen stehen soll.—Aber es soll ja ein logisches Grundgesetz sein, daß es *richtig* ist, so zu schließen!—Dann müßte das Grundgesetz lauten: "Es ist richtig von . . . auf . . . zu schließen"; und dieses Grundgesetz sollte nun wohl einleuchten——aber dann wird uns eben die Regel selbst als richtig, oder berechtigt, einleuchten. "Aber diese Regel handelt doch von Sätzen in einem Buch, und das gehört doch nicht in die Logik!"—Ganz richtig; die Regel ist wirklich nur eine Mitteilung, daß in diesem Buche nur *dieser* Übergang von einem Satz zum andern gebraucht wird (gleichsam eine Mitteilung aus dem Index); denn die Richtigkeit des Übergangs muß an Ort und Stelle einleuchten; und der Ausdruck des 'logischen Grundgesetzes' ist dann die *Folge der Sätze* selbst.

21. Russell scheint mit jenem Grundgesetz von einem Satz zu sagen: "Er folgt schon—ich brauche ihn nur noch zu folgern." So heißt es einmal bei Frege, die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, sei eigentlich schon da, ehe wir sie zögen und so ist es auch, wenn wir sagen, die Übergänge, der Reihe + 2 etwa, wären eigentlich bereits gemacht, ehe wir sie mündlich oder schriftlich machen,—gleichsam nachzögen.

22. Einem, der dies sagt, könnte man antworten: Du verwendest hier ein Bild. Man *kann* die Übergänge, die Einer in einer Reihe machen soll, dadurch *bestimmen*, daß man sie ihm vormacht. Indem man z.B. die Reihe, die er schreiben soll, in einer anderen Notation hinschreibt, daß er sie nur noch zu übertragen hat, oder indem man sie wirklich ganz dünn vorschreibt und er hat sie nachzuziehen. Im ersten Fall können wir auch sagen, wir schreiben nicht *die* Reihe an, die er zu schreiben hat, machen also die Übergänge dieser Reihe selbst nicht; im zweiten Falle aber werden wir gewiß sagen, die Reihe, die er schreiben soll, sei schon vorhanden. Wir würden dies auch sagen, wenn wir ihm, was er hinzuschreiben hat, *diktieren*, obwohl wir dann eine Reihe von Lauten hervorbringen und er eine Reihe von Schriftzeichen. Es ist jedenfalls eine sichere Art, die Übergänge, die Einer zu machen hat, zu *bestimmen*, sie ihm, in irgendeinem Sinne, schon vorzumachen.—Wenn wir daher diese Übergänge in einem ganz

(etc.), the one proposition as an assertion after the other; and how can the fundamental law justify me in *this*?

20. Now Russell wants to say: "*This* is how I am going to infer, and it is *right*". So he means to tell us how he means to infer: this is done by a *rule* of inference. How does it run? That this proposition implies that one?——Presumably that in the proofs in this book a proposition like this is to come after a proposition like this.—But it is supposed to be a fundamental law of logic that it is *correct* to infer in this way!—Then the fundamental law would have to run: "It is correct to infer . . . from . . ."; and this fundamental law should presumably be self-evident——in which case the rule itself will self-evidently be correct, or justified. "But after all this rule deals with sentences in a book, and that isn't part of logic!"—Quite correct, the rule is really only a piece of information that in this book only *this* move from one proposition to another will be used (as it were a piece of information in the index); for the correctness of the move must be evident in its own place; and the expression of the 'fundamental law of logic' is then the *sequence of propositions* itself.

21. In his fundamental law Russell seems to be saying of a proposition: "It already follows—all I still have to do is, to infer it". Thus Frege somewhere says that the straight line which connects any two points is really already there before we draw it; and it is the same when we say that the transitions, say in the series + 2, have really already been made before we make them orally or in writing—as it were tracing them.

22. One might reply to someone who said this: Here you are using a picture. One *can determine* the transitions which someone is to make in a series, by doing them for him first. E.g. by writing down in another notation the series which he is to write, so that all that remains for him to do is to translate it; or by actually writing it down very faint, and he has to trace it. In the first case we can also say that we don't write down *the* series that he has to write, and so that we do not ourselves make the transitions of that series; but in the second case we shall certainly say that the series which he is to write is already there. We should also say this if we *dictate* what he has to write down, although then we are producing a series of sounds and he a series of written signs. It is at any rate a sure way of *determining* the transitions that someone has to make, if we in some sense make them first.—If,

andern Sinne bestimmen, indem wir nämlich unserm Schüler einer Abrichtung unterziehen, wie z.B. Kinder sie im Einmaleins und im Multiplizieren erhalten, so nämlich, daß Alle, die so abgerichtet sind, nun beliebige Multiplikationen, die sie nicht in ihrer Lehrzeit gemacht haben, auf die gleiche Weise und mit übereinstimmenden Resultaten ausführen—wenn also die Übergänge, die Einer auf den Befehl '+ 2' zu machen hat, durch Abrichtung so bestimmt sind, daß wir mit Sicherheit voraussagen können, wie er gehen wird, auch wenn er *diesen* Übergang bis jetzt noch nie gemacht hat,—dann kann es uns natürlich sein, als Bild dieses Sachverhalts den zu gebrauchen: die Übergänge seien bereits alle gemacht, er schreibe sie nur noch hin.

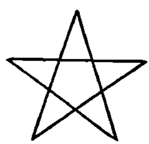
23. "Aber wir folgern doch diesen Satz aus jenem, weil er tatsächlich folgt! Wir überzeugen uns doch, daß er folgt."—Wir überzeugen uns, daß, was hier steht, aus dem folgt, was dort steht. Und dieser Satz ist *zeitlich* gebraucht.

24. Trenne die Gefühle (Gebärden) der Übereinstimmung, von dem, was du mit dem Beweise *machst*!

25. Wie ist es aber, wenn ich mich davon überzeuge, daß das Schema dieser Striche:

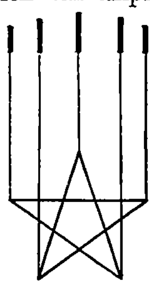
(a)

gleichzahlig ist mit dem Schema dieser Eckpunkte:



(b)

(ich habe die Schemata absichtlich einprägsam gemacht), indem ich zuordne:



(c)

Nun, wovon überzeuge ich mich denn, wenn ich diese Figur ansehe? Ich sehe einen Stern mit fadenförmigen Fortsätzen.—

therefore, we determine these transitions in a quite different sense, namely, by subjecting our pupil to such a training as e.g. children get in the multiplication tables and in multiplying, so that all who are so trained do random multiplications (not previously done in the course of being taught) in the same way and with results that agree—if, that is, the transitions which someone is to make on the order 'add 2' are so determined by training that we can predict with certainty how he will go, even when he has never up to now taken *this* step—then it may be natural to us to use this as a picture of the situation: the steps are all already taken and he is just writing them down.

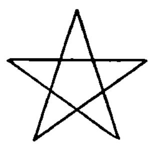
23. "But we surely infer this proposition from that because it actually follows! We ascertain that it follows."—We ascertain that what is written here follows from what is written there. And this proposition is being used *temporally*.

24. Separate the feelings (gestures) of agreement, from what you *do* with the proof.

25. But how about when I ascertain that this pattern of lines:

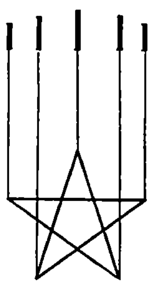
(a)

is like-numbered with this pattern of angles:



(b)

(I have made the patterns memorable on purpose) by correlating them:



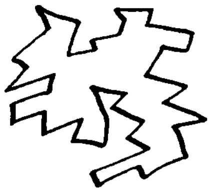
(c)

Now what do I ascertain when I look at this figure? What I see is a star with threadlike appendages.—

26. Aber ich kann von der Figur so Gebrauch machen: Fünf Leute stehen im Fünfeck aufgestellt; an der Wand stehen Stäbe, wie die Striche in (a); ich sehe auf die Figur (c) und sage: "ich kann jedem der Leute einen Stab geben."

Ich könnte die Figur (c) als schematisches *Bild* davon auffassen, daß ich den fünf Leuten je einen Stab gebe.

27. Wenn ich nämlich erst ein beliebiges Vieleck zeichne



und dann eine beliebige Reihe von Strichen

so kann ich nun durch Zuordnung herausfinden, ob ich oben soviele Ecken habe, wie unten Striche. (Ich weiß nicht, was herauskommen würde.) Und so kann ich auch sagen, ich habe mich durch das Ziehen der Projektionslinien davon überzeugt, daß am oberen Ende der Figur (c) soviele Striche stehen, wie der Stern unten Ecken hat. (Zeitlich!) In dieser Auffassung gleicht die Figur nicht einem mathematischen Beweise (so wenig wie es ein mathematischer Beweis ist, wenn ich einer Gruppe von Leuten einen Sack Äpfel austeile und finde, daß Jeder gerade *einen* Apfel kriegen kann).

Ich kann die Figur (c) aber als mathematischen Beweis auffassen. Geben wir den Gestalten der Schemata (a) und (b) Namen! Die Gestalt (a) heiße "Hand", *H*, die Gestalt (b) "Drudenfuß", *D*. Ich habe bewiesen, daß *H* soviel Striche hat, wie *D* Ecken. Und dieser Satz ist wieder unzeitlich.

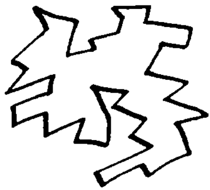
28. Der Beweis—könnte ich sagen—ist *eine* Figur, an deren einem Ende gewisse Sätze stehen und an derem andern Ende ein Satz steht (den wir den 'bewiesenen' nennen).

Man kann als Beschreibung so einer Figur sagen: in ihr folge der Satz . . . aus. . . . Das ist eine Form der Beschreibung eines *Musters*, das z.B. auch ein Ornament (Tapetenmuster) sein könnte. Ich kann also sagen: "In dem Beweise, welcher auf jener Tafel steht, folgt der Satz *p* aus *q* und *r*", und das ist einfach eine Beschreibung dessen, was dort zu sehen ist. Es ist aber nicht der mathematische Satz, daß *p* aus

26. But I can make use of the figure like this: five people stand arranged in a pentagon; against the wall are wands, like the strokes in (a); I look at the figure (c) and say: "I can give each of the people a wand".

I could regard figure (c) as a schematic *picture* of my giving the five men a wand each.

27. For if I first draw some arbitrary polygon:



and then some arbitrary series of strokes

I can find out by correlating them whether I have as many angles in the top figure as strokes in the bottom one. (I do not know how it would turn out.) And so I can also say that by drawing projection-lines I have ascertained that there are as many strokes at the top of figure (c) as the star beneath has points. (Temporally!) In this way of taking it the figure is not like a mathematical proof (any more than it is a mathematical proof when I divide a bag of apples among a group of people and find that each can have just *one* apple).

I can however conceive figure (c) as a mathematical proof. Let us give names to the shapes of the patterns (a) and (b): let (a) be called a "hand", *H*, and (b) a "pentacle", *P*. I have proved that *H* has as many strokes as *P* has angles. And this proposition is once more non-temporal.

28. A proof—I might say—is a *single* pattern, at one end of which are written certain sentences and at the other end a sentence (which we call the 'proved proposition'.)

To describe such a pattern we may say: in it the proposition . . . follows from. . . . This is one way of describing a *design*, which might also be for example an ornament (a wallpaper design). I can say, then, "In the proof on that blackboard the proposition *p* follows from *q* and *r*", and that is simply a description of what can be seen there.

q und *r* folgt. Dieser hat eine andere Anwendung. Er sagt—so könnte man es ausdrücken—daß es Sinn hat, von einem Beweise (Muster) zu reden, in welchem *p* aus *q* und *r* folgt. Wie man sagen kann, der Satz "weiß ist heller als schwarz" sage aus, es habe Sinn, von zwei Gegenständen zu reden, von denen der hellere weiß, der andere schwarz sei, aber nicht von zwei Gegenständen, von denen der hellere schwarz, der andere weiß sei.

29. Denken wir uns, wir hätten das Paradigma für "heller" und "dunkler" in Form eines weißen und schwarzen Flecks gegeben, und nun leiten wir mit seiner Hilfe sozusagen ab: daß Rot dunkler ist als Weiß.

30. Der durch (c) bewiesene Satz dient nun als neue Vorschrift zum Konstatieren der Gleichzahligkeit: Hat man eine Menge von Gegenständen in Form der Hand angeordnet und eine andere als die Ecken eines Drudenfußes, so sagen wir, die beiden Mengen seien gleichzahlig.

31. "Aber ist das nicht bloß, weil wir *H* und *D* schon einmal zugeordnet haben und gesehen, daß sie gleichzahlig sind?"—Ja aber, wenn sie es in *einem* Fall waren—wie weiß ich, daß sie es jetzt wieder sein werden?—"Weil es eben im *Wesen* der *H* und des *D* liegt, daß sie gleichzahlig sind."—Aber wie konntest du *das* durch die Zuordnung herausbringen? (Ich dachte, die Zählung, oder Zuordnung, ergibt nur, daß diese beiden Gruppen, die ich jetzt vor mir habe, gleichzahlig—oder ungleichzahlig—sind.)

—"Aber wenn er nun eine *H* von Dingen hat und einen *D* von Dingen, und er ordnet sie nun tatsächlich einander zu, so ist es doch nicht *möglich*, daß er etwas anders erhält, als daß sie gleichzahlig sind.—Und, daß es nicht möglich ist, das sehe ich doch aus dem Beweis."—Aber *ist* es denn nicht möglich? Wenn er z.B.—wie ein Anderer sagen könnte—eine der Zuordnungslinien zu ziehen *übersieht*. Aber ich gebe zu, daß er in der ungeheuern Mehrzahl der Fälle immer das gleiche Resultat erhalten wird und, erhielte er es nicht, sich für irgendwie gestört halten würde. Und wäre es nicht so, so würde dem ganzen Beweis der Boden entzogen. Wir entscheiden uns nämlich, das Beweisbild statt einer Zuordnung der Gruppen zu gebrauchen; wir ordnen sie *nicht* zu, sondern vergleichen *statt dessen* die Gruppen mit denen des Beweises (in welchem allerdings zwei Gruppen einander zugeordnet sind.)

32. Ich könnte als Resultat des Beweises auch sagen: "Eine *H* und ein *D* heißen von nun an 'gleichzahlig'."

Oder: Der Beweis *erforscht* nicht das Wesen der beiden Figuren, aber er spricht aus, was ich von nun an zum Wesen der Figuren rechnen

But it is not the mathematical proposition that p follows from q and r. That has a different application. It says—as one might put it—that it makes sense to speak of a proof (pattern) in which p follows from q and r. Just as one can say that the proposition "white is lighter than black" asserts that it makes sense to speak of two objects, the lighter one white and the other black, but not of two objects, the lighter one black and the other white.

29. Let us imagine that we had given a paradigm of 'lighter' and 'darker' in the shape of a white and a black patch, and now, so to speak, we use it to deduce that red is darker than white.

30. The proposition proved by (c) now serves as a new prescription for ascertaining numerical equality: if one set of objects has been arranged in the form of a hand and another as the angles of a pentacle, we say the two sets are equal in number.

31. "But isn't that merely because we have already correlated H and P and seen that they are the same in number?"—Yes, but if they were so in one case, how do I know that they will be so again now?—"Why, because it is of the *essence* of H and P to be the same in number."—But how can you have brought *that* out by correlating them? (I thought the counting or correlation merely yielded the result that these two groups before me were—or were not—the same in number.) —"But now, if he has an H of things and a P of things, and he actually correlates them, it surely isn't *possible* for him to get any result but that they are the same in number.—And that it is not possible can surely be seen from the proof."—But *isn't* it possible? If, e.g., he—as someone else might say—omits to draw one of the correlating lines. But I admit that in an enormous majority of cases he will always get the same result, and, if he did not get it, would think something had put him out. And if it were not like this the ground would be cut away from under the whole proof. For we decide to use the proof-picture instead of correlating the groups; we do *not* correlate them, but *instead* compare the groups with those of the proof (in which indeed two groups are correlated with one another).

32. I might also say as a result of the proof: "From now on an H and a P are called 'the same in number' ".

Or: The proof doesn't *explore* the essence of the two figures, but it does express what I am going to count as belonging to the essence of werde.——Was zum Wesen gehört, lege ich unter den Paradigmen der Sprache nieder.

Der Mathematiker erzeugt *Wesen*.

33. Wenn ich sage: "Dieser Satz folgt aus jenem", so ist das die Anerkennung einer Regel. Sie geschieht *auf Grund* des Beweises. D.h., ich lasse mir diese Kette (diese Figur) als *Beweis* gefallen.——"Aber könnte ich denn anders? *Muß* ich mir sie nicht gefallen lassen?"—Warum sagst du, du müssest? Doch darum, weil du am Schlusse des Beweises etwa sagst: "Ja—ich muß diesen Schluß anerkennen." Aber das ist doch nur der Ausdruck deiner unbedingten Anerkennung.

D.h., glaube ich: die Worte "Das muß ich zugeben" werden in *zweierlei* Fällen gebraucht: wenn wir einen Beweis erhalten haben—aber auch in Bezug auf den einzelnen Schritt selber des Beweises.

34. Und worin äußert es sich denn, daß der Beweis mich *zwingt*? Doch darin, daß ich so und so darauf vorgehe, daß ich mich weigere, einen anderen Weg zu gehen. Als letztes Argument, gegen Einen, der so nicht gehen wollte, würde ich nur noch sagen: "Ja siehst du denn nicht . . . !"—und das ist doch kein *Argument*.

35. "Aber, wenn du recht hast, wie kommt es dann, daß sich alle Menschen (oder doch alle normale Menschen) diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen?"—Ja, hier besteht eine große—und interessante—Übereinstimmung.

36. Denk' dir, du hättest eine Reihe von Kugeln vor dir; du numerierst sie mit arabischen Ziffern und es geht von 1 bis 100; dann machst du nach je 10 einen größern Abstand; in jedem Reihenstück von je 10 einen etwas kleineren Abstand in der Mitte, zwischen 5 und 5—so werden die 10 übersichtlich; nun nimmst du die Zehnerstücke und legst sie *unter* einander, und machst in der Mitte der Kolonne einen größeren Abstand, also zwischen fünf Reihen und fünf Reihen; nun numerierst du die Reihen von 1 bis 10.—Es wurde, sozusagen, mit den Kugeln exerziert. Ich kann sagen, wir haben Eigenschaften der hundert Kugeln entfaltet.—Nun aber denk' dir, daß dieser ganze Vorgang, dies Experiment mit den hundert Kugeln, gefilmt wurde. Ich sehe nun auf der Leinwand doch nicht ein Experiment, denn das Bild eines Experiments ist doch nicht selbst ein Experiment.—Aber das 'mathematisch Wesentliche' am Vorgang sehe ich nun auch in der Projektion! Denn es erscheinen da zuerst 100 Flecke, dann werden sie in Zehnerstücke eingeteilt, usw., usw.

Ich könnte also sagen: der Beweis dient mir nicht als Experiment, wohl aber als Bild eines Experiments.

the figures from now on.——I deposit what belongs to the essence among the paradigms of language.

The mathematician creates *essence*.

33. When I say "This proposition follows from that one", that is to accept a rule. The acceptance is *based* on the proof. That is to say, I find this chain (this figure) acceptable as a *proof*.——"But could I do otherwise? Don't I *have* to find it acceptable?"—Why do you say you have to? Because at the end of the proof you say e.g.: "Yes—I have to accept this conclusion". But that is after all only the expression of your unconditional acceptance.

I.e. (I believe): the words "I have to admit this" are used in *two kinds* of case: when we have got a proof—and also with reference to the individual steps of the proof themselves.

34. And how does it come out that the proof *compels* me? Well, in the fact that once I have got it I go ahead in such-and-such a way, and refuse any other path. All I should further say as a final argument against someone who did not want to go that way, would be: "Why, don't you see . . .!"—and that is no *argument*.

35. "But, if you are right, how does it come about that all men (or at any rate all normal men) accept these patterns as proofs of these propositions?"—It is true, there is great—and interesting—agreement here.

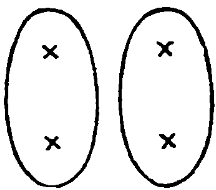
36. Imagine you have a row of marbles, and you number them with Arabic numerals, which run from 1 to 100; then you make a big gap after every 10, and in each 10 a rather smaller gap in the middle with 5 on either side: this makes the 10 stand out clearly as 10; now you take the sets of 10 and put them one below another, and in the middle of the column you make a bigger gap, so that you have five rows above and five below; and now you number the rows from 1 to 10.—We have, so to speak, done drill with the marbles. I can say that we have unfolded properties of the hundred marbles.—But now imagine that this whole process, this experiment with the hundred marbles, were filmed. What I now see on the screen is surely not an experiment, for the picture of an experiment is not itself an experiment.—But I see the 'mathematically essential' thing about the process in the projection too! For here there appear first a hundred spots, and then they are arranged in tens, and so on and so on.

Thus I might say: the proof does not serve as an experiment; but it does serve as the picture of an experiment.

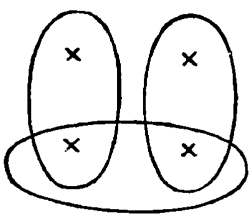
37. Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2, dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen.—So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, *wie wir jetzt sagen würden*, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.

"Aber wäre dann nicht doch noch $2 + 2 = 4$?"—Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.—

38. "Du brauchst ja nur auf die Figur



zu sehen, um zu sehen, daß $2 + 2 = 4$ ist."—Dann brauche ich nur auf die Figur



zu schauen, um zu sehen, daß $2 + 2 + 2 = 4$ ist.

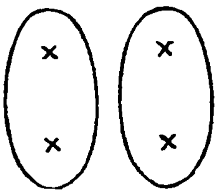
39. Wovon überzeuge ich Einen, der jene Abbildung im Film des Versuchs mit den hundert Kugeln verfolgt?

Man könnte sagen: davon, daß sich dies so zugetragen hat.—Aber das wäre keine mathematische Überzeugung.——Aber kann ich denn nicht sagen: *ich präge ihm einen Vorgang ein*? Dieser Vorgang ist die

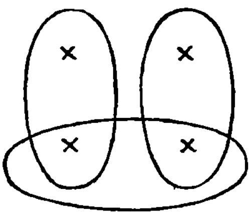
37. Put two apples on a bare table, see that no one comes near them and nothing shakes the table; now put another two apples on the table; now count the apples that are there. You have made an experiment; the result of the counting is probably 4. (We should present the result like this: when, in such-and-such circumstances, one puts first 2 apples and then another 2 on a table, mostly none disappear and none get added.) And analogous experiments can be carried out, with the same result, with all kinds of solid bodies.—This is how our children learn sums; for one makes them put down three beans and then another three beans and then count what is there. If the result at one time were 5, at another 7 (say because, *as we should now say*, one sometimes got added, and one sometimes vanished of itself), then the first thing we said would be that beans were no good for teaching sums. But if the same thing happened with sticks, fingers, lines and most other things, that would be the end of all sums.

"But shouldn't we then still have $2 + 2 = 4$?"—This sentence would have become unusable.

38. "You only need to look at the figure



to see that $2 + 2$ are 4."—Then I only need to look at the figure



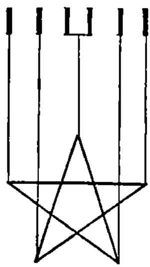
to see that $2 + 2 + 2$ are 4.

39. What do I convince anyone of, if he has followed the film projection of the experiment with the hundred marbles?

One might say, I convince him that it happened like that.—But this would not be a mathematical conviction.——But can't I say: *I impress a procedure on him*? This procedure is the regrouping of 100 things in

Umgruppierung einer Reihe von 100 Dingen in 10 Reihen zu 10. Und dieser Vorgang ist *tatsächlich* immer wieder durchzuführen. Und davon kann er mit Recht überzeugt sein.

40. Und so prägt der Beweis (25) durch Ziehen der Projektionslinien einen Vorgang ein, den der eins-zu-eins Zuordnung der *H* und des *D*.—"Aber *überzeugt* er mich nicht auch davon, daß diese[1] Zuordnung *möglich* ist?"—Wenn das heißen soll: daß du sie immer ausführen kannst—, so muß das durchaus nicht wahr sein. Aber das Ziehen der Projektionslinien überzeugt uns davon, daß oben soviele Striche sind, wie unten Ecken; und es liefert eine Vorlage, um danach solche Figuren einander zuzuordnen.—"Aber zeigt die Vorlage dadurch nicht, daß es geht? nicht, daß es diesmal ging! In dem Sinne, in welchem es nicht ginge, wenn oben statt ı|||ı die Figur |||||| stünde."—Wieso? geht es denn da nicht? *So* z.B.:



Diese Figur könnte doch auch als Beweis für etwas angewandt werden! Und zwar um zu zeigen, daß man Gruppen dieser Formen *nicht* 1-1 zuordnen kann.[2] 'Eine 1-1 Zuordnung ist hier unmöglich' heißt etwa: die Figuren und 1-1 Zuordnung passen nicht zusammen.

"So hab' ich's nicht gemeint!"—Dann zeig' mir, wie du's meinst, und ich werde es machen.

Aber kann ich denn nicht sagen, die Figur zeige, *wie* eine solche Zuordnung möglich ist—und muß sie darum nicht auch zeigen, *daß* sie möglich ist?—

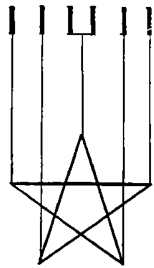
41. Was war denn damals der Sinn davon, daß wir vorschlugen, den Formen der 5 parallelen Striche und des Fünfecksterns Namen beizulegen? Was ist damit geschehen, daß sie Namen erhalten haben? Es wird dadurch etwas über die Art des Gebrauchs dieser Figuren angedeutet. Nämlich—daß man sie auf einen Blick als die und die

[1] Heißt hier "diese Zuordnung" die der Figuren des Beweises selbst? Es kann nicht etwas zugleich Maß und Gemessenes sein. (Randbemerkung.)

[2] Ich werde etwa auf die Figur hin die eine Zuordnung zu machen versuchen, aber nicht die andere, und werde sagen, jene sei nicht möglich. (Randbemerkung.)

10 rows of 10. And this procedure can *as a matter of fact* always be carried out again. And he can rightly be convinced of that.

40. And that is how the proof (25) impresses a procedure on us by drawing projection-lines: the procedure of one-one correlation of the *H* and the *P*.—"But doesn't it also *convince* me of the fact that this[1] correlation is *possible*?"—If that is supposed to mean: you can always carry it out—, then that doesn't have to be true at all. But the drawing of the projection-lines convinces us that there are as many lines above as angles below; and it supplies us with a model to use in correlating such patterns.—"But surely what the model shews in this way is that it does work, not that it did work this time? In the sense in which it wouldn't have worked if the top figure had been | | | | | | instead of | | | | |"—How is that? doesn't it work then? Like *this* e.g.:



This figure too could be used to prove something. It could be used to shew that groups of these forms *cannot* be given a 1-1 correlation.[2] 'A 1-1 correlation is impossible here' means, e.g., "these figures and 1-1 correlation don't fit together."

"I didn't mean it like that!"—Then shew me how you mean it, and I'll do it.

But can't I say that the figure shews *how* such a correlation is possible —and mustn't it for that reason also shew *that* it is possible?—

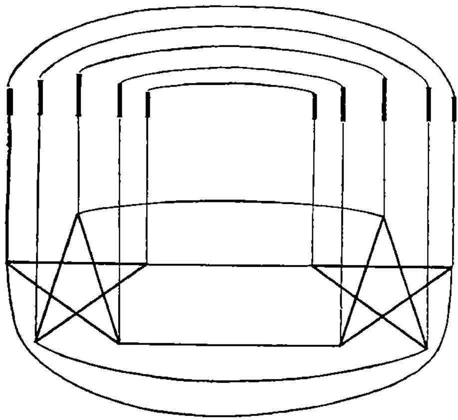
41. Now what was the point of our proposal to attach names to the five parallel strokes and the five-pointed star? What is done by their having got names? It will be a means of indicating something about the kind of use these figures have. Namely—that we recognize them as such-and-such at a glance. To do so, we don't count their

[1] Is 'this correlation' here the correlation of the patterns in the proof itself? A thing cannot be at the same time the measure and the thing measured. (Note in margin.)

[2] On the strength of the figure I shall e.g. try to effect one correlation, but not the other, and shall say that that one is not possible. (Note in margin.)

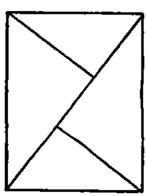
erkennt. Man zählt dazu nicht ihre Striche oder Ecken; sie sind für uns Gestalttypen, wie Messer und Gabel, wie Buchstaben und Ziffern.

Ich kann also auf den Befehl: "Zeichne eine *H*!" (z.B.)—diese Form unmittelbar wiedergeben.—Nun lehrt mich der Beweis eine Zuordnung der beiden Formen. (Ich möchte sagen, es seien in dem Beweis nicht bloß diese individuellen Figuren zugeordnet, sondern die *Formen selbst*. Aber das heißt doch nur, daß ich mir jene Formen gut einpräge; als Paradigmen einpräge.) Kann ich nun, wenn ich die Formen *H* und *D* einander so zuordnen will, nicht in Schwierigkeiten geraten—indem etwa eine Ecke unten zuviel, oder oben ein Strich zuviel ist?—"Aber doch nicht, wenn du wirklich wieder *H* und *D* gezeichnet hast!—Und das läßt sich ja beweisen; sieh diese Figur an!"



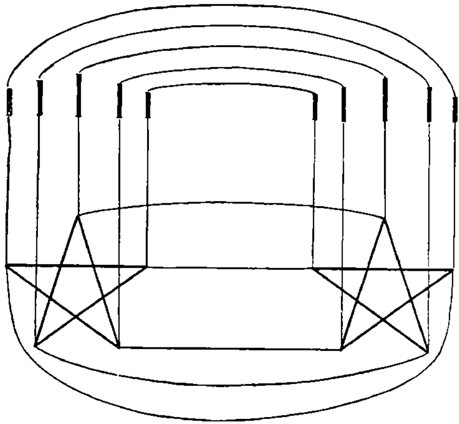
—Diese Figur lehrt mich eine neue Art der Kontrolle dafür, daß ich wirklich die gleichen Figuren hingezeichnet habe; aber kann ich, wenn ich mich nun nach dieser Vorlage richten will, nicht dennoch in Schwierigkeiten geraten? Ich sage aber, ich bin sicher, daß ich normalerweise in keine Schwierigkeiten kommen werde.

42. Es gibt ein Geduldspiel, das darin besteht, eine bestimmte Figur, z.B. ein Rechteck, aus gegebenen Stücken zusammenzusetzen. Die Teilung der Figur ist eine solche, daß es uns schwer wird, die richtige Zusammenstellung der Teile zu finden. Sie sei etwa diese:



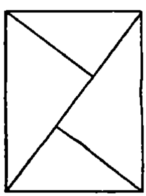
strokes or angles; for us they are typical shapes, like knife and fork, like letters and numerals.

Thus, when given the order "Draw an *H*" (for example)—I can produce this shape immediately.—Now the proof teaches me a way of correlating the two shapes. (I should like to say that it is not merely these individual figures that are correlated in the proof, but the *shapes themselves*. But this surely only means that these shapes are well impressed on my mind; are impressed as paradigms.) Now isn't it possible for me to get into difficulties when I want to correlate the shapes *H* and *P*—say by there being an angle too many at the bottom or a stroke too many at the top?—"But surely not, if you have really drawn *H* and *P* again!—And that can be proved; look at this figure."



—This figure teaches me a new way of checking whether I have really drawn the same figures; but can't I still get into difficulties when I now want to use this model as a guide? But I say that I am certain I shall not normally get into any difficulties.

42. There is a puzzle which consists in making a particular figure, e.g. a rectangle, out of given pieces. The division of the figure is such that we find it difficult to discover the right arrangement of the parts. Let it for example be this:



Was findet der, dem die Zusammenstellung gelingt?—Er findet: eine Lage—an welche er früher nicht gedacht hat.—Gut; aber kann man also nicht sagen: er überzeugt sich davon, daß man diese Dreiecke so zusammensetzen kann?—Aber 'diese Dreiecke': sind es die, welche oben im Rechteck liegen, oder sind es Dreiecke, die erst so zusammengesetzt werden sollen?

43. Wer sagt: "Ich hätte nicht geglaubt, daß man diese Figuren so zusammensetzen kann", dem kann man doch nicht, auf das zusammengesetzte Geduldspiel zeigend, sagen: "So, du hast nicht geglaubt, daß man die Stücke so zusammensetzen kann?"—Er würde antworten: "Ich meine, ich habe an diese Art der Zusammensetzung garnicht gedacht."

44. Denken wir uns die physikalischen Eigenschaften der Teile des Geduldspiels so, daß sie in die gesuchte Lage nicht kommen können. Aber nicht, daß man einen Widerstand empfindet, wenn man sie in diese Lage bringen will; sondern man macht einfach alle andern Versuche, nur *den* nicht und die Stücke kommen auch durch Zufall nicht in diese Lage. Es ist gleichsam diese Lage aus dem Raum ausgeschlossen. Als wäre hier ein 'blinder Fleck', etwa in unserm Gehirn.—Und *ist* es denn nicht so, wenn ich glaube, alle *möglichen* Stellungen versucht zu haben und an dieser, wie durch Verhexung, immer vorbeigegangen bin?

Kann man nicht sagen: die Figur, die dir die Lösung zeigt, beseitigt eine Blindheit; oder auch, sie ändert deine Geometrie? Sie zeigt dir gleichsam eine neue Dimension des Raumes. (Wie wenn man einer Fliege den Weg aus dem Fliegenglas zeigte.)

45. Ein Dämon hat diese Lage mit einem Bann umzogen und aus unserm Raum ausgeschlossen.

46. Die neue Lage ist wie aus dem Nichts entstanden. Dort, wo früher nichts war, dort ist jetzt auf einmal etwas.

47. Inwiefern hat dich denn die Lösung davon überzeugt, daß man dies und dies kann?—Du konntest es ja früher *nicht*—und jetzt kannst du es etwa.—

48. Ich sagte, "ich lasse mir das und das als Beweis eines Satzes gefallen"—aber kann ich mir die Figur, die die Stücke des Geduldspiels zusammengefügt zeigt, *nicht* als Beweis dafür gefallen lassen, das man jene Stücke zu diesem Umriß zusammensetzen kann?

49. Aber denk nun, eines der Stücke liege so, daß es das *Spiegelbild* des entsprechenden Teils der Vorlage ist. Er will nun die Figur nach

What do you discover when you succeed in arranging it?—You discover a position—of which you did not think before.—Very well; but can't we also say: you find out that these triangles can be arranged like this?—But 'these triangles': are they the actual ones in the rectangle above, or are they triangles which have yet to be arranged like that?

43. If you say: "I should never have thought that these shapes could be arranged like that", we can't point to the solution of the puzzle and say: "Oh, you didn't think the pieces could be arranged like that?"—You would reply: "I mean, I didn't think of this way of arranging them at all".

44. Let us imagine the physical properties of the parts of the puzzle to be such that they can't come into the desired position. Not, however, that one feels a resistance if one tries to put them in this position; but one simply tries everything else, only not *this*, and the pieces don't get into this position by accident either. This position is as it were excluded from space. As if there were e.g. a 'blind spot' in our brain here.—And *isn't* it like this when I believe I have tried all *possible* arrangements and have always passed this one by, as if bewitched?

Can't we say: the figure which shews you the solution removes a blindness, or even changes your geometry? It as it were shews you a new dimension of space. (As if a fly were shewn the way out of the fly-bottle.)

45. A demon has cast a spell round this position and excluded it from our space.

46. The new position has as it were come to be out of nothingness. Where there was nothing, now there suddenly is something.

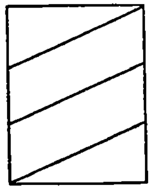
47. In what sense has the solution shewn you that such-and-such can be done? Before, you could *not* do it—and now perhaps you can.—

48. I said, "I accept such-and-such as proof of a proposition"—but is it possible for me *not* to accept the figure shewing the arrangement of the pieces as proof that these pieces can be arranged to have this periphery?

49. But now imagine that one of the pieces is lying so as to be the *mirror-image* of the corresponding part of the pattern. Now you

der Vorlage zusammensetzen, sieht, es muß gehen, kommt aber nicht auf den Einfall, das Stück umzuwenden und findet, daß ihm das Zusammensetzen nicht gelingt.

50. Man kann ein Rechteck aus zwei Parallelogrammen und zwei Dreiecken zusammensetzen. Beweis:



Ein Kind würde die Zusammensetzung eines Rechtecks aus diesen Bestandteilen schwer treffen und davon überrascht sein, daß zwei Seiten der Parallelogramme in eine gerade Linie fallen, wo doch die Parallelogramme schief sind.—Es könnte ihm vorkommen, daß das Rechteck gleichsam durch Zauberei aus diesen Figuren wird. Ja, es muß zugeben, daß sie nun ein Rechteck bilden, aber durch einen Trick, durch eine vertrackte Stellung, auf unnatürliche Weise.

Ich kann mir denken, daß das Kind, wenn es die beiden Parallelogramme in *der* Weise zusammengelegt hat, seinen Augen nicht traut, wenn es sieht, daß sie *so* zusammenpassen. '*Sie sehen nicht aus*, als ob sie so zusammenpaßten.' Und ich könnte mir denken, daß man sagte: Es erscheint uns nur durch ein Blendwerk, als gäben *sie* das Rechteck—in Wirklichkeit haben sie ihre Natur verändert, sie sind nicht mehr die Parallelogramme.

51. "Du gibst *das* zu—dann mußt du *das* zugeben."—Er *muß* es zugeben—und dabei ist es möglich, daß er es nicht zugibt! Du willst sagen: "wenn er *denkt*, muß er es zugeben."

"Ich werde dir zeigen, warum du es zugeben mußt."—Ich werde dir einen Fall vor Augen führen, welcher, wenn du ihn bedenkst, dich bestimmen wird, so zu urteilen.

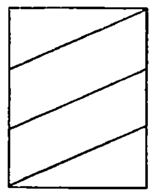
52. Wie können ihn denn die Manipulationen des Beweises dazu bringen, etwas zuzugeben?

53. "Du wirst doch zugeben, daß 5 aus 3 und 2 besteht."

Ich will es nur zugeben, wenn ich damit nichts zugebe. Außer—daß ich *dieses Bild* verwenden will.

want to arrange the figure according to the pattern; you see it must work, but you never hit on the idea of turning the piece over, and you find that you do not succeed in fitting the puzzle together.

50. A rectangle can be made of two parallelograms and two triangles. Proof:



A child would find it difficult to hit on the composition of a rectangle with these parts, and would be surprised by the fact that two sides of the parallelograms make a straight line, when the parallelograms are, after all, askew. It might strike him as if the rectangle came out of these figures by something like magic. True, he has to admit that they do form a rectangle, but it is by a trick, by a distorted arrangement, in an unnatural way.

I can imagine the child, after having put the two parallelograms together in *this* way, not believing his eyes when he sees that they fit like *that*. '*They don't look* as if they fitted together like that.' And I could imagine its being said: It's only through some hocus-pocus that it looks to us as if *they* yielded the rectangle—in reality they have changed their nature, they aren't these parallelograms any more.

51. "You admit *this*—then you must admit *this* too."—He *must* admit it—and all the time it is possible that he does not admit it! You want to say: "if he *thinks*, he must admit it".

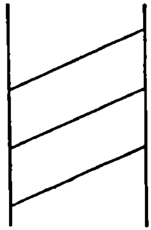
"I'll shew you why you have to admit it."—I shall bring a case before your eyes which will determine you to judge this way if you think about it.

52. Now, how can the manipulations of the proof make him admit anything?

53. "Now you will admit that 5 consists of 3 and 2."

I will only admit it, if that is not to admit anything. Except—that I want to use *this picture*.

54. Man könnte z.B. die Figur



als Beweis dafür nehmen, daß 100 Parallelogramme, so zusammengesetzt, einen geraden Streifen geben müssen. Wenn man dann wirklich 100 zusammenfügt, erhält man nun etwa einen schwach gebogenen Streifen.—Der Beweis aber hat uns bestimmt, das Bild und die Ausdrucksweise zu gebrauchen: Wenn sie keinen geraden Streifen geben, waren sie ungenau hergestellt.

55. Denke nur, wie kann mich das Bild, das du mir zeigst (oder der Vorgang) dazu verpflichten, nun so und so immer zu urteilen!

Ja, liegt hier ein Experiment vor, so ist *eines* ja doch zu wenig, mich zu irgendeinem Urteil zu verbinden.

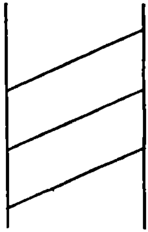
56. Der Beweisende sagt: "Schau diese Figur an! Was wollen wir dazu sagen? Nicht, daß ein Rechteck aus . . . besteht?—"

Oder auch: "Das nennst du doch 'Parallelogramme' und das 'Dreiecke' und *so* sieht es doch aus, wenn eine Figur aus andern besteht.—"

57. "Ja, du hast mich überzeugt: ein Rechteck besteht immer aus . . ."—Würde ich auch sagen: "Ja du hast mich überzeugt: *dieses* Rechteck (das des Beweises) besteht aus . . ."? Und dies wäre ja doch der bescheidenere Satz; den auch der zugeben sollte, der etwa den allgemeinen Satz noch nicht zugibt. Seltsamerweise aber scheint der, der *das* zugibt, nicht den bescheideneren geometrischen Satz zuzugeben, sondern gar keinen Satz der Geometrie. Freilich,—denn bezüglich des Rechtecks des Beweises hat er mich ja von nichts überzeugt. (Über diese Figur, wenn ich sie früher gesehen hätte, wäre ich ja in keinem Zweifel gewesen.) Ich habe aus freien Stücken, was diese Figur anbelangt, alles zugestanden. Und er hat mich nur *mittels* ihrer überzeugt.—Aber anderseits, wenn er mich nicht einmal bezüglich *dieses* Rechtecks von etwas überzeugt hat, wie dann erst von einer Eigenschaft andrer Rechtecke?

58. "Ja, die Form sieht nicht so aus, als könnte sie aus zwei windschiefen Teilen bestehen."

54. One might for example take this figure



as a proof of the fact that 100 parallelograms arranged like this must yield a straight strip. Then, when one actually does put 100 together, one gets e.g. a slightly curved strip.—But the proof has determined us to use this picture and form of expression: if they don't yield a straight strip, they were not accurately constructed.

55. Just think, how can the picture (or procedure) that you shew me now oblige me always to judge in such-and-such a way?

If what we have here is an experiment, then surely *one* is too little to bind me to any judgment.

56. The one who is offering the proof says: "Look at this figure. What shall we say about it? Surely that a rectangle consists of . . .?—"

Or again: "Now, surely you call this a 'parallelogram' and this a 'triangle', and *this* is what it is like for one figure to consist of others".

57. "Yes, you have convinced me that a rectangle always consists of . . ."—Should I also say: "Yes, you have convinced me that *this* rectangle (the one in the proof) consists of . . ."? For wouldn't this be the more modest proposition, which you ought to grant even if perhaps you don't yet grant the general proposition? But oddly enough if *that* is what you grant, you seem to be granting, not the more modest geometrical proposition, but what is not a proposition of geometry at all. Of course not—for as regards the rectangle in the proof he didn't convince me of anything. (I shouldn't have been in any doubt about this figure, if I had seen it previously.) As far as concerns this figure I acknowledged everything of my own accord. And he merely used it to make me realize something.—But on the other hand, if he didn't convince me of anything as regards this rectangle, then how has he convinced me of a property of other rectangles?

58. "True, this shape doesn't look as if it could consist of two skew parts."

Was überrascht dich? Doch nicht, daß du jetzt diese Figur vor dir siehst! Mich überrascht etwas *in* dieser Figur.—Aber in dieser Figur geht ja nichts vor!

Mich überrascht die Zusammenstellung des Schiefen mit dem Graden. Mir wird, gleichsam, schwindlich.

59. Ich sage aber doch wirklich: "Ich habe mich überzeugt, daß man die Figur aus diesen Teilen legen kann", wenn ich nämlich etwa die Abbildung der Lösung des Geduldspiels gesehen habe.

Wenn ich nun Einem das sage, so soll es doch heißen: "Versuch nur! diese Stücke, richtig gelegt, geben wirklich die Figur." Ich will ihn aufmuntern etwas zu tun und sage ihm einen Erfolg voraus. Und die Vorhersage beruht auf der Leichtigkeit, mit der man die Figur aus den Stücken zusammensetzen kann, sobald man weiß *wie*.

60. Du sagst, du bist erstaunt über das, was dir der Beweis zeigt. Aber bist du erstaunt darüber, daß sich diese Striche haben ziehen lassen? Nein. Du bist erstaunt nur, wenn du dir sagst, daß zwei solche Stücke diese Form *geben*. Wenn du dich also in die Situation hineindenkst, du habest dir etwas anderes erwartet und nun sahest du das Ergebnis.

61. "Aus *dem* folgt unerbittlich *das*."—Ja, in dieser Demonstration geht es aus ihm hervor.

Und eine Demonstration ist dies für den, der sie als Demonstration anerkennt. Wer sie *nicht* anerkennt, wer ihr nicht als Demonstration folgt, der trennt sich von uns, noch ehe es zur Sprache kommt.

62.

Hier haben wir etwas, was unerbittlich ausschaut. Und doch: 'unerbittlich' kann es nur in seinen Folgen sein! Denn sonst ist es nur ein Bild.

Worin besteht denn die Fernwirkung—wie man's nennen könnte—dieses Schemas?

63. Ich habe einen Beweis gelesen—nun bin ich überzeugt.—Wie, wenn ich diese Überzeugtheit sofort vergäße!

Denn es ist ein eigentümliches Vorgehen: daß ich den Beweis *durchlaufe* und dann sein Ergebnis annehme.——Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.

What are you surprised at? Surely not at seeing this figure. It is something *in* the figure that surprises me.—But there isn't anything going on in the figure!

What surprises me is the way straight and skew go together. It makes me as it were dizzy.

59. But I do actually say: "I have convinced myself that this figure can be constructed with these pieces", e.g. I have seen a picture of the solution of the puzzle.

Now if I say this to somebody it is surely supposed to mean: "Just try: these bits, properly arranged, really do yield the figure". I want to encourage him to do something and I forecast that he will succeed. And the forecast is founded on the ease with which we can construct the figure from the pieces as soon as we know *how*.

60. You say you are astonished at what the proof shews you. But are you astonished at its having been possible to draw these lines? No. You are only astonished when you tell yourself that two bits like this *yield* this shape. When, that is, you think yourself into the situation of seeing the result after having expected something different.

61. "*This* follows inexorably from *that*."—True, in this demonstration this issues from that.

This is a demonstration for whoever acknowledges it as a demonstration. If anyone *doesn't* acknowledge it, doesn't go by it as a demonstration, then he has parted company with us even before it comes to talk.

62.

Here we have something that looks inexorable—. And yet it can be 'inexorable' only in its consequences! For otherwise it is nothing but a picture.

What does the action at a distance—as it might be called—of this pattern consist in?

63. I have read a proof—and now I am convinced.—What if I straightway forgot this conviction?

For it is a peculiar procedure: I *go through* the proof and then accept its result.—I mean: this is simply what we *do*. This is use and custom among us, or a fact of our natural history.

64. 'Wenn ich *fünf* habe, so habe ich *drei*, und *zwei*.'——Aber woher weiß ich, daß ich fünf habe?—Nun, wenn es so | | | | | ausschaut.—Und ist es auch gewiß, daß, wenn es *so* ausschaut, ich es immer in *solche* Gruppen zerlegen kann?

Es ist eine Tatsache, daß wir das folgende Spiel spielen können: Ich lehre Einen, wie eine Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfergruppe aussieht, und ich lehre ihn, Striche einander eins-zu-eins zuzuordnen; dann lasse ich ihn immer je zweimal den Befehl ausführen: "Zeichne eine Fünfergruppe"—und dann den Befehl: "Ordne die beiden Gruppen einander zu"; da zeigt es sich, daß er, so gut wie *immer*, die Striche restlos einander zuordnet.

Oder auch: es ist Tatsache, daß ich bei der eins-zu-eins Zuordnung dessen, was ich als Fünfergruppen hinzeichne, *so gut wie nie* in Schwierigkeiten komme.

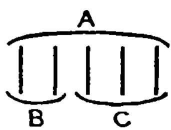
65. Ich soll das Geduldspiel zusammenlegen, ich versuche hin und her, bin zweifelhaft, ob ich es zusammenbringen werde. Nun zeigt mir jemand das Bild der Lösung: Nun sage ich—ohne irgendeinen Zweifel—"jetzt kann ich's!"—Ist es denn *sicher*, daß ich es nun zusammenbringen werde?—Aber die Tatsache ist: ich zweifle nicht daran.

Wenn nun jemand fragte: "Worin besteht die Fernwirkung jenes Bildes?"—Darin, daß ich es anwende.

66. *In* einer Demonstration *einigen* wir uns mit jemand. Einigen wir uns in ihr nicht, so trennen sich unsere Wege, ehe es zu einem Verkehr mittels dieser Sprache kommt.

Es ist ja nicht wesentlich, daß der Eine den Andern mit der Demonstration überrede. Es können ja beide sie sehen (lesen), und anerkennen.

67. "Du siehst doch—es kann doch keinem Zweifel unterliegen, daß eine Gruppe wie *A* wesentlich aus einer



wie *B* und einer wie *C* besteht."—Auch ich sage—d.h., auch ich drücke mich so aus—daß die Gruppe, die du hingezeichnet hast, aus den beiden kleineren besteht; aber ich weiß nicht, ob jede Gruppe, die ich eine von der Art (oder Gestalt) der ersten nennen würde, unbedingt aus zwei Gruppen von der Art jener kleineren zusammengesetzt sein wird.——Ich glaube aber, es wird wohl immer so sein (meine Erfahrung hat mich dies vielleicht gelehrt) und darum will ich als Regel annehmen: Ich will eine Gruppe dann, und nur dann, eine von der Gestalt

64. 'If I have *five*, then I have *three* and *two*.'——But how do I know that I have five?—Well, if it looks like this: | | | | | .—And is it also certain that when it looks like *this*, I can always split it up into groups like *those*?

It is a fact that we can play the following game: I teach someone what a group of two, three, four, or five, is like, and I teach him how to put strokes into one-to-one correspondence; then I always make him carry out the order "Draw a group of five" twice—and then I teach him to carry out the order: "Correlate these two groups"; and here it proves that he practically *always* correlates the strokes without remainder.

Or again: it is a fact that I *practically never* get into difficulties in correlating what I have drawn as groups of five.

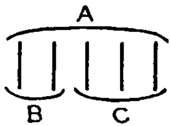
65. I have to assemble the puzzle, I try it this way and that, am doubtful whether I shall do it. Next someone shows me a picture of the solution, and I say without any sort of doubt—"Now I can do it!" —Then am I *certain* to do it now?—The fact, however, is: I don't have any doubt.

Suppose someone now asked: "What does the action at a distance of the picture consist in?"—In the fact that I apply it.

66. *In* a demonstration we *get agreement* with someone. If we do not, then our roads part before it comes to traffic by means of this language.

It is not essential that one should talk the other over by means of the demonstration. Both might see it (read it), and accept it.

67. "But you can see—there can't be any doubt, that a group like *A* consists essentially of one like *B* and one like *C*."—I too say—i.e.



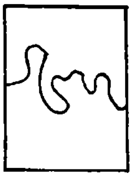
this is how I too express myself—that the group drawn there consists of the two smaller ones; but I don't know whether every group which I should call the same in kind (or form) as the first will necessarily be composed of two groups of the same kind as the smaller ones.——But I believe that it will probably always be so (perhaps experience has taught me this), and that is why I am willing to accept the rule: I will

A nennen, wenn sie in zwei Gruppen wie *B* und *C* zerlegt werden kann.

68. Und so wirkt auch die Zeichnung 50 als Beweis. "Ja wahrhaftig! zwei Parallelogramme stellen sich zu dieser Form zusammen!" (Das ist sehr ähnlich, wie wenn ich sagte: "Ja wirklich! eine Kurve kann aus graden Stücken bestehen.")—Ich hätte es nicht gedacht. Ja—nicht, daß die Teile dieser Figur diese Figur ergeben. Das heißt ja nichts.—Sondern ich staune nur, wenn ich denke, ich hätte das obere Parallelogramm ahnungslos auf das untere gestellt und sähe nun dieses Ergebnis.

69. Und man könnte sagen: Der Beweis hat mich von *dem* überzeugt—was mich auch überraschen kann.

70. Denn warum sage ich, jene Figur 50 überzeugt mich von etwas, und nicht geradeso auch diese:



Sie zeigt doch auch, daß zwei solche Stücke ein Rechteck geben. "Aber das ist uninteressant", will man sagen. Und warum ist es uninteressant?

71. Wenn man sagt: "Diese Form besteht aus diesen Formen"—so denkt man sich die Form als eine feine Zeichnung, ein feines Gestell von dieser Form, auf das gleichsam die Dinge gespannt sind, die diese Form haben. (Vergleiche: Platos Auffassung der Eigenschaften als Ingredientien eines Dings.)

72. "Diese Form besteht aus diesen Formen. Du hast mir eine wesentliche Eigenschaft dieser Form gezeigt."—Du hast mir ein neues *Bild* gezeigt.

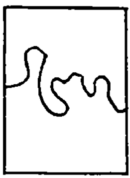
Es ist, als hätte *Gott* sie so zusammengesetzt.——*Wir bedienen uns also eines Gleichnisses.* Die *Form* wird zum ätherischen Wesen, welches diese Form hat; es ist, als wäre sie ein für allemal so zusammengesetzt worden (von dem, der die wesentlichen Eigenschaften in die Dinge gelegt hat). Denn, wird die Form zum Ding, das aus Teilen besteht, so ist der Werkmeister der Form der, der auch Licht und Dunkelheit, Farbe und Härte, etc., gemacht hat. (Denke, jemand fragte: "Die Form . . . ist aus diesen Teilen zusammengesetzt; wer hat sie zusammengesetzt? Du?")

say that a group is of the form *A* if and only if it can be split up into two groups like *B* and *C*.

68. And this too is how the drawing (50) works as a proof. "True enough! Two parallelograms together do make this shape!" (That is very much as if I were to say: "Actually, a curve can consist of straight bits.")—I shouldn't have thought it. Thought what? That the parts of this figure yield this figure? No, not *that*. For that doesn't mean anything.—My surprise is only when I think of myself unwittingly fitting the top parallelogram on to the bottom one, and then seeing the result.

69. And it could be said: What the proof made me realize—*that's* what can surprise me.

70. For why do I say that the figure (50) makes me realize something any more than this one:



After all it too shews that two bits like that yield a rectangle. "But that isn't interesting", we want to say. And why is it uninteresting?

71. When one says: "This shape consists of these shapes"—one is thinking of the shape as a fine drawing, a fine frame of this shape, on which, as it were, things which have this shape are stretched. (Compare Plato's conception of properties as ingredients of a thing.)

72. "This shape consists of these shapes. You have shewn the essential property of this shape."—You have shewn me a new *picture*.

It is as if *God* had constructed them like that.——*So we are employing a simile.* The *shape* becomes an ethereal entity which has this shape; it is as if it had been constructed like this once for all (by whoever put the essential properties into things). For if the shape is to be a thing consisting of parts, then the pattern-maker who made the shape is he who also made light and dark, colour and hardness, etc. (Imagine someone asking: "The shape . . . is made up of these parts; who made it? You?")

Man hat das Wort "Sein" für eine sublimierte, ätherische Art des Existierens gebraucht. Betrachte nun den Satz: "Rot *ist*" (z.B.). Freilich, niemand gebraucht ihn je; wenn ich mir aber doch einen Gebrauch für ihn erfinden sollte, so wäre es: als einleitende Formel zu Aussagen, die dann vom Wort "rot" Gebrauch machen sollen. Beim Aussprechen der Formel blicke ich auf ein Muster der Farbe Rot.

Einen Satz, wie "Rot *ist*" ist man versucht auszusprechen, wenn man die Farbe mit Aufmerksamkeit betrachtet: also in der gleichen *Situation* in welcher man die Existenz eines Ding's feststellt (eines blattähnlichen Insekts z.B.).

Und ich will sagen: wenn man den Ausdruck gebraucht, "der Beweis hat mich gelehrt—hat mich davon überzeugt—daß es sich so verhält", ist man noch immer in jenem Gleichnis.

73. Ich hätte auch sagen können: 'Wesentlich' ist nie die Eigenschaft des Gegenstandes, sondern das Merkmal des Begriffes.

74. "War die Gestalt der Gruppe dieselbe, so muß sie dieselben Aspekte, Möglichkeiten der Teilung, haben. Hat sie andere, so ist es nicht die gleiche Gestalt; sie hat dir dann vielleicht irgendwie den gleichen Eindruck gemacht; aber *dieselbe Gestalt* ist sie nur, wenn du sie auf gleiche Weise zerteilen kannst."

Es ist doch, als würde dies das Wesen der Gestalt aussprechen.—Aber ich sage doch: Wer über das *Wesen* spricht—, konstatiert bloß eine Übereinkunft. Und da möchte man doch entgegnen: es gibt nichts Verschiedeneres, als ein Satz über die Tiefe des Wesens und einer—über eine bloße Übereinkunft. Wie aber, wenn ich antworte: der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach der Übereinkunft.

Wenn ich also sage: "es ist, als spräche dieser Satz das *Wesen* der Gestalt aus"—so meine ich: es ist doch, als spräche dieser Satz eine Eigenschaft des Wesens *Gestalt* aus!—Und man kann sagen: Das Wesen, von dem er eine Eigenschaft aussagt, und das ich hier das Wesen 'Gestalt' nenne, ist das Bild, das ich nicht umhin kann, mir beim Wort "Gestalt" zu machen.

75. Aber was für Eigenschaften der 100 Kugeln hast du entfaltet, oder vorgeführt?——Nun, daß man diese Dinge mit ihnen tun kann. ——Aber *welche* Dinge? Meinst du: daß du sie hast so bewegen können, daß sie nicht an der Tischfläche festgeleimt waren?——Nicht so sehr dies, als daß diese Formationen aus ihnen entstanden und dabei keine von ihnen weg- oder dazukam.——Du hast also physikalische Eigenschaften der Reihe gezeigt. Aber warum hast du den Ausdruck "entfalten"

The word "being" has been used for a sublimed ethereal kind of existence. Now consider the proposition "Red *is*" (e.g.). Of course no one ever uses it; but if I had to invent a use for it all the same, it would be this: as an introductory formula to statements which went on to make use of the word "red". When I pronounce the formula I look at a sample of the colour red.

One is tempted to pronounce a sentence like "red *is*" when one is looking attentively at the colour; that is, in the same *situation* as that in which one observes the existence of a thing (of a leaflike insect, for example).

And I want to say: when one uses the expression, "the proof has taught me—shewn me—that this is the case", one is still using this simile.

73. I could also have said: it is not the property of an object that is ever 'essential', but rather the mark of a concept.

74. "If the form of the group was the same, then it must have had the same aspects, the same possibilities of division. If it has different ones then it isn't the same form; perhaps it somehow made the same impression on you; but it is the *same form* only if you can divide it up in the same way."

It is as if this expressed the essence of form.—I say, however: if you talk about *essence*—, you are merely noting a convention. But here one would like to retort: there is no greater difference than that between a proposition about the depth of the essence and one about—a mere convention. But what if I reply: to the *depth* that we see in the essence there corresponds the *deep* need for the convention.

Thus if I say: "It's as if this proposition expressed the *essence* of form"—I mean: it is as if this proposition expressed a property of the entity *form*!—and one can say: the entity of which it asserts a property, and which I here call the entity 'form', is the picture which I cannot help having when I hear the word "form".

75. But what sort of properties of the hundred marbles did you unfold, or display?——Well, that these things can be done with them. ——But *what* things? Do you mean that you were able to move them about like that, that they weren't glued on to the table top?——Not so much that, as that they have gone into these formations without any loss or addition.——So you have shewn the physical properties of the row. But why did you use the expression "unfolded"? You would

gebraucht? Du hättest doch nicht gesagt, du entfaltest die Eigenschaften einer Eisenstange, indem du zeigst, daß sie bei so und soviel Grad schmilzt. Und könntest du nicht ebenso gut sagen, du habest die Eigenschaften unseres Zahlengedächtnisses entfaltet wie die Eigenschaften der Reihe (z.B.)? Was du eigentlich *entfaltest*, ist ja wohl die Reihe der Kugeln.—Und du zeigst z.B., daß eine Reihe, wenn sie so und so ausschaut, oder so römisch numeriert ist, auf einfache Weise, und ohne daß eine Kugel dazu- oder wegkommt, in jene andere einprägsame Form gebracht werden kann. Aber ebenso gut konnte das doch ein psychologisches Experiment sein, das zeigt, daß du *jetzt* gewisse Formen einprägsam findest, in die 100 Flecke durch bloßes Verschieben gebracht werden.

"Ich habe gezeigt, was sich mit 100 Kugeln machen läßt."—Du hast gezeigt, daß sich *diese* 100 Kugeln (oder diese Kugeln dort) so entfalten ließen. Das Experiment war eines des Entfaltens (im Gegensatz etwa zu einem des Verbrennens).

Und das psychologische Experiment konnte z.B. zeigen, wie leicht man dich betrügen kann: Daß du es nämlich nicht merkst, wenn man Kugeln in die Reihe, oder aus ihr herausschmuggelt. Man könnte ja auch *so* sagen: Ich habe gezeigt, was sich mit einer Reihe von 100 Flecken durch scheinbares Verschieben machen läßt,—welche Figuren sich durch scheinbares Verschieben aus ihr erzeugen lassen.—Was aber habe ich in diesem Fall entfaltet?

76. Denk dir, man sagte: wir entfalten die Eigenschaften eines Vielecks, indem wir je 3 Seiten durch eine Diagonale zusammennehmen. Es zeigt sich dann als 24-Eck. Will ich sagen: ich habe eine Eigenschaft des 24-Ecks entfaltet? Nein. Ich will sagen, ich habe eine Eigenschaft dieses (hier gezeichneten) Vielecks entfaltet. Ich weiß jetzt, daß hier ein 24-Eck steht.

Ist dies ein Experiment? Es zeigt mir etwa, was für ein Polygon jetzt da steht. Man kann, was ich getan habe, ein Experiment des Zählens nennen.

Ja, wie aber, wenn ich so einen Versuch an einem Fünfeck anstelle, das ich ja schon übersehen kann?——Nun, nehmen wir einen Augenblick an, ich könnte es nicht übersehen,—was (z.B.) der Fall sein kann, wenn es sehr groß ist. Dann wäre das Ziehen der Diagonalen ein Mittel, um mich davon zu überzeugen, daß das ein Fünfeck ist. Ich könnte wieder sagen, ich habe die Eigenschaften des Polygons, das da gezeichnet ist, entfaltet.——Kann ich es nun übersehen, dann kann sich doch *daran* nichts ändern. Es war etwa überflüssig, diese Eigenschaft zu entfalten, wie es überflüssig ist, zwei Äpfel, die vor mir liegen, zu zählen.

Soll ich nun sagen: "es war wieder ein Experiment, aber ich war des not have spoken of unfolding the properties of a bar of iron by shewing that it melts at such and such a temperature. And mightn't you as well say that you unfolded the properties of our memory for numbers, as the properties of the row (e.g.)? For what you really do *unfold*, or *lay out*, is the row of marbles.—And you shew e.g. that if a row looks thus and thus, or is numbered with roman numerals in this way, it can be brought into that other memorable arrangement in a simple way, and without addition or loss of any marble. But this could after all equally well have been a psychological experiment shewing that you *now* find memorable certain patterns into which 100 spots are made merely by shifting them about.

"I have shewn what can be done with 100 marbles."—You have shewn that *these* 100 marbles (or those marbles over there), can be laid out in this way. The experiment was one of laying out (as opposed say to one of burning).

And the psychological experiment might for example have shewn how easy it is for you to be deceived: i.e. that you don't notice if marbles are smuggled into or out of the row. One could also say *this*: I have shewn what can be made of a row of 100 spots by means of apparent shifts,—what figures can be got out of it by apparent shifts.—But what did I unfold in this case?

76. Imagine it were said: we unfold the properties of a polygon by using diagonals to take the sides together three at a time. It then proves to be a figure with 24 angles. Do I want to say I have unfolded a property of the 24-angled polygon? No. I want to say I have unfolded a property of this polygon (the one drawn here). I now know that there is drawn here a figure with 24 angles.

Is this an experiment? It shews me e.g. what kind of polygon is drawn here now. What I did can be called an experiment in counting.

But what if I perform such an experiment on a pentagon, which I can already take in at a glance?——Well, let us assume for a moment that I could not take it in at a glance,—which (e.g.) may be the case if it is very big. Then drawing the diagonals would be a way of finding out that this is a pentagon. I could once more say I had unfolded the properties of the polygon drawn here.——Now if I can take it in at a glance then surely nothing *about it* can be changed. It was, perhaps, superfluous to unfold this property, as it is superfluous to count two apples which are before my eyes.

Ought I to say now: "It was an experiment again, but I was certain

Ausgangs sicher"? Aber bin ich des Ausgangs in der Weise sicher, wie des Ausgangs der Elektrolyse einer Wassermenge? Nein; sondern anders! Ergäbe die Elektrolyse der Flüssigkeit nicht . . ., so würde ich mich für närrisch halten, oder sagen, ich wisse jetzt überhaupt nicht mehr, was ich sagen soll.

Denk dir, ich sagte: "Ja, hier steht ein Viereck,—aber schauen wir doch nach, ob es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird!" Ich ziehe dann die Diagonale und sage: "Ja, hier haben wir zwei Dreiecke." Da würde man mich fragen: Hast du denn nicht *gesehen*, daß es in zwei Dreiecke zerlegt werden kann? Bist du erst jetzt überzeugt, daß hier ein Viereck steht; und warum traust du jetzt deinen Augen mehr als früher?

77. Aufgaben: Zahl der Töne—die innere Eigenschaft einer Melodie; Zahl der Blätter—äußere Eigenschaft eines Baumes. Wie hängt das mit der Identität des Begriffes zusammen? (Ramsey.)

78. Was zeigt uns der, der 4 Kugeln in 2 und 2 trennt, sie wieder zusammenschiebt, wieder trennt, etc.? Er prägt uns ein Gesicht ein und eine typische Veränderung dieses Gesichts.

79. Denke an die möglichen Stellungen einer Gliederpuppe. Oder denk, du hättest eine Kette mit, sagen wir, 10 Gliedern und du zeigst, was für charakteristische (d.h. einprägsame) Figuren man mit ihr legen kann. Die Glieder seien numeriert; dadurch werden sie zu einer leicht einprägbaren Struktur, auch wenn sie in gerader Reihe liegen.

Ich präge dir also charakteristische Lagen und Bewegungen dieser Kette ein.

Wenn ich nun sage: "Sieh', man kann auch *das* aus ihr machen" und es vorführe, zeige ich dir da ein Experiment?—Es kann sein; ich zeige z.B., daß man sie in diese Form bringen kann; aber daran hast du nicht gezweifelt. Und was dich interessiert, ist nicht etwas, was diese individuelle Kette betrifft.—Zeigt aber, was ich vorführe, nicht doch eine Eigenschaft dieser Kette? Gewiß; aber ich führe nur solche Bewegungen, solche Umformungen, vor, die einprägsamer Art sind; und dich interessiert, diese Umformungen *zu lernen*. Es interessiert dich aber darum, weil es so leicht ist, sie immer wieder, an verschiedenen Gegenständen vorzunehmen.

80. Die Worte "Sieh, was ich aus ihr machen kann—" sind allerdings dieselben, die ich auch verwenden würde, wenn ich dir zeigte, was ich alles aus einem Klumpen Ton z.B. formen kann. Etwa daß ich geschickt genug bin, solche Dinge aus diesem Klumpen zu formen. In einem andern Fall: daß dies Material sich *so* behandeln läßt. Hier würde man kaum sagen: 'ich mache dich darauf aufmerksam', daß ich

of the result"? But am I certain of the result in the way I am certain of the result of the electrolysis of a mass of water? No, but in another way. If the electrolysis of the liquid did not yield . . . , I should consider myself crazy, or say that I no longer have any idea what to say.

Imagine I were to say: "Yes, here is a square,—but still let's look and see whether a diagonal divides it into two triangles". Then I draw the diagonal and say: "Yes, here we have two triangles". Here I should be asked: Couldn't you *see* that it could be divided into two triangles? Have you only just convinced yourself that there is a square here; and why trust your eyes now rather than before?

77. Exercises: Number of notes—the internal property of a tune; number of leaves—the external property of a tree. How is this connected with the identity of the concept? (Ramsey.)

78. If someone splits up four marbles into two and two, puts them together again, splits them up again and so on, what is he shewing us? He is impressing a physiognomy, and a typical alteration of this physiognomy, on us.

79. Think of the possible postures of a puppet. Or suppose you had a chain of, say, ten links, and you were shewing what kind of characteristic (i.e. memorable) figures it can be made into. Let the links be numbered; in this way they become an easily memorable structure even when they lie in a straight line.

So I impress characteristic positions and movements of this chain on you.

When I now say: "Look, *this* can be made of it too" and display it, am I shewing you an experiment?—It may be; I am shewing for example that it can be got into this shape: but that you didn't doubt. And what interests you is not something to do with this individual chain.—But all the same isn't what I am displaying a property of this chain? Certainly: but I only display such movements, such transformations, as are of a memorable kind; and it interests you to *learn* these transformations. But the reason why it interests you is that it is so easy to reproduce them again and again in different objects.

80. The words "look what I can make with it—" are indeed the same as I should use if I were shewing what I can make with a lump of clay, for example. E.g. that I am clever enough to make such things with this lump. In another case: that this material can be dealt with like *this*. Here I should hardly be said to be 'drawing your attention

dies machen kann, oder daß das Material dies aushält,—während man im Fall der Kette sagen würde: ich mache dich darauf aufmerksam, daß sich dies mit ihr machen läßt.—Denn du hättest es dir auch *vorstellen* können. Aber du kannst natürlich keine Eigenschaft des Materials durch Vorstellen erkennen.

Das Experimenthafte verschwindet, indem man den Vorgang bloß als einprägsames Bild ansieht.

81. Was ich entfalte, kann man sagen, ist die *Rolle*, die '100' in unserm Rechensystem spielt.

82. (Ich schrieb einmal:[1] "In der Mathematik sind Prozeß und Resultat einander äquivalent.")

83. Und doch fühle ich, daß es eine Eigenschaft von '100' sei, daß es so erzeugt wird, oder werden kann. Aber wie kann es denn eine Eigenschaft der Struktur '100' sein, daß sie so erzeugt wird, wenn sie z.B. garnicht so erzeugt würde? Wenn niemand so multiplizierte? Doch nur, wenn man sagen könnte, es ist eine Eigenschaft dieses Zeichens, Gegenstand dieser Regel zu sein. Z.B., es ist Eigenschaft der '5', Gegenstand der Regel '$3 + 2 = 5$' zu sein. Denn nur als Gegenstand der Regel ist die Zahl *das* Resultat der Addition jener andern Zahlen.

Wenn ich aber nun sage: es ist Eigenschaft der Zahl . . ., das Resultat der Addition von . . . nach der Regel . . . zu sein?—Es ist also eine Eigenschaft der Zahl, daß sie bei der Anwendung dieser Regel auf diese Zahlen entsteht. Die Frage ist: würden wir es 'Anwendung der Regel' nennen, wenn diese Zahl *nicht* das Resultat wäre? Und das ist dieselbe Frage wie: "Was verstehst du unter der 'Anwendung dieser Regel': das, was du etwa mit ihr machst (und du magst sie einmal so, einmal so anwenden), oder ist 'ihre Anwendung' anders erklärt?"

84. "Es ist eine Eigenschaft dieser Zahl, daß dieser Prozeß zu ihr führt."—Aber, mathematisch gesprochen, führt kein Prozess zu ihr, sondern sie ist das Ende eines Prozesses (gehört noch zum Prozeß).

85. Aber warum fühle ich, es werde eine Eigenschaft der Reihe entfaltet, gezeigt?—Weil ich abwechselnd, was gezeigt wird, als der Reihe wesentlich, und nicht wesentlich, ansehe. Oder: weil ich an diese Eigenschaften abwechselnd als externe und interne denke. Weil ich abwechselnd etwas als selbstverständlich hinnehme und es bemerkenswert finde.

[1] Vgl. "Log.-phil. Abhandlung" 6. 1261: In der Logik sind Prozeß und Resultat äquivalent. Anm. d. Herausg.

to' the fact that I can do this, or that the material can stand this;—while in the case of the chain one would say: I draw your attention to the fact that this can be done with it.—For you could also have *imagined* it. But of course you can't get to know any property of the material by imagining.

The experimental character disappears when one looks at the process simply as a memorable picture.

81. What I unfold may be said to be the *role* which '100' plays in our calculating system.

82. (I once wrote: "In mathematics process and result are equivalent.")[1]

83. And yet I feel that it is a property of '100' that it is, or can be, produced in this way. But then how can it be a property of the structure '100' to be produced in this way, if e.g. it didn't get produced in this way at all? If no one multiplied in this way? Surely only if one could say, it is a property of this sign to be the subject of this rule. For example it is the property of '5' to be the subject of the rule '$3 + 2 = 5$'. For only as the subject of the rule is this number *the* result of the addition of the other numbers.

But suppose I now say: it is a property of the number . . . to be the result of the addition of . . . according to the rule . . . ?—So it is a property of the number that it arises when we apply this rule to these numbers. The question is: should we call it 'application of the rule', if this number were *not* the result? And that is the same question as: "What do you understand by 'application of this rule': what you e.g. do with it (and you may apply it at one time in this way, at another in that), or is 'its application' otherwise explained?"

84. "It is a property of this number that this process leads to it."—But, mathematically speaking, a process does not lead to it; it is the end of a process (is itself part of the process).

85. But why do I feel that a property of the row is unfolded, is shewn?—Because I alternately look at what is shewn as essential and as non-essential to the row. Or again: because I think of these properties alternately as external and as internal. Because I alternately take something as a matter of course and find it noteworthy.

[1] Cf. *Tractatus* 6. 1261: In logic process and result are equivalent. Edd.

86. "Du entfaltest doch die Eigenschaften der 100 Kugeln, indem du zeigst, was aus ihnen gemacht werden kann."—*Wie* gemacht werden kann? Denn, daß das aus ihnen gemacht werden *kann*, daran hat ja niemand gezweifelt, es muß also um die Art und Weise gehen, *wie* dies aus ihnen erzeugt wird. Aber sieh' diese an! ob sie nicht etwa das Resultat schon voraussetzt.—

Denn denke dir, es entsteht auf *diese Weise* einmal dies, einmal ein anderes Resultat; würdest du das nun hinnehmen? Würdest du nicht sagen: "Ich muß mich geirrt haben; auf *dieselbe* Art und Weise mußte immer das Gleiche entstehen." Das zeigt, daß du das Resultat der Umformung einbeziehst in die Art und Weise der Umformung.

87. Aufgabe: Soll ich es Erfahrungstatsache nennen, daß *dieses* Gesicht durch *diese* Veränderung zu *jenem* wird? (Wie muß '*dieses* Gesicht', '*diese* Veränderung' erklärt sein, damit . . .?)

88. Man sagt: diese Einteilung *macht klar*, was da für eine Reihe von Kugeln steht. Macht sie klar, was für eine Reihe vor der Einteilung da *stand*, oder macht sie klar, was für eine Reihe jetzt da steht?

89. "Ich sehe auf den ersten Blick, wieviele es sind." Nun wieviele sind es? Ist die Antwort "*So* viele"?—(wobei man auf die Gruppe der Gegenstände zeigt). Wie lautet sie aber? Es sind '50', oder '100', etc.

90. "Die Einteilung macht mir klar, was da für eine Reihe steht." Nun, was für eine steht da? Ist die Antwort "*Diese*"? Wie lautet eine sinnvolle Antwort?

91. Ich entfalte doch die geometrischen Eigenschaften dieser Kette auch, indem ich die Umformungen einer andern, gleich gebauten Kette vorführe. Aber dadurch zeige ich doch nicht, was ich tatsächlich mit der ersten tun kann, wenn diese sich tatsächlich als unbiegbar, oder sonstwie physikalisch ungeeignet erweist.

Also kann ich doch nicht sagen: ich entfalte die *Eigenschaften dieser Kette*.

92. Kann man Eigenschaften der Kette entfalten, die sie garnicht besitzt?

93. Ich messe einen Tisch, und er ist 1m lang.—Nun lege ich einen Meterstab an einen andern Meterstab. Messe ich ihn dadurch? Finde ich, daß jener zweite Meterstab 1m lang ist? Mache ich das gleiche Experiment der Messung, nur mit dem Unterschied, daß ich des Ausgangs sicher bin?

94. Ja, wenn ich den Maßstab an den Tisch anlege, messe ich immer den Tisch; kontrolliere ich nicht manchmal den Maßstab? Und

86. "You surely unfold the properties of the hundred marbles when you shew what can be made of them."—Can be made of them *how*? For, that it *can* be made of them no one has doubted, so the point must be the *kind of way* it is produced from them. But look at that, and see whether it does not perhaps itself presuppose the result.—

For suppose that in *that way* you got one time this and another time a different result; would you accept this? Would you not say: "I must have made a mistake; the *same* kind of way would always have to produce the same result". This shows that you are incorporating the result of the transformation into the kind of way the transforming is done.

87. Exercise: am I to call it a fact of experience that *this* face turns into *that* through *this* alteration? (How must '*this* face', '*this* alteration' be explained so as to . . . ?)

88. One says: this division *makes it clear* what kind of row of marbles we have here. Does it make it clear what kind of row it *was* before the division, or does it make it clear what kind of row it is now?

89. "I can see at a glance how many there are." Well, how many are there? Is the answer "*so* many"?—(pointing to the group of objects). How does the answer go, though? There are '50', or '100', etc.

90. "The division makes it clear to me what kind of row it is." Well, what kind of row is it. Is the answer "*this* kind"? How does a significant answer run?

91. Now I am surely also unfolding the geometrical properties of this chain, if I display the transformations of another, similarly constructed, chain. What I do, however, does not shew what I can in fact do with the first one, if it in fact should prove inflexible or in some other way physically unsuitable.

So after all I cannot say: I unfold the *properties of this chain*.

92. Can one unfold properties of the chain which it doesn't possess at all?

93. I measure a table; it is one yard long.—Now I put one yardstick up against another yardstick. Am I measuring it by doing that? Am I finding out that the second yardstick is a yard long? Am I making the same experiment of measuring, only with the difference that I am certain of the outcome?

94. And when I put the ruler up against the table, am I always measuring the table; am I not sometimes checking the ruler? And in

worin liegt der Unterschied zwischen dem einen Vorgehen und dem andern?

95. Das Experiment des Entfaltens einer Reihe kann uns, unter anderem, zeigen, aus wievielen Kugeln die Reihe besteht, oder aber, daß wir diese (sagen wir) 100 Kugeln so und so bewegen können.

Die Rechnung aber des Entfaltens zeigt uns, was wir eine 'Umformung durch bloßes Entfalten' nennen.

96. Prüfe den Satz: es sei keine *Erfahrungstatsache*: daß die Tangente einer visuellen Kurve ein Stück mit dieser gemeinsam läuft; und wenn dies eine Figur zeige, so nicht als das Resultat eines Experiments.

Man könnte auch sagen: Du siehst hier, daß Stücke einer kontinuierlichen visuellen Kurve gerade sind.——Aber sollte ich nicht sagen:— "Das nennst du doch eine 'Kurve'.—Und nennst du dieses Stückchen nun 'krumm' oder 'gerade'?—Das nennst du doch eine 'Gerade', und sie enthält dieses Stück."

Aber warum sollte man nicht für visuelle Strecken einer Kurve, die selbst keine Krümmung zeigen, einen neuen Namen gebrauchen?

"Das Experiment des Ziehens dieser Linien hat doch gezeigt, daß sie sich nicht in einem *Punkt* berühren."——Daß *sie* sich nicht in einem Punkt berühren? Wie sind '*sie*' definiert? Oder: Kannst du mir ein Bild davon zeigen, wie es ist, wenn sie sich 'in einem Punkt berühren'? Denn warum soll ich nicht einfach sagen: das Experiment hat ergeben, daß sie—nämlich eine krumme und eine gerade Linie—einander *berühren*? Denn ist dies *nicht*, was ich "Berührung" solcher Linien nenne?

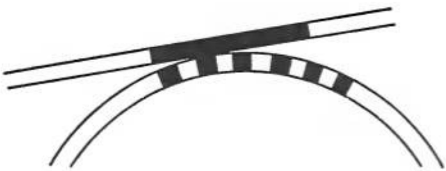
97. Zeichnen wir einen Kreis aus schwarzen und weißen Stücken, die kleiner und kleiner werden.

what does the distinction between the one procedure and the other consist?

95. The experiment of laying a row out may shew us, among other things, how many marbles the row consists of, or on the other hand that we can move these (say) 100 marbles in such-and-such ways.

But when we calculate how the row can be laid out, the calculation shews us what we call a 'transformation merely by laying out'.

96. Examine this proposition: it is not an *empiral fact* that the tangent of a visual curve partly coincides with the curve; and if a figure shews this, then it does not do so as the result of an experiment.



It could also be said: here you can see that segments of a continuous visual curve are straight.——But ought I not to have said:—"Now you call this a 'curve'.—And do you call this little bit of it 'curved' or 'straight'? —Surely you call it a 'straight line'; and the curve contains this bit."

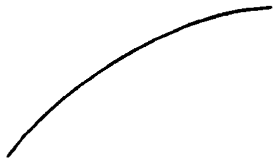
But why should one not use a new name for visual stretches of a curve which themselves exhibit no curvature?

"But the experiment of drawing these lines has shewn that they do not touch at a *point*."——That *they* do not touch at a point? How are '*they*' defined? Or again: can you point to a picture of what it is like for them to 'touch at a point'? Why shouldn't I simply say the experiment has yielded the result that they, i.e. a curved and a straight line, touch one another? For *isn't* this what I call a "touching" of such lines?

97. Let us draw a circle composed of black and white segments getting smaller and smaller.

"Welches dieser Stücke—von links nach rechts—erscheint dir schon als gerade?" Hier mache ich ein Experiment.

98. Wie, wenn jemand sagte: "Die Erfahrung lehrt dich, daß diese Linie



krumm ist"?—Da wäre zu sagen, daß hier die Worte "diese Linie", den auf dem Papier gezogenen *Strich* bedeutet. Man kann ja tatsächlich den Versuch anstellen und diesen Strich verschiedenen Menschen zeigen, und fragen: "was siehst du; eine gerade, oder eine krumme Linie?"—

Wenn aber jemand sagte: "Ich stelle mir jetzt eine krumme Linie vor", und wir ihm darauf sagen: "Da siehst du also, daß diese Linie eine krumme ist"—was für einen Sinn hätte das?

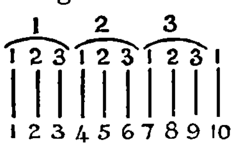
Nun kann man aber auch sagen: "Ich stelle mir einen Kreis vor aus schwarzen und weißen Stücken, eines ist groß, gekrümmt, die folgenden werden immer kleiner, das sechste ist schon gerade." Wo liegt hier das Experiment?

In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.

99. Was ist die charakteristische Verwendung des Vorgangs der Ableitung als *Rechnung*—im Gegensatz zur Verwendung des Vorgangs als Experiment?

Wir betrachten die Berechnung als Demonstration einer *internen Eigenschaft* (eine Eigenschaft des *Wesens*) der Strukturen. Aber was heißt das?

Als Urbild der 'internen Eigenschaft' könnte dieses dienen:

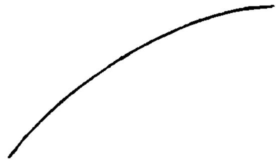


$$10 = 3 \times 3 + 1$$

Wenn ich nun sage: 10 Striche bestehen notwendig aus 3 mal 3 Strichen und einem Strich—das heißt doch nicht: wenn 10 Striche dastehen, so stehen immer die Ziffern und Bogen rund herum.—Setze ich sie aber zu den Strichen hinzu, so sage ich, ich demonstrierte nur das Wesen jener Gruppe von Strichen.—Aber bist du sicher, daß sich die Gruppe beim Dazuschreiben jener Zeichen nicht verändert hat?—"Ich weiß nicht; aber *eine* bestimmte Zahl von Strichen stand da; und wenn nicht 10, so eine andre und dann hatte die eben andre Eigenschaften.—"

"Which is the first of these segments—going from left to right—that strikes you as straight?" Here I am making an experiment.

98. What if someone were to say "Experience tells me that this line



is curved"?—Here it would have to be said that the words "this line" mean the line drawn on the paper. The experiment can actually be made, one can show this line to different people and ask: "What do you see, a straight line or a curved one?"—

But suppose someone were to say: "I am now imagining a curved line", whereupon we tell him: "So you see that the line is a curved one"—what kind of sense would that make?

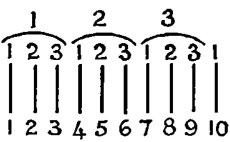
One can however also say: "I am imagining a circle made of black and white segments; one is big and curved, the ones that come after it keep on getting smaller, the sixth is quite straight". Where is the experiment here?

I can *calculate* in the medium of imagination, but not experiment.

99. What is the characteristic use of the derivation procedure as a *calculation*—as opposed to its use as an experiment?

We regard the calculation as demonstrating an *internal property* (a property of the *essence*) of the structures. But what does that mean?

The following might serve as a model of an 'internal property':



$10 = 3 \times 3 + 1$

Now when I say: 10 strokes necessarily consist of 3 times 3 strokes and 1 stroke—that does not mean: if there are 10 strokes there, then they have always got these figures and loops round them.—But if I put them in, I say that I was only demonstrating the nature of the group of strokes.—But are you certain that the group did not change while you were writing those symbols in?—"I don't know; but *a* definite number of strokes was there; and if it was not 10 then it was another number, and in that case it simply had different properties.—"

100. Man sagt: die Rechnung 'entfaltet' die Eigenschaft der Hundert.—Was heißt es eigentlich: 100 bestehe aus 50 und 50? Man sagt: der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Birnen. Aber wenn Einer sagte: "der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Äpfeln"—, wir wüßten zunächst nicht, was er meint.—Wenn man sagt: "Der Inhalt der Kiste besteht aus 2 mal 50 Äpfeln", so heißt das entweder, es seien da zwei Abteilungen zu 50 Äpfeln; oder es handelt sich etwa um eine Verteilung, in der Jeder 50 Äpfel erhalten soll, und ich höre nun, daß man aus dieser Kiste zwei Leute beteilen kann.

101. "Die 100 Äpfel in der Kiste bestehen aus 50 und 50"—hier ist wichtig der unzeitliche Charakter von 'bestehen'. Denn es heißt nicht, sie bestünden *jetzt*, oder für einige Zeit aus 50 und 50.

102. Was ist denn das Charakteristikum der 'internen Eigenschaften'? Daß sie immer, unveränderlich, in dem Ganzen bestehen, das sie ausmachen; gleichsam unabhängig von allen äußeren Geschehnissen. Wie die Konstruktion einer Maschine auf dem Papier nicht bricht, wenn die Maschine selbst äußeren Kräften erliegt.—Oder ich möchte sagen: daß sie nicht Wind und Wetter unterworfen sind, wie das Physikalische der Dinge; sondern unangreifbar wie Schemen.

103. Wenn wir sagen: "dieser Satz folgt aus jenem", so ist hier "folgen" wieder *unzeitlich* gebraucht. (Und das zeigt, daß dieser Satz nicht das Resultat eines Experiments ausspricht.)

104. Vergleiche damit: "Weiß ist heller als Schwarz." Auch dieser Ausdruck ist unzeitlich und auch er spricht das Bestehen einer *internen* Relation aus.

105. "Diese Relation *besteht* aber eben"—möchte man sagen. Aber die Frage ist: Hat dieser Satz einen Gebrauch—und welchen? Denn einstweilen weiß ich nur, daß mir dabei ein Bild vorschwebt (aber dies garantiert mir die Verwendung nicht) und daß die Worte einen deutschen Satz geben. Aber es fällt dir auf, daß die Worte hier anders gebraucht werden, als im alltäglichen Fall einer nützlichen Aussage. (Wie etwa der Radmacher bemerken kann, daß die Aussagen, die er gewöhnlich über Kreisförmiges und Gerades macht, anderer Art sind, als die, die im Euklid stehen.) Denn wir sagen: dieser *Gegenstand* ist heller als jener, oder, die Farbe dieses Dings ist heller als die Farbe jenes, und dann ist etwas jetzt heller und kann später dunkler sein.

Woher die Empfindung, "Weiß ist heller als Schwarz" sage etwas über das *Wesen* der beiden Farben aus?—

100. One says: calculation 'unfolds' the property of a hundred.—What does it really mean to say that 100 consists of 50 and 50? One says: the contents of the box consist of 50 apples and 50 pears. But if someone were to say: "The contents of the box consist of 50 apples and 50 apples"—, to begin with we shouldn't know what he meant.—If one says: "The contents of the box consist of twice 50 apples", this means either that there are two compartments each containing 50 apples; or what is in question is, say, a distribution in which each person is supposed to get 50 apples, and now I hear that two people can be given their share out of this box.

101. "The 100 apples in this box consist of 50 and 50"—here the non-temporal character of 'consist' is important. For it doesn't mean that *now*, or just for a time, they consist of 50 and 50.

102. For what is the characteristic mark of 'internal properties'? That they persist always, unalterably, in the whole that they constitute; as it were independently of any outside happenings. As the construction of a machine on paper does not break when the machine itself succumbs to external forces.—Or again, I should like to say that they are not subject to wind and weather like physical things; rather are they unassailable, like shadows.

103. When we say: "This proposition follows from that one" here again "to follow" is being used *non-temporally*. (And this shews that the proposition does not express the result of an experiment.)

104. Compare "White is lighter than black". This expression too is non-temporal and it too expresses the existence of an *internal* relation.

105. "But this relation *holds*"—one would like to say. The question is: has this proposition a use—and what use? For at the moment all I know is that a picture comes before my mind as I say it (but that does not guarantee the use for me) and that the words form an English sentence. But it sticks out that the words are being used otherwise here than in the everyday case of a useful statement. (As, say, a wheelwright may notice that the statements that he ordinarily makes about what is circular and straight are of a different kind from what are to be found in Euclid.) For we say: this *object* is lighter than that one, or the colour of this thing is lighter than the colour of that one, and in this case something is lighter now and may be darker later on.

Whence comes the feeling that "white is lighter than black" expresses something about the *essence* of the two colours?—

Aber ist die Frage überhaupt richtig gestellt? Was meinen wir denn mit dem 'Wesen' von Weiß oder Schwarz? Wir denken etwa an 'das Innere', 'die Konstitution', aber das ergibt hier doch keinen Sinn. Wir sagen etwa auch: "Es liegt im Weiß, daß es heller ist. . . ."

Ist es nicht so: das Bild eines schwarzen und eines weißen Flecks

dient uns *zugleich* als Paradigma dessen, was wir unter "heller" und "dunkler" verstehen und als Paradigma für "weiß" und für "schwarz". In *so* fern 'liegt' nun die Dunkelheit 'im' Schwarz, als sie *beide* von diesem Fleck dargestellt werden. Er ist dunkel, *dadurch daß* er schwarz ist.—Aber richtiger gesagt: er *heißt* "schwarz" und damit, in unserer Sprache, auch "dunkel". Jene Verbindung, eine Verbindung der Paradigmen und Namen ist in unsrer Sprache hergestellt. Und unser Satz ist unzeitlich, weil er nur die Verbindung der Worte "weiß", "schwarz" und "heller" mit einem Paradigma ausspricht.

Man kann Mißverständnisse vermeiden, dadurch daß man erklärt, es sei Unsinn, zu sagen: "die Farbe dieses Körpers ist heller, als die Farbe jenes", es müsse heißen: "dieser Körper ist heller als jener". D.h., man schließt jene Ausdrucksform aus unserer Sprache aus.

Wem sagen wir "Weiß ist heller als Schwarz"? Was teilt ihm das mit?

106. Aber kann ich den Satz der Geometrie nicht auch ohne Beweis glauben, z.B. auf die Versicherung eines Andern hin?—Und was verliert der Satz, wenn er seinen Beweis verliert?—Ich soll hier wohl fragen: "Was kann ich mit ihm anfangen?", denn darauf kommt es an. Den Satz auf die Versicherung des Andern *annehmen*—wie zeigt sich das? Ich kann ihn z.B. in weiteren Rechenoperationen verwenden, oder ich verwende ihn bei der Beurteilung eines physikalischen Sachverhalts. Versichert mich jemand z.B., 13 mal 13 sei 196, und ich glaube ihm, so werde ich mich nun wundern, daß ich 196 Nüsse nicht in 13 Reihen zu je 13 Nüssen legen kann und vielleicht annehmen, die Nüsse hätten sich von selbst vermehrt.

Aber ich fühle mich versucht zu sagen: man könne nicht *glauben*, daß $13 \times 13 = 196$ ist, man könne diese Zahl nur mechanisch vom Andern *annehmen*. Aber warum soll ich nicht sagen, ich glaube es? Ist denn, es glauben, ein geheimnisvoller Akt, der sozusagen unterirdisch mit der richtigen Rechnung in Verbindung steht? Ich kann doch jedenfalls *sagen*: "ich glaube es", und nun danach handeln.

Man möchte fragen: "Was tut der, der glaubt, daß $13 \times 13 = 196$ ist?" Und die Antwort kann sein: Nun, das wird davon abhängen, ob

But is this the right question to ask? For what do we mean by the 'essence' of white or black? We think perhaps of 'the inside', 'the constitution', but this surely makes no sense here. We also say e.g.: "It is part of white to be lighter than . . .".

Is it not like this: the picture of a black and a white patch

serves us *simultaneously* as a paradigm of what we understand by "lighter" and "darker" and as a paradigm for "white" and for "black". Now darkness 'is part of' black *inasmuch as* they are *both* represented by this patch. It is dark *by* being black.—But to put it better: it *is called* "black" and hence in our language "dark" too. That connexion, a connexion of the paradigms and the names, is set up in our language. And our proposition is non-temporal because it only expresses the connexion of the words "white", "black" and "lighter" with a paradigm.

Misunderstandings can be avoided by declaring it nonsense to say: "the colour of this body is brighter than the colour of that one"; what would have to be said is "this body is brighter than that one". I.e. the former way of putting it is excluded from our language.

Whom do we tell "White is lighter than black"? What information does it give?

106. But can't I believe the geometrical proposition even without a proof, for example on someone else's assurance?—And what does the proposition lose in losing its proof?—Here I presumably ought to ask: "What can I do with it?", for that is the point. *Accepting* the proposition on someone else's assurance—how does my doing this come out? I may for example use it in further calculating operations, or I use it in judging some physical fact. If someone assures me, for example, that 13×13 are 196 and I believe him, then I shall be surprised that I can't arrange 196 nuts in 13 rows of 13 each, and I shall perhaps assume that the nuts have increased of themselves.

But I feel a temptation to say: one can't *believe* that $13 \times 13 = 196$, one can only *accept* this number mechanically from somebody else. But why should I not say I believe it? For is believing it a mysterious act with as it were an underground connexion with the correct calculation? At any rate I can *say*: "I believe it", and act accordingly.

One would like to ask: "What are you doing in believing that $13 \times 13 = 196$?" And the answer may be: Well, that will depend er z.B. die Rechnung selber gemacht und sich dabei verschrieben hat,—oder ob sie zwar ein Andrer gemacht hat, er aber doch weiß, wie man so eine Rechnung macht,—oder ob er nicht multiplizieren kann, aber weiß, daß das Produkt die Zahl der Leute ist, die in 13 Reihen zu je 13 stehen,—kurz davon, was er denn mit der Gleichung $13 \times 13 = 196$ anfangen kann. Denn, sie prüfen, ist etwas mit ihr anfangen.

107. Denkt man nämlich an die arithmetische Gleichung als den Ausdruck einer internen Relation, so möchte man sagen: "Er kann ja garnicht glauben, daß 13×13 *dies* ergibt, weil das ja keine Multiplikation von 13 mit 13, oder kein *Ergeben* ist, wenn 196 am Ende steht." Das heißt aber, daß man das Wort "glauben" für den Fall einer Rechnung und ihres Resultats nicht anwenden will,—oder nur dann, wenn man die richtige Rechnung vor sich hat.

108. "Was glaubt der, der glaubt 13×13 ist 196?"—Wie tief dringt er—könnte man sagen, mit seinem Glauben in das Verhältnis dieser Zahlen ein? Denn bis zum Ende—will man sagen—kann er nicht dringen; oder er könnte es nicht glauben.

Aber wann dringt er in die Verhältnisse der Zahlen ein? Gerade während er sagt, daß er glaubt . . . ? Darauf wirst du nicht bestehen—denn es ist leicht zu sehen, daß dieser Schein nur durch die Oberflechenform unsrer Grammatik (wie man es nennen könnte) erzeugt wird.

109. Denn ich will sagen: "Man kann nur *sehen*, daß $13 \times 13 = 169$ ist, und man kann auch das nicht *glauben*. Und man kann—mehr oder weniger blind—eine Regel annehmen." Und was tue ich, wenn ich dies sage? Ich mache einen Schnitt; zwischen der *Rechnung* mit ihrem Resultat (d.i. einem bestimmten Bild, einer bestimmten Vorlage), und einem Versuch mit seinem Ausgang.

110. Ich möchte sagen: "Wenn ich glaube, daß $a \times b = c$ ist—und es kommt ja vor, daß ich so etwas glaube—sage, daß ich es glaube—so glaube ich nicht den mathematischen Satz, denn er steht am Ende eines Beweises, ist das Ende eines Beweises; sondern ich glaube: daß dies die Formel ist, die dort und dort steht, die ich so und so erhalten werde u. dergl."—Und dies klingt ja, als dränge ich in den Vorgang des Glaubens eines solchen Satzes ein. Während ich nur—in ungeschickter Weise—auf den *fundamentalen* Unterschied, bei scheinbarer Ähnlichkeit, der Rollen deute eines arithmetischen Satzes und eines Erfahrungssatzes.

Denn ich *sage* eben unter gewissen Umständen: "ich glaube, daß $a \times b = c$ ist." Was *meine* ich damit?—Was ich *sage*!——Wohl aber ist on whether, for instance, you did the sum and made a slip of the pen in doing so,—or whether somebody else did it, but you yourself know how such a calculation is done,—or whether you cannot multiply but know that the product is the number of people to be found in 13 rows of 13 each,—in short it depends on what you can do with the equation $13 \times 13 = 196$. For testing it is doing something with it.

107. The thing is, if one thinks of an arithmetical equation as the expression of an internal relation, then one would like to say: "You can't believe at all that 13×13 yields *this*, because that isn't a multiplication of 13 by 13, or is not a case of something *yielded*, if 196 comes at the end." But that means that one is not willing to use the word "believe" for the case of a calculation and its result,—or is willing only in the case in which one has a correct calculation before one.

108. "What are you believing if you believe $13 \times 13 = 196$?"—How deep do you penetrate, one might say, with your belief, into the relation of these numbers? For—one wants to say—you cannot be penetrating all the way, or you could not believe it.

But when have you penetrated into the relations of the numbers? Just while you say that you believe . . . ? You will not take your stand on that—for it is easy to see that this appearance is merely produced by the superficial form of our grammar (as it might be called).

109. For I want to say: "One can only *see* that $13 \times 13 = 169$, and even that one can't *believe*. And one can—more or less blindly—accept a rule". And what am I doing if I say this? I am *drawing a line* between the *calculation* with its result (that is to say a particular picture, a particular model), and an experiment with its outcome.

110. I should like to say: "When I believe that $a \times b = c$—and I do sometimes have such beliefs—do say that I have them—I am not believing the mathematical proposition, for that comes at the end of a proof, is the end of a proof; I am believing that this is the formula that comes in such-and-such a place, which I shall obtain in such-and-such a way, and so on".—And this does sound as if I were penetrating the process of believing such a proposition. Whereas I am merely—in an unskilful fashion—pointing to the *fundamental* difference, together with an apparent similarity, between the roles of an arithmetical proposition and an empirical proposition.

For in certain circumstances I do *say*: "I believe that $a \times b = c$". What do I *mean* by this?—What I *say*!——But what *is* interesting is the die Frage interessant: unter was für Umständen sage ich dies, und wie sind sie charakterisiert, im Gegensatz zu denen einer Aussage: "ich glaube, es wird regnen"? Denn was uns beschäftigt, ist ja dieser Gegensatz. Wir verlangen danach, ein Bild zu erhalten von der Verwendung der mathematischen Sätze und der Sätze "ich glaube, daß . . .", wo ein mathematischer Satz der Gegenstand des Glaubens ist.

111. "Du glaubst doch nicht den mathematischen Satz."—Das heißt: 'mathematischer Satz' bezeichnet mir eine Rolle für den Satz, eine Funktion, in der ein Glauben nicht vorkommt.

Vergleiche: "Wenn du sagst: 'ich glaube, daß das Rochieren so und so geschieht', so glaubst du nicht die Schachregel, sondern du glaubst etwa, daß *so* eine Regel des Schachs lautet."

112. "Man kann nicht *glauben*, die Multiplikation 13 × 13 liefere 169, weil das Resultat zur Rechnung gehört."—Was nenne ich "die Multiplikation 13 × 13"? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 169 steht? oder auch eine 'falsche Multiplikation'?

Wie ist festgelegt, welches Bild Multiplikation 13 × 13 ist?—Ist es nicht durch die Multiplikationsregeln *bestimmt*?—Aber wie, wenn dir mit Hilfe dieser Regeln heute etwas anderes herauskommt, als was in allen Rechenbüchern steht? Ist das nicht möglich?—"Nicht, wenn du die Regeln anwendest, wie *sie*!"—Freilich nicht! aber das ist ja ein Pleonasmus. Und wo steht, wie sie anzuwenden sind—und wenn es wo steht: wo steht, wie *dies* anzuwenden ist? Und das heißt nicht nur: in welchem Buch steht es, sondern auch, in welchem *Kopf*?—Was ist also die Multiplikation 13 × 13—oder, wonach soll ich mich beim Multiplizieren richten: nach den Regeln, oder nach der Multiplikation, die in den Rechenbüchern steht——wenn diese beiden nämlich nicht übereinstimmen?—Nun, es kommt tatsächlich nie vor, daß der, welcher rechnen gelernt hat, bei dieser Multiplikation hartnäckig etwas anderes herausbringt, als was in den Rechenbüchern steht. Sollte es aber geschehen; so würden wir ihn für abnorm erklären, und von seiner Rechnung weiter keine Notiz nehmen.

113. "Aber bin ich also in einer Schlußkette nicht gezwungen, zu gehen, wie ich gehe?"—Gezwungen? Ich kann doch wohl gehen, wie ich will!—"Aber wenn du im Einklang mit den Regeln bleiben willst, *mußt* du so gehen."—Durchaus nicht; ich nenne *das* 'Einklang'.—"Dann hast du den Sinn des Wortes 'Einklang' verändert, oder den Sinn der Regel."—Nein;—wer sagt, was hier 'verändern' und was 'gleichbleiben' heißt?

question in what kind of circumstances I say this and what is characteristic of them, in contrast to the circumstances of such a statement as: "I believe it is going to rain". For what preoccupies us is this contrast. What we require is a picture of the employment of mathematical propositions and of sentences beginning "I believe that . . .", where a mathematical proposition is the object of belief.

111. "But you surely don't believe a mathematical proposition."—That means: 'Mathematical proposition' signifies a role for the proposition, a function, in which believing does not occur.

Compare: "If you say: 'I believe that castling takes place in such and such a way', then you are not believing the rule of chess, but believing e.g. that a rule of chess runs like *that*".

112. "One can't *believe* that the multiplication 13 × 13 yields 169, because the result is part of the calculation."—What am I calling "the multiplication 13 × 13"? Only the correct pattern of multiplication, at the end of which comes 169? Or a 'wrong multiplication' too?

How is it established which pattern is the multiplication 13 × 13?—Isn't it *defined* by the rules of multiplication?—But what if, using these rules, you get different results to-day from what all the arithmetic books say? Isn't that possible? —"Not if you apply the rules as *they* do!" Of course not! But that is a mere pleonasm. And where does it say how they are to be applied—and if it does say somewhere, where does it say how *that* is to be applied? And that does not mean only: in what book does it say, but also: in what *head*?—What then is the multiplication 13 × 13—or what am I to take as a guide in multiplying—the rules, or the multiplication that comes in the arithmetic books——if, that is, these two do not agree?—Well, it never in fact happens that somebody who has learnt to calculate goes on obstinately getting different results, when he does a given multiplication, from what comes in the arithmetic books. But if it should happen, then we should declare him abnormal, and take no further account of his calculation.

113. "But am I not compelled, then, to go the way I do in a chain of inferences?"—Compelled? After all I can presumably go as I choose!—"But if you want to remain in accord with the rules you *must* go this way."—Not at all, I call *this* 'accord'.—"Then you have changed the meaning of the word 'accord', or the meaning of the rule."—No;—who says what 'change' and 'remaining the same' mean here?

Wieviele Regeln immer du mir angibst—ich gebe dir eine Regel, die *meine* Verwendung deiner Regeln rechtfertigt.

114. Wir könnten auch sagen: Wenn wir den Schlußgesetzen (Schlußregeln) *folgen*, so liegt in einem Folgen immer auch ein Deuten.

115. "Du darfst doch das Gesetz jetzt nicht auf einmal anders anwenden!"—Wenn ich darauf antworte: "Ach ja, ich hatte es ja *so* angewandt!" oder: "Ach, *so* sollte ich es anwenden—!"; dann spiele ich mit. Antworte ich aber einfach: "Anders?—Das *ist* doch nicht anders!"—was willst du tun? D.h. er kann antworten, wie ein verständiger Mensch und doch das Spiel mit uns nicht spielen.

116. "Nach dir könnte also jeder die Reihe fortsetzen, wie er will; und also auch auf *irgend* eine Weise schließen." Wir werden es dann nicht "die Reihe fortsetzen" nennen und auch wohl nicht "schließen". Und Denken und Schließen (sowie das Zählen) ist für uns natürlich nicht durch eine willkürliche Definition umschrieben, sondern durch natürliche Grenzen, dem Körper dessen entsprechend, was wir die Rolle des Denkens und Schließens in unserm Leben nennen können.

Denn, daß ihn Schlußgesetze nicht wie die Gleise den Zug zwingen, das und das zu reden, oder zu schreiben, darüber sind wir einig. Und wenn du sagst, er könne es zwar *reden*, aber er kann es nicht *denken*, so sage ich nur, das heiße nicht: er könne es, quasi trotz aller Anstrengung, nicht denken, sondern es heißt: zum 'Denken' gehört für uns wesentlich, daß er—beim Reden, Schreiben, etc.—*solche* Übergänge macht. Und ferner sage ich, daß die Grenze zwischen dem, was wir noch "denken" und dem, was wir nicht mehr so nennen, so wenig scharf gezogen ist, wie die Grenze zwischen dem, was noch "Gesetzmäßigkeit" genannt wird und dem, was wir nicht mehr so nennen.

Man kann aber dennoch sagen, daß die Schlußgesetze uns zwingen; in dem Sinne nämlich, wie andere Gesetze in der menschlichen Gesellschaft. Der Kanzlist, der so schließt, wie in (17), *muß* es so tun; er wäre bestraft worden, wenn er anders schlösse. Wer anders schließt, kommt allerdings in Konflikt: z.B. mit der Gesellschaft; aber auch mit andern praktischen Folgen.

Und auch *daran* ist etwas, wenn man sagt: er kann es nicht *denken*. Man will etwa sagen: Er kann es nicht mit persönlichem Inhalt erfüllen: er kann nicht wirklich *mitgehen*—mit seinem Verstand, mit seiner Person. Es ist ähnlich, wie man sagt: Diese Tonfolgen geben keinen Sinn, ich kann sie nicht mit Ausdruck singen. Ich kann nicht *mitschwingen*. Oder, was hier auf dasselbe hinauskommt: ich schwinge nicht mit.

"Wenn er es redet—könnte man sagen—kann er es nur gedankenlos

However many rules you give me—I give a rule which justifies *my* employment of your rules.

114. We might also say: when we *follow* the laws of inference (inference-rules) then following always involves interpretation too.

115. "But you surely can't suddenly make a different application of the law now!"—If my reply is: "Oh yes of course, *that* is how I was applying it!" or: "Oh! *That's* how I ought to have applied it—!"; then I am playing your game. But if I simply reply: "Different?—But this surely *isn't* different!"—what will you do? That is: somebody may reply like a rational person and yet not be playing our game.

116. "Then according to you everybody could continue the series as he likes; and so infer *any*how!" In that case we shan't call it "continuing the series" and also presumably not "inference". And thinking and inferring (like counting) is of course bounded for us, not by an arbitrary definition, but by natural limits corresponding to the body of what can be called the role of thinking and inferring in our life.

For we are at one over this, that the laws of inference do not compel him to say or to write such and such like rails compelling a locomotive. And if you say that, while he may indeed *say* it, still he can't *think* it, then I am only saying that that means, not: try as he may he can't think it, but: it is for us an essential part of 'thinking' that—in talking, writing, etc.—he makes *this sort* of transition. And I say further that the line between what we include in 'thinking' and what we no longer include in 'thinking' is no more a hard and fast one than the line between what is still and what is no longer called "regularity".

Nevertheless the laws of inference can be said to compel us; in the same sense, that is to say, as other laws in human society. The clerk who infers as in (17) *must* do it like that; he would be punished if he inferred differently. If you draw different conclusions you do indeed get into conflict, e.g. with society; and also with other practical consequences.

And there is even something in saying: he can't *think* it. One is trying e.g. to say: he can't fill it with personal content; he can't really *go along with it*—personally, with his intelligence. It is like when one says: this sequence of notes makes no sense, I can't sing it with expression. I cannot *respond* to it. Or, what comes to the same thing here: I don't respond to it.

"If he says it"—one might say—"he can only say it without think-reden." Und hierzu muß nur bemerkt werden, daß das 'gedankenlose' Reden sich von einem anderen wohl auch manchmal durch das unterscheidet, was beim Reden im Redenden an Vorstellungen, Empfindungen, und anderem, vor sich geht, daß aber diese Begleitung nicht das 'Denken' ausmacht und ihr Fehlen noch nicht die 'Gedankenlosigkeit'.

117. Inwiefern ist das logische Argument ein Zwang?—"Du gibst doch *das* zu,—und *das* zu; dann mußt du auch *das* zugeben!" Das ist die Art, jemanden zu zwingen. D.h., man kann so tatsächlich Menschen zwingen, etwas zuzugeben.—Nicht anders, als wie man Einen etwa dazu zwingen kann, dorthin zu gehen, indem man gebietend mit dem Finger dorthin zeigt.

Denke, ich zeige in so einem Fall mit zwei Fingern zugleich in zwei verschiedenen Richtungen und stelle es damit dem Andern frei, in welcher der beiden Richtungen er gehen will—ein andermal zeige ich nur in *einer* Richtung; so kann man das auch so ausdrücken: mein erster Befehl habe ihn nicht gezwungen, in *einer* Richtung zu gehen, wohl aber der zweite. Das ist aber eine Aussage, die angeben soll, welcher Art meine Befehle waren; aber nicht, in welcher Art sie wirken, ob sie den und den tatsächlich zwingen, d.h., ob er ihnen gehorcht.

118. Es schien zuerst, als sollten diese Überlegungen zeigen, daß, 'was ein logischer Zwang zu sein scheint, in Wirklichkeit nur ein psychologischer ist'—und da fragte es sich doch: kenne ich also beide Arten des Zwanges?!—

Denke dir, es würde der Ausdruck gebraucht: "Das Gesetz § . . . bestraft den Mörder mit dem Tode." Das könnte doch nur heißen: dieses Gesetz laute: so und so. Jene Form des Ausdrucks aber könnte sich uns aufdrängen, weil das Gesetz Mittel ist, wenn der Schuldige der Bestrafung zugeführt wird.—Nun reden wir von 'Unerbittlichkeit' bei denen, die jemand bestrafen. Da könnte es uns einfallen, zu sagen: "das Gesetz ist *unerbittlich*—die Menschen können den Schuldigen laufen lassen, das Gesetz richtet ihn hin." (Ja auch: "das Gesetz richtet ihn *immer* hin.")—Wozu ist so eine Ausdrucksform zu gebrauchen?—Zunächst sagt dieser Satz ja nur, im Gesetz stehe das und das, und die Menschen richten sich manchmal nicht danach. Dann aber zeigt er doch das Bild des *einen* unerbittlichen—und vieler laxer Richter. Er dient darum als Ausdruck des Respekts vor dem Gesetz. Endlich aber kann man die Ausdrucksform auch so gebrauchen, daß man ein Gesetz 'unerbittlich' nennt, wenn es eine Möglichkeit der Begnadigung nicht vorsieht, und im entgegengesetzten Fall etwa 'einsichtig'.

ing". And here it merely needs to be noticed that 'thoughtless' talk and other talk do indeed sometimes differ as regards what goes on in the talker, his images, sensations and so on while he is talking, but that this accompaniment does not constitute the thinking, and the lack of it is not enough to constitute 'thoughtlessness'.

117. In what sense is logical argument a compulsion?—"After all you grant *this* and *this*; so you must also grant *this*!" That is the way of compelling someone. That is to say, one can in fact compel people to admit something in this way.—Just as one can e.g. compel someone to go over there by pointing over there with a bidding gesture of the hand.

Suppose in such a case I point with two fingers at once in different directions, thus leaving it open to the man to go in which of the two directions he likes,—and another time I point in only *one* direction; then this can also be expressed by saying: my first order did not compel him to go just in *one* direction, while the second one did. But this is a statement to tell us what kind of orders I gave; not the way they operate, not whether they do in fact compel such-and-such a person, i.e. whether he obeys them.

118. It looked at first as if these considerations were meant to shew that 'what seems to be a logical compulsion is in reality only a psychological one'—only here the question arose: am I acquainted with both kinds of compulsion, then?!

Imagine that people used the expression: "The law § . . . punishes a murderer with death". Now this could only mean: this law runs so and so. That form of expression, however, might force itself on us, because the law is an instrument when the guilty man is brought to punishment.—Now we talk of 'inexorability' in connexion with people who punish. And here it might occur to us to say: "The law is *inexorable*—men can let the guilty go, the law executes him". (And even: "the law *always* executes him".)—What is the use of such a form of expression?—In the first instance, this proposition only says that such-and-such is to be found in the law, and human beings sometimes do not go by the law. Then, however, it does give us a picture of a single inexorable judge, and many lax judges. That is why it serves to express respect for the law. Finally, the expression can also be so used that a law is called inexorable when it makes no provision for a possible act of grace, and in the opposite case it is perhaps called 'discriminating'.

Wir reden nun von der 'Unerbittlichkeit' der Logik; und denken uns die logischen Gesetze unerbittlich, unerbittlicher noch, als die Naturgesetze. Wir machen nun darauf aufmerksam, wie das Wort "unerbittlich" auf mehrerlei Weise angewendet wird. Es entsprechen unsern logischen Gesetzen sehr allgemeine Tatsachen der täglichen Erfahrung. Es sind die, die es uns möglich machen, jene Gesetze immer wieder auf einfache Weise (mit Tinte auf Papier z.B.) zu demonstrieren. Sie sind zu vergleichen mit jenen Tatsachen, welche die Messung mit dem Metermaß leicht ausführbar und nützlich machen. Das legt den Gebrauch gerade dieser Schlußgesetze nahe, und nun sind *wir* unerbittlich in der Anwendung dieser Gesetze. Weil wir '*messen*'; und es gehört zum Messen, daß Alle das gleiche Maß haben. Außerdem aber kann man unerbittliche, d.h. *eindeutige*, von nichteindeutigen Schlußregeln unterscheiden, ich meine von solchen, die uns eine Alternative freistellen.

119. "Ich kann doch nur folgern, was wirklich folgt."—D.h.: was die logische Maschine wirklich hervorbringt. Die logische Maschine, das wäre ein alles durchdringender ätherischer Mechanismus.—Vor diesem Bild muß man warnen.

Denk dir ein Material härter und fester als irgend ein anderes. Aber wenn man einen Stab aus diesem Stoff aus der horizontalen in die vertikale Lage bringt, so zieht er sich zusammen; oder er biege sich, wenn man ihn aufrichtet und ist dabei so hart, daß man ihn auf keine andre Weise biegen kann.—(Ein Mechanismus aus diesem Stoff hergestellt, etwa eine Kurbel, Pleuelstange und Kreuzkopf. Andere Bewegungsweise des Kreuzkopfs.)

Oder: eine Stange biegt sich, wenn man ihr eine gewisse Masse nähert; gegen alle Kräfte aber, die wir auf sie wirken lassen, ist sie vollkommen starr. Denk dir, die Führungsschienen des Kreuzkopfs biegen sich und strecken sich wieder, wenn die Kurbel sich ihnen nähert und sich wieder entfernt. Ich nähme aber an, daß keinerlei besondere äußere Kraft dazu nötig ist, dies hervorzurufen. Dieses Benehmen der Schienen würde wie das eines lebenden Wesens anmuten.

Wenn wir sagen: "Wenn die Glieder des Mechanismus ganz starr wären, würden sie sich so und so bewegen", was ist das Kriterium dafür, daß sie ganz starr sind? Ist es, daß sie gewissen Kräften widerstehen? oder, daß sie sich so und so bewegen?

Denke, ich sage: "das ist das Bewegungsgesetz des Kreuzkopfes (die Zuordnung seiner Lage zur Lage der Kurbel etwa), wenn sich die Länge der Kurbel und der Pleuelstange nicht ändern." Das heißt wohl: Wenn sich die Lagen der Kurbel und des Kreuzkopfes so zueinander verhalten, dann sage ich, daß die Länge der Pleuelstange gleich bleibt.

Now we talk of the 'inexorability' of logic; and think of the laws of logic as inexorable, still more inexorable than the laws of nature. We now draw attention to the fact that the word "inexorable" is used in a variety of ways. There correspond to our laws of logic very general facts of daily experience. They are the ones that make it possible for us to keep on demonstrating those laws in a very simple way (with ink on paper for example). They are to be compared with the facts that make measurement with a yardstick easy and useful. This suggests the use of precisely these laws of inference, and now it is *we* that are inexorable in applying these laws. Because we '*measure*'; and it is part of measuring for everybody to have the same measures. Besides this, however, inexorable, i.e. *unambiguous* rules of inference can be distinguished from ones that are not unambiguous, I mean from such as leave an alternative open to us.

119. "But I can infer only what actually does follow."—That is to say: what the logical machine really does produce. The logical machine —that would be an all-pervading ethereal mechanism.—We must give warning against this picture.

Imagine a material harder and more rigid than any other. But if a rod made of this stuff is brought out of the horizontal into the vertical, it shrinks; or it bends when set upright and at the same time it is so hard that there is no other way of bending it.—(A mechanism made of this stuff, say a crank, connecting-rod and crosshead. The different way the crosshead would move.)

Or again: a rod bends if one brings a certain mass near it; but it is completely rigid in face of all forces that we subject it to. Imagine that the guide-rails of the crosshead bend and then straighten again as the crank approaches and retreats. My assumption would be, however, that no particular external force is necessary to cause this. This behaviour of the rails would give an impression as of something alive.

When we say: "If the parts of the mechanism were quite rigid, they would move so and so", what is the criterion for their being quite rigid? Is it that they resist certain forces? Or that they do move so and so?

Suppose I say: "This is the law of motion of the crosshead (the correlation of its position and the position of the crank perhaps) when the lengths of the crank and connecting-rod remain constant". This presumably means: If the crank and crosshead keep these relative positions, I say that the length of the connecting-rod remains constant.

120. "Wenn die Teile ganz starr wären, würden sie sich so bewegen": ist das eine Hypothese? Es scheint, nein. Denn wenn wir sagen: "die Kinematik beschreibt die Bewegungen des Mechanismus unter der Voraussetzung, daß seine Teile vollkommen starr sind", so geben wir einerseits zu, daß diese Voraussetzung in der Wirklichkeit nie zutrifft, anderseits soll es keinem Zweifel unterliegen, daß vollkommen starre Teile sich so bewegen würden. Aber woher diese Sicherheit? Es handelt sich hier wohl nicht um Sicherheit, sondern um eine Bestimmung, die wir getroffen haben. Wir *wissen* nicht, daß Körper, wenn sie (nach den und den Kriterien) starr wären, sich so bewegen würden; wohl aber würden wir (unter Umständen) Teile 'starr' nennen, die sich so bewegen—denke in so einem Fall immer daran, daß ja die Geometrie (oder Kinematik) keine Meßmethode spezifiziert, wenn sie von gleichen Längen oder vom Gleichbleiben einer Länge spricht.

Wenn wir also die Kinematik etwa die Lehre von der Bewegung vollkommen starrer Maschinenteile nennen, so liegt hierin einerseits eine Andeutung über die (mathematische) Methode: wir bestimmen gewisse Distanzen als die Längen der Maschinenteile, die sich nicht ändern; anderseits eine *Andeutung* über die Anwendung des Kalküls.

121. Die Härte des logischen Muß. Wie, wenn man sagte: das Muß der Kinematik ist viel härter, als das kausale Muß, das einen Maschinenteil zwingt, sich *so* zu bewegen, wenn der andere sich *so* bewegt?—

Denk dir, wir würden die Bewegungsweise des 'vollkommen Starren' Mechanismus durch ein kinematographisches Bild, einen Zeichenfilm, darstellen. Wie, wenn man sagen würde, dies Bild sei *vollkommen hart*, und damit meinte, wir hätten dieses Bild als Darstellungsweise genommen,—was immer die Tatsachen seien, wie immer sich die Teile des wirklichen Mechanismus biegen, oder dehnen mögen.

122. Die Maschine (ihr Bau) als Symbol für ihre Wirkungsweise: Die Maschine—könnte ich zuerst sagen—scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben. Was heißt das?—

Indem wir die Maschine kennen, scheint alles Übrige, nämlich die Bewegungen, die sie machen wird, schon ganz bestimmt zu sein.

"Wir reden so, als *könnten* sich diese Teile nur so bewegen, als könnten sie nichts andres tun."

Wie ist es—: vergessen wir also die Möglichkeit, daß sie sich biegen, abbrechen, schmelzen können, etc.? Ja; wir denken in *vielen* Fällen garnicht daran. Wir gebrauchen eine Maschine, oder das Bild einer Maschine, als Symbol für eine bestimmte Wirkungsweise. Wir teilen

120. "If the parts were quite rigid this is how they would move"; is that a hypothesis? It seems not. For when we say: "Kinematics describes the movements of the mechanism on the assumption that its parts are completely rigid", on the one hand we are admitting that this assumption never squares with reality, and on the other hand it is not supposed to be in any way doubtful that completely rigid parts would move in this way. But whence this certainty? The question here is not really one of certainty but of something stipulated by us. We do not *know* that bodies would move in these ways if (by such and such criteria) they were quite rigid; but (in certain circumstances) we should certainly *call* 'rigid' such parts as did move in those ways.—Always remember in such a case that geometry (or kinematics) does not specify any method of measuring when it talks about the same, or constant, length.

When therefore we call kinematics the theory, say, of the movement of perfectly rigid parts of a mechanism, on the one hand this contains an indication as to (mathematical) method—we stipulate certain distances as the lengths of machine parts that do not alter—and on the other hand an *indication* about the application of the calculus.

121. The hardness of the logical *must*. What if one were to say: the *must* of kinematics is much harder than the causal *must* compelling a machine part to move like *this* when another moves like *this*?—

Suppose we represented the movement of the 'perfectly rigid' mechanism by a cinematographic picture, a cartoon film. Suppose this picture were said to be *perfectly hard*, and this meant that we had taken this picture as our method of description—whatever the facts may be, however the parts of the real mechanism may bend or expand.

122. The machine (its structure) as symbolizing its action: the action of a machine—I might say at first—seems to be there in it from the start. What does that mean?—

If we know the machine, everything else, that is its movement, seems to be already completely determined.

"We talk as if these parts *could* only move in this way, as if they could not do anything else."

How is this—do we forget the possibility of their bending, breaking off, melting, and so on? Yes; in *many* cases we don't think of that at all. We use a machine, or the picture of a machine, to symbolize a particular action of the machine. For instance, we give someone such a picture z.B. Einem dieses Bild mit und setzen voraus, daß er die Erscheinungen der Bewegungen der Teile aus ihm ableitet. (So wie wir jemand eine Zahl mitteilen können, indem wir sagen, sie sei die fünfundzwanzigste der Reihe, 1, 4, 9, 16, . . .)

"Die Maschine scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben" heißt: Du bist geneigt, die künftigen Bewegungen der Maschine in ihrer Bestimmtheit Gegenständen zu vergleichen, die schon in einer Lade liegen und von uns nun herausgeholt werden.

So aber reden wir nicht, wenn es sich darum handelt, das wirkliche Verhalten einer Maschine vorauszusagen; da vergessen wir, im allgemeinen, nicht die Möglichkeiten der Deformation der Teile etc.

Wohl aber, wenn wir uns darüber wundern, wie wir denn die Maschine als Symbol einer Bewegungsweise verwenden können—da sie sich doch auch ganz *anders* bewegen kann.

Nun, wir könnten sagen, die Maschine, oder ihr Bild, stehe als Anfang einer Bilderreihe, die wir aus diesem Bild abzuleiten gelernt haben.

Wenn wir aber bedenken, daß sich die Maschine auch anders hätte bewegen können, so erscheint es uns leicht, als müßte in der Maschine als Symbol ihre Bewegungsart noch viel bestimmter enthalten sein, als in der wirklichen Maschine. Es genüge da nicht, daß dies die erfahrungsmäßig vorausbestimmten Bewegungen seien, sondern sie müßten eigentlich—in einem mysteriösen Sinne—bereits *gegenwärtig* sein. Und es ist ja wahr: die Bewegung des Maschinensymbols ist in anderer Weise vorausbestimmt, als die einer gegebenen wirklichen Maschine.

123. "Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen."—Wie *was* z.B.?—*Kann* man sie nicht—in gewissem Sinne—mit einem Schlag erfassen? Und in *welchem* Sinne kannst du dies nicht? Es ist eben, als könnten wir sie in einem noch viel direkteren Sinne mit einem Schlag erfassen. Aber hast du dafür ein Vorbild? Nein. Es bietet sich uns nur diese Ausdrucksweise an. Als das Resultat sich kreuzender Gleichnisse.

124. Du hast kein Vorbild dieser übermäßigen Tatsache, aber du wirst dazu verführt, einen *Über-Ausdruck* zu gebrauchen.

125. Wann denkt man denn: die Maschine habe ihre möglichen Bewegungen schon in irgendeiner mysteriösen Weise in sich?—Nun, wenn man philosophiert. Und was verleitet uns, das zu denken? Die Art und Weise, wie wir von der Maschine reden. Wir sagen z.B., die Maschine *habe* (*besäße*) diese Bewegungsmöglichkeiten, wir sprechen von der ideal starren Maschine, die sich nur so und so bewegen *könne*.

and assume that he will derive the movement of the parts from it. (Just as we can give someone a number by telling him that it is the twenty-fifth in the series 1, 4, 9, 16, ...)

"The machine's action seems to be in it from the start" means: you are inclined to compare the future movements of the machine in definiteness to objects which are already lying in a drawer and which we then take out.

But we do not say this kind of thing when we are concerned with predicting the actual behaviour of a machine. Here we do not in general forget the possibility of a distortion of the parts and so on.

We do talk like that, however, when we are wondering at the way we can use a machine to symbolize a given way of moving—since it can also move in quite *different* ways.

Now, we might say that a machine, or the picture of it, is the first of a series of pictures which we have learnt to derive from this one.

But when we remember that the machine could also have moved differently, it readily seems to us as if the way it moves must be contained in the machine-as-symbol far more determinately than in the actual machine. As if it were not enough here for the movements in question to be empirically determined in advance, but they had to be really—in a mysterious sense—already *present*. And it is quite true: the movement of the machine-as-symbol is predetermined in a different sense from that in which the movement of any given actual machine is predetermined.

123. "It is as if we could grasp the whole use of the word in a flash." Like *what* e.g.?—Can't the use—in a certain sense—be grasped in a flash? And in *what* sense can it not? The point is, that it is as if we could 'grasp it in a flash' in yet another and much more direct sense than that.—But have you a model for this? No. It is just that this expression suggests itself to us. As the result of crossing similes.

124. You have no model of this superlative fact, but you are seduced into using a *super-expression*.

125. When does one have the thought: the possible movements of a machine are already there in it in some mysterious way?—Well, when one is doing philosophy. And what leads us into thinking that? The way we talk about machines. We say, for example, that a machine *has* (*possesses*) such-and-such possibilities of movement; we speak of the ideally rigid machine which *can* only move in such-and-such a way.——

——Die Bewegungs*möglichkeit*, was ist sie? Sie ist nicht die *Bewegung*; aber sie scheint auch nicht die bloße physikalische *Bedingung* der Bewegung zu sein, etwa, daß zwischen Lager und Zapfen ein gewisser Zwischenraum ist, der Zapfen nicht zu streng ins Lager paßt. Denn dies ist zwar *erfahrungsmäßig* die Bedingung der Bewegung, aber man könnte sich die Sache auch anders vorstellen. Die Bewegungsmöglichkeit soll eher ein Schatten der Bewegung selber sein. Aber kennst du so einen Schatten? Und unter Schatten verstehe ich nicht irgendein Bild der Bewegung; denn dies Bild müßte ja nicht das Bild gerade *dieser* Bewegung sein. Aber die Möglichkeit dieser Bewegung muß die Möglichkeit gerade dieser Bewegung sein. (Sieh', wie hoch die Wellen der Sprache hier gehen!)

Die Wellen legen sich, sowie wir uns fragen: wie gebrauchen wir denn, wenn wir von einer Maschine reden, das Wort "Möglichkeit der Bewegung"?—Woher kamen aber dann die seltsamen Ideen? Nun, ich zeige dir die Möglichkeit der Bewegung etwa durch ein *Bild* der Bewegung: 'also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit Ähnliches.' Wir sagen: "es bewegt sich noch nicht, aber es hat schon die Möglichkeit sich zu bewegen",—'also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit sehr Nahes'. Wir mögen zwar bezweifeln, ob die und die physikalische Bedingung diese Bewegung möglich macht, aber wir diskutieren nie, ob *dies* die Möglichkeit dieser oder jener Bewegung *sei*: 'also steht die Möglichkeit der Bewegung zur Bewegung selbst in einer einzigartigen Relation, enger, als die des Bildes zu seinem Gegenstand', denn es kann bezweifelt werden, ob dies das Bild dieses oder jenes Gegenstandes ist. Wir sagen: "die Erfahrung wird lehren, ob dies dem Zapfen diese Bewegungsmöglichkeit gibt", aber wir sagen nicht: "die Erfahrung wird lehren, ob dies die Möglichkeit dieser Bewegung ist": 'also ist es nicht Erfahrungstatsache, daß diese Möglichkeit die Möglichkeit gerade dieser Bewegung ist.'

Wir achten auf unsere eigene Ausdrucksweise, diese Dinge betreffend, verstehen sie aber nicht, sondern mißdeuten sie. Wir sind, wenn wir philosophieren, wie Wilde, wie primitive Menschen, die die Ausdrucksweise zivilisierter Menschen hören, sie mißdeuten und nun seltsame Schlüsse aus dieser Deutung ziehen.

Denke dir, es verstünde Einer unsre Vergangenheitsform nicht: "er ist hier gewesen."——Er sagt: " 'er *ist*', das ist die Gegenwart, also sagt der Satz, daß die Vergangenheit in einem gewissen Sinne gegenwärtig ist."

126. "Aber ich meine nicht, daß, was ich jetzt (beim Erfassen) tue, die künftige Verwendung *kausal* und erfahrungsmäßig bestimmt, sondern daß, in einer *seltsamen* Weise, diese Verwendung selbst in

What is this *possibility* of movement? It is not the *movement*, but it does not seem to be the mere physical *conditions* for moving either, e.g. that there is a certain space between socket and pin, the pin not fitting too tight in the socket. For while this is the *empirical* condition for movement, one could also imagine it to be otherwise. The possibility of a movement is, rather, supposed to be a shadow of the movement itself. But do you know of such a shadow? And by a shadow I do not mean some picture of the movement; for such a picture would not necessarily be a picture of just *this* movement. But the possibility of this movement must be the possibility of just this movement. (See how high the seas of language run here!)

The waves subside as soon as we ask ourselves: how do we use the phrase "possibility of movement" when we are talking about a given machine?—But then where did our queer ideas come from? Well, I shew you the possibility of a movement, say by means of a *picture* of the movement: 'so possibility is something which is like reality'. We say: "It isn't moving yet, but it already has the possibility of moving"—'so possibility is something very near reality'. Though we may doubt whether such-and-such physical conditions make this movement possible, we never discuss whether *this* is the possibility of this or of that movement: 'so the possibility of the movement stands in a unique relation to the movement itself; closer than that of a picture to its subject'; for it can be doubted whether a picture is the picture of this thing or that. We say "Experience will shew whether this gives the pin this possibility of movement", but we do not say "Experience will shew whether this is the possibility of this movement": 'so it is not an empirical fact that this possibility is the possibility of precisely this movement'.

We pay attention to the expressions we use concerning these things; we do not understand them, however, but misinterpret them. When we do philosophy we are like savages, primitive people, who hear the expressions of civilized men, put a false interpretation on them, and then draw queer conclusions from it.

Imagine someone not understanding our past tense: "he has had it".—He says: " 'he *has*'—that's present, so the proposition says that in some sense the past is present.'

126. "But I don't mean that what I do now (in grasping a sense) determines the future use *causally* and as a matter of experience, but that in a *queer* way, the use itself is in some sense present." But of

irgend einem Sinne, gegenwärtig ist."—Aber 'in *irgend* einem Sinne' ist sie es ja! (Wir sagen ja auch: "die Ereignisse der vergangenen Jahre sind mir gegenwärtig.") Eigentlich ist an dem, was du sagst, falsch nur der Ausdruck: "in seltsamer Weise." Das Übrige ist richtig; und seltsam erscheint der Satz nur, wenn man sich zu ihm ein anderes Sprachspiel vorstellt, als das, worin wir ihn tatsächlich verwenden. (Jemand sagte mir, er habe sich als Kind darüber gewundert, wie denn der Schneider '*ein Kleid nähe*'—er dachte, dies heiße, es werde durch *bloßes Nähen* ein Kleid erzeugt, indem nämlich Faden an Faden genäht würde.)

127. Die unverstandene Verwendung des Wortes wird als Ausdruck eines seltsamen *Vorgangs* gedeutet. (Wie man sich die Zeit als seltsames Medium, die Seele als seltsames Wesen denkt.)

Die Schwierigkeit aber entsteht hier in allen Fällen durch die Vermischung von "ist" und "heißt".

128. Die Verbindung, die keine kausale, erfahrungsmäßige, sondern eine viel strengere und härtere sein soll, ja so fest, daß das Eine irgendwie schon das Andere *ist*, ist immer eine Verbindung in der Grammatik.

129. Woher weiß ich, daß dies Bild meine Vorstellung von der *Sonne* ist?—Ich *nenne* es Vorstellung von der Sonne. Ich *verwende* es als Bild der *Sonne*.

130. "Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen."—Wir sagen ja, daß wir es tun. D.h., wir beschreiben ja, manchmal, was wir tun, mit diesen Worten. Aber es ist an dem, was geschieht, nichts Erstaunliches, nichts Seltsames. Seltsam wird es, wenn wir dazu geführt werden, zu denken, daß die künftige Entwickelung auf irgendeine Weise schon im Akt des Erfassens gegenwärtig sein muß und doch nicht gegenwärtig ist.—Denn wir sagen, es sei kein Zweifel, daß wir das Wort . . . verstehen und anderseits liegt seine Bedeutung in seiner Verwendung. Es ist kein Zweifel, daß ich jetzt *Schach* spielen will; aber das Schachspiel ist dies Spiel durch *alle seine Regeln* (u.s.f.). Weiß ich also nicht, was ich spielen wollte, ehe ich gespielt *habe*? Oder aber, sind alle Regeln in meinem Akt der Intention enthalten? Ist es nun Erfahrung, die mich lehrt, daß auf diesen Akt der Intention für gewöhnlich diese Art des Spielens folgt? Kann ich also doch nicht sicher sein, was ich zu tun beabsichtigte? Und wenn dies Unsinn ist, welcherlei über-starre Verbindung besteht zwischen dem Akt der Absicht und dem Beabsichtigten?——Wo ist die Verbindung gemacht zwischen dem Sinn der Worte "Spielen wir eine Partie Schach!" und allen Regeln des Spiels?—Im Regelverzeichnis des Spiels, im Schachunterricht, in der täglichen Praxis des Spielens.

course it is, 'in *some* sense'! (And don't we also say: "the events of the years that are past are present to me"?) Really the only thing wrong with what you say is the expression "in a queer way". The rest is correct; and the sentence only seems queer when one imagines a different language-game for it from the one in which we actually use it. (Someone once told me that as a child he had wondered how a tailor '*sewed a dress*'—he thought this meant that a dress was produced *just by sewing*, by sewing one thread on to another.)

127. In our failure to understand the use of a word we take it as the expression of a queer *process*. (As we think of time as a queer medium, of the mind as a queer kind of being.)

The difficulty arises in all these cases through mixing up "is" and "is called".

128. The connexion which is not supposed to be a causal, experiential one, but much stricter and harder, so rigid even, that the one thing somehow already *is* the other, is always a connexion in grammar.

129. How do I know that this picture is my image of the *sun*?—I *call* it an image of the sun. I *use* it as a picture of the *sun*.

130. "It's as if we could grasp the whole use of the word in a flash." —And that is just what we say we do. That is to say: we sometimes describe what we do in these words. But there is nothing astonishing, nothing queer, about what happens. It becomes queer when we are led to think that the future development must in some way already be present in the act of grasping the use and yet isn't present.—For we say that there isn't any doubt that we understand the word . . ., and on the other hand its meaning lies in its use. There is no doubt that I now want to play *chess*, but chess is the game it is in virtue of *all its rules* (and so on). Don't I know, then, which game I wanted to play until I *have* played it? Or are all the rules contained in my act of intending? Is it experience that tells me that this sort of play usually follows this act of intention? So is it impossible for me to be certain what I am intending to do? And if that is nonsense, what kind of super-strong connexion exists between the act of intending and the thing intended? ——Where is the connexion effected between the sense of the expression "Let's play a game of chess" and all the rules of the game?—Well, in the list of rules of the game, in the teaching of it, in the day-to-day practice of playing.

131. Die logischen Gesetze sind allerdings der Ausdruck von 'Denkgewohnheiten', aber auch von der Gewohnheit *zu denken*. D.h., man kann sagen, sie zeigten: wie Menschen denken und auch, *was* Menschen "denken" nennen.

132. Frege nennt 'ein Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens': "Den Menschen ist es . . . unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen."[1]—Wenn ich denke, daß mir das unmöglich ist, so denke ich, daß ich *versuche*, es zu tun. Ich schaue also auf meine Lampe und sage: "diese Lampe ist verschieden von ihr selbst." (Aber es rührt sich nichts.) Ich sehe nicht etwa, daß es falsch ist, sondern ich kann damit garnichts anfangen. (Außer, wenn die Lampe im Sonnenlicht flimmert, dann kann ich das ganz gut durch diesen Satz ausdrücken.) Man kann sich auch in eine Art Denkkrampf versetzen, in welchem man *tut*: als versuchte man, das Unmögliche zu denken und es gelänge nicht. Ähnlich, wie man auch *tun* kann, als versuchte man (vergeblich) einen Gegenstand aus der Ferne durch bloßes Wollen an sich heran zu ziehen. (Dabei schneidet man etwa gewisse Gesichter, so, als wollte man dem Ding durch Mienen zu verstehen geben, es solle herkommen.)

133. Die Sätze der Logik sind 'Denkgesetze', 'weil sie das Wesen des menschlichen Denkens zum Ausdruck bringen'— richtiger aber: weil sie das Wesen, die Technik, des Denkens zum Ausdruck bringen, oder zeigen. Sie zeigen, was das Denken ist, und auch Arten des Denkens.

134. Denk dir diese seltsame Möglichkeit: Wir hätten uns bisher immer in der Multiplikation 12×12 verrechnet. Ja, es ist unbegreiflich, wie das geschehen konnte, aber es ist geschehen. Also ist alles falsch, was man so ausgerechnet hat!——Aber was macht es? Es macht ja garnichts!—Dann muß also etwas falsch sein in unsrer Idee von Wahrheit und Falschheit der arithmetischen Sätze.

135. Aber ist es denn unmöglich, daß ich mich in der Rechnung geirrt habe? Und wie, wenn mich ein Teufel irrt, so daß ich irgend etwas immer wieder übersehe, so oft ich auch, Schritt für Schritt nachrechne. Sodaß, wenn ich aus der Verhexung erwachte, ich sagen würde: "Ja, war ich denn blind!"—Aber welchen Unterschied macht es, wenn ich dies 'annehme'? Ich könnte dann sagen: "Ja ja, die Rechnung ist gewiß falsch—aber so rechne ich. Und das nenne ich nun addieren, und diese Zahl 'die Summe dieser beiden'."

[1] *Grundgesetze der Arithmetik* I, xviii.

131. The laws of logic are indeed the expression of 'thinking habits' but also of the habit of *thinking*. That is to say they can be said to shew: how human beings think, and also *what* human beings call "thinking".

132. Frege calls it 'a law about what men take for true' that 'It is impossible for human beings . . . to recognize an object as different from itself".[1]—When I think of this as impossible for me, then I think of *trying* to do it. So I look at my lamp and say: "This lamp is different from itself". (But nothing stirs.) It is not that I see it is false, I can't do anything with it at all. (Except when the lamp shimmers in sunlight; then I can quite well use the sentence to express that.) One can even get oneself into a thinking-cramp, in which one *does* someone trying to think the impossible and not succeeding. Just as one can also *do* someone trying (vainly) to draw an object to himself from a distance by mere willing (in doing this one makes e.g. certain faces, as if one were trying, by one's expression, to give the thing to understand that it should come here.)

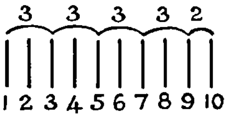
133. The propositions of logic are 'laws of thought', 'because they bring out the essence of human thinking'—to put it more correctly: because they bring out, or shew, the essence, the technique, of thinking. They shew what thinking is and also shew kinds of thinking.

134. Imagine the following queer possibility: we have always gone wrong up to now in multiplying 12 × 12. True, it is unintelligible how this can have happened, but it has happened. So everything worked out in this way is wrong!——But what does it matter? It does not matter at all!—And in that case there must be something wrong in our idea of the truth and falsity of arithmetical propositions.

135. But then, is it impossible for me to have gone wrong in my calculation? And what if a devil deceives me, so that I keep on overlooking something however often I go over the sum step by step? So that if I were to awake from the enchantment I should say: "Why, was I blind?"—But what difference does it make for me to 'assume' this? I might say: "Yes to be sure, the calculation is wrong—but that is how I calculate. And this is what I now call adding, and this 'the sum of these two numbers'."

[1] *Grundgesetze der Arithmetik* I, xviii.

136. Denke, jemand würde so behext, daß er rechnete:



also $4 \times 3 + 2 = 10$.

Nun soll er seine Rechnung anwenden. Er nimmt viermal 3 Nüsse und noch 2, und verteilt sie unter 10 Leute; und jeder erhält *eine* Nuß: denn er teilt sie, den Bögen der Rechnung entsprechend, aus und so oft er Einem eine zweite Nuß gibt, ist sie verschwunden.

137. Man könnte auch sagen: Du schreitest in dem Beweis von Satz zu Satz; aber läßt du dir auch eine Kontrolle dafür gefallen, daß du richtig gegangen bist?—Oder sagst du bloß, "Es *muß* stimmen" und mißt alles andere mit dem Satz, den du erhältst?

138. Denn, wenn es *so* ist, dann schreitest du nur von Bild zu Bild.

139. Es könnte praktisch sein, mit einem Maßstab zu messen, der die Eigenschaft hat, sich auf etwa die Hälfte seiner Länge zusammen zu ziehen, wenn er aus diesem Raum in jenen gebracht wird. Eine Eigenschaft, die ihn unter andern Verhältnissen zum Maßstab untauglich machen würde.

Es könnte praktisch sein, beim Abzählen einer Menge, unter gewissen Umständen, Ziffern auszulassen; sie abzuzählen: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

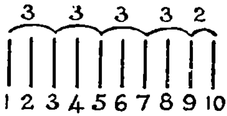
140. Was geht da vor, wenn Einer versucht, eine Figur mit ihrem Spiegelbild durch Verschieben in der Ebene zur Deckung zu bringen und es ihm nicht gelingt? Er legt sie in verschiedener Weise aufeinander; blickt auf die Teile, die sich nicht decken, ist unbefriedigt, sagt etwa: "es *muß* doch gehen", und legt die Figuren wieder anders zusammen.

Was geht vor, wenn Einer versucht, ein Gewicht aufzuheben und es ihm nicht gelingt, weil das Gewicht zu schwer ist? Er nimmt die und die Stellung ein, faßt das Gewicht an und spannt die und die Muskeln an, dann läßt er es los und gibt etwa Zeichen der Unbefriedigung.

Worin zeigt sich die geometrische, logische Unmöglichkeit der ersten Aufgabe?

"Nun er hätte doch an einem Bild oder in andrer Weise zeigen können, wie das aussieht, was er im zweiten Versuch anstrebt."—Aber er behauptet, das auch im ersten Fall zu können, indem er zwei gleiche, *kongruente*, Figuren miteinander zur Deckung bringt.—Was sollen wir

136. Imagine someone bewitched so that he calculated:



i.e. $4 \times 3 + 2 = 10$.

Now he is to apply this calculation. He takes 3 nuts four times over, and then 2 more, and he divides them among 10 people and each one gets *one* nut; for he shares them out in a way corresponding to the loops of the calculation, and as often as he gives someone a second nut it disappears.

137. One might also say: in a proof you advance from one proposition to another; but do you also accept a check on whether you have gone right?—Or do you merely say "It *must* be right" and measure everything else by the proposition you arrive at?

138. For if *that* is how it is, then you are only advancing from one picture to another.

139. It might be practical to measure with a ruler which had the property of shrinking to, say, half its length when it was taken from this room to that. A property which would make it useless as a ruler in other circumstances.

It might be practical, in certain circumstances, to leave numbers out when you were counting a set: to count them: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

140. What goes on when someone tries to make a shape coincide with its mirror-image by moving it about in the plane, and does not succeed? He puts them one on top of the other in various ways; looks at the parts that don't coincide; is dissatisfied; says perhaps: "But it *must* work", and puts the figures together again in another way.

What happens when someone tries to lift a weight and does not succeed because the weight is too heavy? He assumes such and such a posture, takes hold of the weight, tenses such and such muscles, and then lets go and perhaps shews dissatisfaction.

How does the geometrical, logical impossibility of the first task come out?

"Well, he could surely have shewn, in a picture or in some other way, what the thing he is attempting in the second case looks like." But he asserts that he can do that in the first case too by putting two similar *congruent* figures together so that they coincide.—What are we nun sagen? Daß diese beiden Fälle eben verschieden sind? Aber das sind ja auch Bild und Wirklichkeit im zweiten Fall.

141. Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen; aber nicht kuriose Beiträge, sondern Feststellungen von Fakten, an denen niemand gezweifelt hat, und die dem Bemerktwerden nur entgehen, weil sie sich ständig vor unsern Augen herumtreiben.

142. Wir lehren jemand eine Methode, Nüsse unter Leute zu verteilen; ein Teil dieser Methode ist das Multiplizieren zweier Zahlen im Dezimalsystem.

Wir lehren jemand ein Haus errichten; dabei auch, wie er sich die genügenden Mengen von Material, etwa Brettern, anschaffen soll, hiezu eine Technik des Rechnens. Die Technik des Rechnens ist ein Teil der Technik des Hausbaues.

Leute verhaufen und kaufen Scheitholz; die Stöße werden mit einem Maßstab gemessen, die Maßzahlen der Länge, Breite, Höhe multipliziert, und was dabei herauskommt, ist die Zahl der Groschen, die sie zu fordern und zu geben haben. Sie wissen nicht, 'warum' dies so geschieht, sondern sie machen es einfach so: so wird es gemacht.—Rechnen diese Leute nicht?

143. Wer so rechnet, muß er einen 'arithmetischen *Satz*' aussprechen? Wir lehren freilich die Kinder das Einmaleins in Form von *Sätzchen*, aber ist das wesentlich? Warum sollten sie nicht einfach: *rechnen lernen*? Und wenn sie es können, haben sie nicht Arithmetik gelernt?

144. Aber in welchem Verhältnis steht dann die *Begründung* eines Rechenvorgangs zu der Rechnung selbst?

145. "Ja, ich verstehe, daß dieser Satz aus diesem folgt."—Verstehe ich, *warum* er folgt, oder verstehe ich nur, *daß* er folgt?

146. Wie, wenn ich gesagt hätte: Jene Leute zahlen für's Holz *auf Grund der Rechnung*; sie lassen sich die Rechnung als Beweis dafür gefallen, daß sie soviel zu zahlen haben.—Nun, es ist einfach eine Beschreibung ihres Vorgehens (Benehmens).

147. Jene Leute—würden wir sagen—verkaufen das Holz nach dem Kubikmaß——aber haben sie darin recht? Wäre es nicht richtiger, es nach dem Gewicht zu verkaufen—oder nach der Arbeitszeit des Fällens—oder nach der Mühe des Fällens, gemessen am Alter und an

to say now? That the two examples are different? But so are the picture and the reality in the second case.

141. What we are supplying are really remarks on the natural history of man: not curiosities however, but rather observations on facts which no one has doubted and which have only gone unremarked because they are always before our eyes.

142. We teach someone a method of sharing out nuts among people; a part of this method is multiplying two numbers in the decimal system.

We teach someone to build a house; and at the same time how he is to obtain a sufficient quantity of material, boards, say; and for this purpose a technique of calculation. The technique of calculation is part of the technique of house-building.

People pile up logs and sell them, the piles are measured with a ruler, the measurements of length, breadth and height multiplied together, and what comes out is the number of pence which have to be asked and given. They do not know 'why' it happens like this; they simply do it like this: that is how it is done.—Do these people not calculate?

143. If somebody calculates like this must he utter any 'arithmetical *proposition*'? Of course, we teach children the multiplication tables in the form of little *sentences*, but is that essential? Why shouldn't they simply: *learn to calculate*? And when they can do so haven't they learnt arithmetic?

144. But in that case how is the *foundation* of a calculating procedure related to the calculation itself?

145. "Yes, I understand that this proposition follows from that."—Do I understand *why* it follows or do I only understand *that* it follows?

146. Suppose I had said: those people pay for wood on the *ground of calculation*; they accept a calculation as proof that they have to pay so much.—Well, that is simply a description of their procedure (of their behaviour).

147. Those people—we should say—sell timber by cubic measure——but are they right in doing so? Wouldn't it be more correct to sell it by weight—or by the time that it took to fell the timber—or by the labour of felling measured by the age and strength of the woodsman?

der Stärke des Holzfällers? Und warum sollten sie es nicht für einen Preis hergeben, der von alledem unabhängig ist: jeder Käufer zahlt ein und dasselbe, wieviel immer er nimmt (man hat etwa gefunden, daß man so leben kann). Und ist etwas dagegen zu sagen, daß man das Holz einfach verschenkt?

148. Gut; aber wie, wenn sie das Holz in Stöße von beliebigen, verschiedenen Höhen schlichteten und es dann zu einem Preis proportional der Grundfläche der Stöße verkauften?

Und wie, wenn sie dies sogar mit den Worten begründeten: "Ja, wer mehr Holz kauft, muß auch mehr zahlen"?

149. Wie könnte ich ihnen nun zeigen, daß—wie ich sagen würde —der nicht wirklich mehr Holz kauft, der einen Stoß von größerer Grundfläche kauft?—Ich würde z.B. einen, nach ihren Begriffen, kleinen Stoß nehmen und ihn durch Umlegen der Scheiter in einen 'großen' verwandeln. Das *könnte* sie überzeugen—vielleicht aber würden sie sagen: "ja, jetzt ist es *viel* Holz und kostet mehr"—und damit wäre es Schluß.—Wir würden in diesem Falle wohl sagen: sie meinen mit "viel Holz" und "wenig Holz" einfach nicht das Gleiche, wie wir; und sie haben ein ganz anderes System der Bezahlung, als wir.

150. (Eine Gesellschaft, die so handelt, würde uns vielleicht an die "Klugen Leute" in dem Märchen erinnern.)

151. Frege sagt im Vorwort der "Grundgesetze der Arithmetik": ". . . hier haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit"—aber er hat nie angegeben, wie diese 'Verrücktheit' wirklich aussehen würde.

152. Worin besteht die Übereinstimmung der Menschen bezüglich der Anerkennung einer Struktur als Beweis? Darin, daß sie Worte als *Sprache* gebrauchen? Als das, was wir "Sprache" nennen.

Denke dir Menschen, die Geld im Verkehr gebrauchten, nämlich Münzen, die so aussehen wie unsere Münzen, aus Gold oder Silber sind und geprägt; und sie geben sie auch für Waren her——aber jeder gibt für die Waren, was ihm gerade gefällt und der Kaufmann gibt dem Kunden nicht mehr, oder weniger, je nachdem er bezahlt; kurz, dies Geld, oder was so aussieht, spielt bei ihnen eine ganz andere Rolle als bei uns. Wir würden uns diesen Leuten viel weniger verwandt fühlen, als solchen, die noch gar kein Geld kennen und eine primitive Art des Tauschhandels treiben.—"Aber die Münzen dieser Leute werden doch auch einen Zweck haben!"—Hat denn alles, was man tut, einen Zweck? Etwa religiöse Handlungen—.

And why should they not hand it over for a price which is independent of all this: each buyer pays the same however much he takes (they have found it possible to live like that). And is there anything to be said against simply giving the wood away?

148. Very well; but what if they piled the timber in heaps of arbitrary, varying height and then sold it at a price proportionate to the area covered by the piles?

And what if they even justified this with the words: "Of course, if you buy more timber, you must pay more"?

149. How could I shew them that—as I should say—you don't really buy more wood if you buy a pile covering a bigger area?—I should, for instance, take a pile which was small by their ideas and, by laying the logs around, change it into a 'big' one. This *might* convince them—but perhaps they would say: "Yes, now it's a *lot* of wood and costs more"—and that would be the end of the matter.—We should presumably say in this case: they simply do not mean the same by "a lot of wood" and "a little wood" as we do; and they have a quite different system of payment from us.

150. (A society acting in this way would perhaps remind us of the Wise Men of Gotham.)

151. Frege says in the preface to the *Grundgesetze der Arithmetik*: ". . . here we have a hitherto unknown kind of insanity"—but he never said what this 'insanity' would really be like.

152. What does people's agreement about accepting a structure as a proof consist in? In the fact that they use words as *language*? As what we call "language".

Imagine people who used money in transactions; that is to say coins, looking like our coins, which are made of gold and silver and stamped and are also handed over for goods——but each person gives just what he pleases for the goods, and the merchant does not give the customer more or less according to what he pays. In short this money, or what looks like money, has among them a quite different role from among us. We should feel much less akin to these people than to people who are not yet acquainted with money at all and practise a primitive kind of barter.—"But these people's coins will surely also have some purpose!"—Then has everything that one does a purpose? Say religious actions—.

Es ist schon möglich, daß wir geneigt wären, Menschen, die sich so benehmen, Verrückte zu nennen. Aber doch nennen wir nicht alle die Verrückte, die in den Formen unserer Kultur ähnlich handeln, Worte 'zwecklos' verwenden. (Denke an die Krönung eines Königs!)

153. Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozeß, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, daß diese Zahl herauskommt, vermerken—welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiß nicht: 'was herauskommen *soll*'.

154. Wäre es möglich, daß Leute heute eine unsrer Berechnungen durchgingen und von den Schlüssen befriedigt wären, morgen aber ganz andre Schlüsse ziehen wollen, und einen andern Tag wieder andere?

Ja, kann man sich nicht denken, daß dies mit einer *Gesetzmäßigkeit* so geschehe; daß, wenn er einmal *diesen* Übergang macht, er '*eben darum*' das nächste Mal einen andern macht, und darum (etwa) das nächste Mal wieder den ersten? (Ähnlich, wie wenn in einer Sprache die Farbe, die einmal "rot" genannt wird, darum beim nächsten Male anders genannt würde und beim übernächsten wieder "rot", u.s.f.; dies könnte Menschen so natürlich sein. Man könnte es ein Bedürfnis nach Abwechslung nennen.)

[*Randbemerkung*. Sind unsre Schlußgesetze ewig und unveränderlich?]

155. Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse.

Das heißt wohl: solange *das und das gar nicht in Frage gezogen wird*.

Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum *nicht* in Frage, weil sie 'sicher der Wahrheit entsprechen'—oder dergl.—sondern, dies ist es eben, was man 'Denken', 'Sprechen', 'Schließen', 'Argumentieren', nennt. Es handelt sich hier garnicht um irgendeine Entsprechung des Gesagten mit der Realität; vielmehr ist die Logik *vor* einer solchen Entsprechung; nämlich in dem Sinne, in welchem die Festlegung der Meßmethode *vor* der Richtigkeit oder Falschheit einer Längenangabe.

156. Wird es nun experimentell festgestellt, ob sich ein Satz aus dem andern ableiten läßt?—Es scheint, ja! Denn ich schreibe gewisse Zeichenfolgen hin, richte mich dabei nach gewissen Paradigmen—dabei ist es allerdings wesentlich, daß ich kein Zeichen übersehe, oder daß es sonstwie abhanden kommt—und was bei diesem Vorgang entsteht, davon sage ich, es folge.——Dagegen ist ein Argument dies: Wenn 2 und 2 Äpfel nur 3 Äpfel geben, d.h., wenn 3 Äpfel daliegen, nachdem

It is perfectly possible that we should be inclined to call people who behaved like this insane. And yet we don't call everyone insane who acts similarly within the forms of our culture, who uses words 'without purpose'. (Think of the coronation of a King.)

153. Perspicuity is part of proof. If the process by means of which I get a result were not surveyable, I might indeed make a note that this number is what comes out—but what fact is this supposed to confirm for me? I don't know 'what is *supposed* to come out'.

154. Would it be possible that people should go through one of our calculations to-day and be satisfied with the conclusions, but to-morrow want to draw quite different conclusions, and other ones again on another day?

Why, isn't it imaginable that it should *regularly* happen like that: that when we make *this* transition one time, the next time, '*just for that reason*', we make a different one, and therefore (say) the next time the first one again? (As if in some language the colour which is called "red" one time is for that reason called another name the next time, and "red" again the next time after that and so on; people might find this natural. It might be called a need for variety.)

[*Note in margin:* Are our laws of inference eternal and immutable?]

155. Isn't it like this: so long as one thinks it can't be otherwise, one draws logical conclusions. This presumably means: so long as *such-and-such is not brought in question at all.*

The steps which are not brought in question are logical inferences. But the reason why they are not brought in question is not that they 'certainly correspond to the truth'—or something of the sort,—no, it is just this that is called 'thinking', 'speaking', 'inferring', 'arguing'. There is not any question at all here of some correspondence between what is said and reality; rather is logic *antecedent* to any such correspondence; in the same sense, that is, as that in which the establishment of a method of measurement is *antecedent* to the correctness or incorrectness of a statement of length.

156. Is it experimentally settled whether one proposition can be derived from another?—It looks as if it were. For I write down certain sequences of signs, am guided in doing so by certain paradigms —in doing which it is indeed essential that no sign should get overlooked or otherwise lost—and of what I get in this procedure I say: it follows.——One argument against this is: If 2 and 2 apples add

ich zwei und wieder zwei hingelegt habe, sage ich nun nicht: "$2 + 2$ ist also doch nicht immer 4"; sondern: "Einer muß irgendwie weggekommen sein".

157. Aber inwiefern mache ich ein Experiment, wenn ich dem schon hingeschriebenen Beweis nur *folge*? Man könnte sagen: "Wenn du diese Kette von Umformungen ansiehst,—*kommt es dir nicht auch so vor, als stimmten sie* mit den Paradigmen?"

158. Wenn das also ein Experiment genannt werden soll, dann wohl ein psychologisches.—Der Anschein des Stimmens kann ja auf einer Sinnestäuschung beruhen. Und so ist es ja auch manchmal, wenn wir uns verrechnen.

Man sagt auch: "Das kommt mir heraus." Und es ist doch wohl ein Experiment, das zeigt, daß dies *mir* herauskommt.

159. Man könnte sagen: Das Resultat des Experiments ist dies, daß ich, am Ende, beim Resultat des Beweises angelangt, mit Überzeugung sage: "Ja, es stimmt."

160. Ist eine Berechnung ein Experiment?—Ist es ein Experiment, wenn ich morgens aus dem Bett steige? Aber könnte dies nicht ein Experiment sein,—welches zeigen soll, ob ich nach so und soviel Stunden Schlafes die Kraft habe, mich zu erheben?

Und was fehlt dieser Handlung dazu, dies Experiment zu sein?—Bloß, daß sie nicht zu diesem Zwecke, d.h., in der Verbindung mit einer solchen Untersuchung ausgeführt wird. *Experiment* ist etwas durch den Gebrauch, der davon gemacht wird.

Ist ein Experiment, in welchem wir die Beschleunigung beim freien Fall beobachten, ein physikalisches Experiment, oder ist es ein psychologisches, das zeigt, was Menschen, unter solchen Umständen, sehen? ——Kann es nicht beides sein? Hängt das nicht von seiner *Umgebung* ab: von dem, was wir damit machen, darüber sagen?

161. Wenn man einen Beweis als Experiment auffaßt, so ist das Resultat des Experiments jedenfalls nicht das, was man das Resultat des Beweises nennt. Das Resultat der Rechnung ist der Satz, mit welchem sie abschließt; das Resultat des Experiments ist: daß ich von diesen Sätzen durch diese Regeln zu diesem Satz geführt wurde.

162. Aber nicht daran haftet unser Interesse, daß die und die (oder alle) Menschen von diesen Regeln so geleitet worden sind (oder so gegangen sind); es gilt uns als selbstverständlich, daß die Menschen—'wenn sie richtig denken können'—*so* gehen. Wir haben jetzt aber einen *Weg* erhalten, sozusagen durch die Fußtapfen derer, die so

up to only 3 apples, i.e. if there are 3 apples there after I have put down two and again two, I don't say: "So after all 2 + 2 are not always 4"; but "Somehow one must have gone".

157. But how am I making an experiment when I merely *follow* a proof which has already been written out? It might be said: "When you look at this chain of transformations,—*don't they strike you as being in agreement* with the paradigms?".

158. So if this is to be called an experiment it is presumably a psychological one. For the appearance of agreement may of course be founded on sense-deception. And so it sometimes is when we make a slip in calculating.

One also says: "This is my result". And what shews that this is *my* result is presumably an experiment.

159. One might say: the result of the experiment is that at the end, having reached the result of the proof, I say with conviction: "Yes, that's right".

160. Is a calculation an experiment?—Is it an experiment for me to get out of bed in the morning? But might it not be an experiment,—to shew whether I have the strength to raise myself up after so and so many hours' sleep?

And how does the action fall short of being this experiment?—Merely by not being carried out with this purpose, i.e. in connexion with an investigation of this kind. It is the use that is made of something that turns it into an experiment.

Is an experiment in which we observe the acceleration of a freely falling body a physical experiment, or is it a psychological one shewing what people see in such circumstances?—Can't it be either? Doesn't it depend on its *surroundings*: on what we do with it, say about it?

161. If a proof is conceived as an experiment, at any rate the result of the experiment is not what is called the result of the proof. The result of the calculation is the proposition with which it concludes; the result of the experiment is that from these propositions, by means of these rules, I was led to this proposition.

162. But our interest does not attach to the fact that such-and-such (or all) human beings have been led this way by these rules (or have gone this way); we take it as a matter of course that people—'if they can think correctly'—go *this* way. We have now been given a *road*, as

gegangen sind. Und auf diesem Weg geht nun der Verkehr vor sich —zu verschiedenen Zwecken.

163. Erfahrung lehrt mich freilich, wie die Rechnung ausgeht; aber damit erkenne ich sie noch nicht an.

164. Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß das diesmal herausgekommen ist, daß es für gewöhnlich herauskommt; aber sagt das der Satz der Mathematik? Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß ich diesen Weg gegangen bin. Aber ist *das* die mathematische Aussage?—Was sagt er aber? In welchem Verhältnis steht er zu diesen Erfahrungssätzen? Der mathematische Satz hat die Würde einer Regel.

Das ist wahr daran, daß Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung.

(Mathematik unter den Urmaßen niedergelegt.)

165. Aber wie—, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*?—Sie schafft immer neue und neue Regeln: baut immer neue Straßen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

166. Aber bedarf sie denn dazu nicht einer Sanktion? Kann sie das Netz denn *beliebig* weiterführen? Nun, ich könnte ja sagen: der Mathematiker erfindet immer neue Darstellungsformen. Die einen, angeregt durch praktische Bedürfnisse, andre aus ästhetischen Bedürfnissen,—und noch mancherlei anderen. Und denke dir hier einen Gartenarchitekten, der Wege für eine Gartenanlage entwirft; es kann wohl sein, daß er sie bloß als ornamentale Bänder auf dem Reißbrett zieht und garnicht daran denkt, daß jemand einmal auf ihnen gehen wird.

167. Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker.

168. Erfahrung lehrt, daß beim Auszählen, wenn wir die Finger einer Hand brauchen, oder irgend eine Gruppe von Dingen, die so | | | | | ausschaut, und an ihnen abzählen: Ich, Du, Ich, Du, etc., das erste Wort auch das letzte ist. "Aber *muß* es denn nicht so sein?"—— Ist es denn so unvorstellbar, daß Einer die Gruppe | | | | | (z.B.) als Gruppe | | || | | sieht, in der die beiden Mittelstriche verschmolzen sind und dementsprechend den Mittelstrich zweimal zählt? (Ja, das Gewöhnliche ist es nicht.—)

169. Wie aber ist es, wenn ich Einen erst darauf aufmerksam mache, daß das Ergebnis des Auszählens durch den Anfang vorausbestimmt ist, und er es nun versteht und sagt: "Ja freilich,—es muß

it were by means of the footsteps of those who have gone this way. And the traffic now proceeds on this road—to various purposes.

163. Certainly experience tells me how the calculation comes out; but that is not all there is to my accepting it.

164. I learned empirically that this came out this time, that it usually does come out; but does the proposition of mathematics say that? I learned empirically that this is the road I travelled. But is *that* the mathematical statement?—What does it say, though? What relation has it to these empirical propositions? The mathematical proposition has the dignity of a rule.

So much is true about saying that mathematics is logic: its movement is within the rules of our language. And this gives it its peculiar solidity, its unassailable position, set apart.

(Mathematics deposited among the standard measures.)

165. What, then—does it just twist and turn about within these rules?—It forms ever new rules: is always building new roads for traffic; by extending the network of the old ones.

166. But then doesn't it need a sanction for this? Can it extend the network *arbitrarily*? Well, I could say: a mathematician is always inventing new forms of description. Some, stimulated by practical needs, others, from aesthetic needs,—and yet others in a variety of ways. And here imagine a landscape gardener designing paths for the layout of a garden; it may well be that he draws them on a drawing-board merely as ornamental strips without the slightest thought of someone's sometime walking on them.

167. The mathematician is an inventor, not a discoverer.

168. We know by experience that when we count anything off on the fingers of one hand, or on some group of things that looks like this | | | | |, and say: I, you, I, you, etc., the first word is also the last. "But doesn't it *have* to be like that, then?"——Well, is it unimaginable for someone to see the group | | | | | (e.g.) as the group | | || | | with the two middle strokes fused, and should accordingly count the middle stroke twice? (True, it is not the usual case.—)

169. But how about when I draw someone's attention for the first time to the fact that the result of counting off is determined in advance by the beginning, and he understands and says: "Yes, of course,—

ja so sein." Was ist das für eine Erkenntnis?—Er hat sich etwa das Schema aufgezeichnet:

```
I D I D I
| | | | |
```

Und sein Raisonnement ist etwa: "Es ist doch *so*, wenn ich auszähle.— Also muß. . . ."

that's how it has to be". What sort of knowledge is this?—He e.g. drew himself the schema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{Y} & \mathrm{I} & \mathrm{Y} & \mathrm{I} \\ | & | & | & | & | \end{array}$$

and his reasoning is e.g.: "*That*'s what it's like when I count off.—So it has to. . . ."

ANHANG I

1. Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z.B., entsprechend unserem: "Ich möchte wissen, ob . . ." und "Ich wünsche, daß . . .".

Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draußen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, "ich wünsche zu wissen, ob . . .", zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet wird?—

2. Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze.

Und—sagst du—diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Characteristikum des Schachspiels, daß es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und daß der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach in gewissem Sinne sehr verwandtes Spiel geben, das darin besteht, daß man die Schachzüge macht, aber ohne daß es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.

3. Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag ('Annahme') und dem Befehlen des Vorgeschlagenen.

4. Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische *Sätze* auszusprechen, und ohne daß uns die Ähnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele?

Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet?—Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn unser Hund z.B. sich nicht so benimmt, wie wir es wünschen.

Wir sind gewohnt, zu sagen "2 mal 2 ist 4" und das Verbum "ist" macht dies zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandschaft her mit allem, was wir 'Satz' nennen. Während es sich nur um eine sehr oberflächliche Beziehung handelt.

APPENDIX I

1. It is easy to think of a language in which there is not a form for questions, or commands, but question and command are expressed in the form of statements, e.g. in forms corresponding to our: "I should like to know if . . ." and "My wish is that . . .".

No one would say of a question (e.g. whether it is raining outside) that it was true or false. Of course it is English to say so of such a sentence as "I want to know whether . . .". But suppose this form were always used instead of the question?—

2. The great majority of sentences that we speak, write and read, are statement sentences.

And—you say—these sentences are true or false. Or, as I might also say, the game of truth-functions is played with them. For assertion is not something that gets added to the proposition, but an essential feature of the game we play with it. Comparable, say, to that characteristic of chess by which there is winning and losing in it, the winner being the one who takes the other's king. Of course, there could be a game in a certain sense very near akin to chess, consisting in making the chess moves, but without there being any winning and losing in it; or with different conditions for winning.

3. Imagine it were said: A command consists of a proposal ('assumption') and the commanding of the thing proposed.

4. Might we not do arithmetic without having the idea of uttering arithmetical *propositions*, and without ever having been struck by the similarity between a multiplication and a proposition?

Should we not shake our heads, though, when someone shewed us a multiplication done wrong, as we do when someone tells us it is raining, if it is not raining?—Yes; and here is a point of connexion. But we also make gestures to stop our dog, e.g. when he behaves as we do not wish.

We are used to saying "2 times 2 is 4", and the verb "is" makes this into a proposition, and apparently establishes a close kinship with everything that we call a 'proposition'. Whereas it is a matter only of a very superficial relationship.

5. Gibt es wahre Sätze in Russell's System, die nicht in seinem System zu beweisen sind?—Was nennt man denn einen wahren Satz in Russell's System?

6. Was heißt denn, ein Satz '*ist wahr*'? '*p*' *ist wahr* = *p*. (Dies ist die Antwort.)

Man will also etwa fragen: unter welchen Umständen behauptet man einen Satz? Oder: wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht? Und die 'Behauptung des Satzes' ist hier entgegengesetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung,—oder als *Teil* eines andern Satzes, u. dergl..

Fragt man also in diesem Sinne: "Unter welchen Umständen behauptet man in Russell's Spiel einen Satz?", so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als 'Grundgesetz' (Pp.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russellschen Symbolen nicht verwendet.

7. "Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russell's nicht beweisbar?"—'Wahre Sätze', das sind also Sätze, die in einem *andern* System wahr sind, d.h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiß; warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze—der Physik, z.B.—in Russell's Symbolen anschreiben? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind?—Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklids System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind. Können nicht Dreiecke—in einem andern System—ähnlich (*sehr* ähnlich) sein, die nicht gleiche Winkel haben?—"Aber das ist doch ein Witz! Sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander 'ähnlich'!"—Freilich nicht; und ein Satz, der nicht in Russell's System zu beweisen ist, ist in anderm Sinne 'wahr' oder 'falsch', als ein Satz der "Principia Mathematica".

8. Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: "Ich habe einen Satz (ich will ihn mit '*P*' bezeichnen) in Russell's Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, daß er sagt: '*P* ist nicht in Russell's System beweisbar'. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist. So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein."

5. Are there true propositions in Russell's system, which cannot be proved in his system?—What is called a true proposition in Russell's system, then?

6. For what does a proposition's '*being true*' mean? '*p*' *is true* $= p$. (That is the answer.)

So we want to ask something like: under what circumstances do we assert a proposition? Or: how is the assertion of the proposition used in the language-game? And the 'assertion of the proposition' is here contrasted with the utterance of the sentence e.g. as practice in elocution,—or as *part* of another proposition, and so on.

If, then, we ask in this sense: "Under what circumstances is a proposition asserted in Russell's game?" the answer is: at the end of one of his proofs, or as a 'fundamental law' (Pp.). There is no other way in this system of employing asserted propositions in Russell's symbolism.

7. "But may there not be true propositions which are written in this symbolism, but are not provable in Russell's system?"—'True propositions', hence propositions which are true in *another* system, i.e. can rightly be asserted in another game. Certainly; why should there not be such propositions; or rather: why should not propositions —of physics, e.g.—be written in Russell's symbolism? The question is quite analogous to: Can there be true propositions in the language of Euclid, which are not provable in his system, but are true?—Why, there are even propositions which are provable in Euclid's system, but are *false* in another system. May not triangles be—in another system— similar (*very* similar) which do not have equal angles?—"But that's just a joke! For in that case they are not 'similar' to one another in the same sense!"—Of course not; and a proposition which cannot be proved in Russell's system is "true" or "false" in a different sense from a proposition of *Principia Mathematica*.

8. I imagine someone asking my advice; he says: "I have constructed a proposition (I will use '*P*' to designate it) in Russell's symbolism, and by means of certain definitions and transformations it can be so interpreted that it says: '*P* is not provable in Russell's system'. Must I not say that this proposition on the one hand is true, and on the other hand is unprovable? For suppose it were false; then it is true that it is provable. And that surely cannot be! And if it is proved, then it is proved that it is not provable. Thus it can only be true, but unprovable."

So wie wir fragen: "in welchem System 'beweisbar'?", so müssen wir auch fragen: "in welchem System 'wahr'?". 'In Russell's System wahr' heißt, wie gesagt: in Russell's System bewiesen; und 'in Russell's System falsch' heißt: das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen.—Was heißt nun dein: "angenommen, er sei falsch"? *In Russell's Sinne* heißt es: 'angenommen das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen'; *ist das deine Annahme*, so wirst du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesem deutschen Satz.—Nimmst du an, der Satz sei in Russell's System beweisbar, so ist er damit *in Russell's Sinne* wahr und die Deutung "*P* ist nicht beweisbar" ist wieder aufzugeben. Nimmst du an, der Satz sei in Russell's Sinne wahr, so folgt das *Gleiche*. Ferner: soll der Satz in einem andern als Russell's Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, daß er in Russell's System bewiesen ist. (Was im Schach "verlieren" heißt, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.)

9. Was heißt es denn: *P* und "*P* ist unbeweisbar" seien der gleiche Satz? Es heißt, daß diese *zwei* deutschen Sätze in der und der Notation *einen* Ausdruck haben.

10. "Aber *P* kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen, er sei nicht beweisbar." Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte—vielleicht durch Irrtum—ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung "*unbeweisbar*" wieder zurückziehen?

11. Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russell's System) von *P*; so habe ich mit diesem Beweis *P* bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russell's System wäre,—dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen.—Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet.—Aber hier ist ja ein Widerspruch!—Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?

12. Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: "Ich lüge.—Also lüge ich nicht.—Also lüge ich.—etc."? Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, daß man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wider ihn folgern kann?—der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun?—Es ist eine brotlose Kunst!—Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.

Just as we ask: " 'provable' in what system?", so we must also ask: " 'true' in what system?" 'True in Russell's system' means, as was said: proved in Russell's system; and 'false in Russell's system' means: the opposite has been proved in Russell's system.—Now what does your "suppose it is false" mean? *In the Russell sense* it means 'suppose the opposite is proved in Russell's system'; *if that is your assumption*, you will now presumably give up the interpretation that it is unprovable. And by 'this interpretation' I understand the translation into this English sentence.—If you assume that the proposition is provable in Russell's system, that means it is true *in the Russell sense*, and the interpretation "*P* is not provable" again has to be given up. If you assume that the proposition is true in the Russell sense, *the same* thing follows. Further: if the proposition is supposed to be false in some other than the Russell sense, then it does not contradict this for it to be proved in Russell's system. (What is called "losing" in chess may constitute winning in another game.)

9. For what does it mean to say that *P* and "*P* is unprovable" are the same proposition? It means that these *two* English sentences have a *single* expression in such-and-such a notation.

10. "But surely *P* cannot be provable, for, supposing it were proved, then the proposition that it is not provable would be proved." But if this were now proved, or if I believed—perhaps through an error—that I had proved it, why should I not let the proof stand and say I must withdraw my interpretation "*unprovable*"?

11. Let us suppose I prove the unprovability (in Russell's system) of *P*; then by this proof I have proved *P*. Now if this proof were one in Russell's system—I should in that case have proved at once that it belonged and did not belong to Russell's system.—That is what comes of making up such sentences.—But there is a contradiction here!—Well, then there is a contradiction here. Does it do any harm here?

12. Is there harm in the contradiction that arises when someone says: "I am lying.—So I am not lying.—So I am lying.—etc."? I mean: does it make our language less usable if in this case, according to the ordinary rules, a proposition yields its contradictory, and vice versa?—the proposition *itself* is unusable, and these inferences equally; but why should they not be made?—It is a profitless performance!—It is a language-game with some similarity to the game of thumb-catching.

13. Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, daß er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

14. Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, daß die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: "Bemüh' dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilung des Winkels, etwa) zu finden,—man kann beweisen, daß es nicht geht." Das heißt: es ist wesentlich, daß sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muß—könnte man sagen—für uns ein *triftiger Grund* sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben.

Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

15. Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird "*X* ist unbeweisbar", hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen 'Sinn'.

Es ist also die Frage ob der 'Beweis der Unbeweisbarkeit von *P*' hier ein triftiger Grund ist zur Annahme daß ein Beweis von *P* nicht gefunden werden wird.

16. Der Satz "*P* ist unbeweisbar" hat einen andern Sinn, nachdem —als ehe er bewiesen ist.

Ist er bewiesen, so ist er die Schlußfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises.—Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist—kann man sagen—noch verschleiert.

17. Wie, soll ich nun annehmen, ist *P* bewiesen? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis? Oder auf eine andere Weise? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, *was* bewiesen ist, schau an den Beweis! Vielleicht ist hier bewiesen, daß die und die Form des Beweises nicht zu *P* führt.—Oder, es sei *P* auf eine direkte Art bewiesen—wie ich einmal sagen will—, dann folgt also der Satz "*P* ist unbeweisbar", und es muß sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von *P* mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei.

Angenommen aber, nicht-*P* sei bewiesen.—*Wie* bewiesen? Etwa

13. Such a contradiction is of interest only because it has tormented people, and because this shews both how tormenting problems can grow out of language, and what kind of things can torment us.

14. A proof of unprovability is as it were a geometrical proof; a proof concerning the geometry of proofs. Quite analogous e.g. to a proof that such-and-such a construction is impossible with ruler and compass. Now such a proof contains an element of prediction, a physical element. For in consequence of such a proof we say to a man: "Don't exert yourself to find a construction (of the trisection of an angle, say)—it can be proved that it can't be done". That is to say: it is essential that the proof of unprovability should be capable of being applied in this way. It must—we might say—be a *forcible reason* for giving up the search for a proof (i.e. for a construction of such-and-such a kind).

A contradiction is unusable as such a prediction.

15. Whether something is rightly called the proposition "*X* is unprovable" depends on how we prove this proposition. The proof alone shews what counts as the criterion of unprovability. The proof is part of the system of operations, of the game, in which the proposition is used, and shews us its 'sense'.

Thus the question is whether the 'proof of the unprovability of *P*' is here a forcible reason for the assumption that a proof of *P* will not be found.

16. The proposition "*P* is unprovable" has a different sense afterwards—from before it was proved.

If it is proved, then it is the terminal pattern in the proof of unprovability.—If it is unproved, then *what* is to count as a criterion of its truth is not yet *clear*, and—we can say—its sense is still veiled.

17. Now how am I to take *P* as having been proved? By a proof of unprovability? Or in some other way? Suppose it is by a proof of unprovability. Now, in order to see *what* has been proved, look at the proof. Perhaps it has here been proved that such-and-such forms of proof do not lead to *P*.—Or, suppose *P* has been proved in a direct way—as I should like to put it—and so in that case there follows the proposition "*P* is unprovable", and it must now come out how this interpretation of the symbols of *P* collides with the fact of the proof, and why it has to be given up here.

Suppose however that not-*P* is proved.—Proved *how*? Say by *P*'s dadurch, daß *P* direkt bewiesen ist—denn daraus folgt, daß es beweisbar ist, also nicht-*P*. Was soll ich nun aussagen: "*P*", oder "nicht-*P*"? Warum nicht beides? Wenn mich jemand fragt: "Was ist der Fall—*P*, oder nicht-*P*?", so antworte ich: *P* steht am Ende eines Russell'schen Beweises, du schreibst also im Russell'schen System: *P*; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch nicht-*P* aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russell'schen Beweises, gehört also nicht zum Russell'schen System.—Als die Deutung "*P* ist unbeweisbar" für *P* gegeben wurde, da kannte man ja diesen Beweis für *P* nicht und man kann also nicht sagen, *P* sage: *dieser* Beweis existierte nicht.—Ist der Beweis hergestellt, so ist damit eine *neue Lage* geschaffen: Und wir haben nun zu entscheiden, ob wir *dies* einen Beweis (*noch* einen Beweis), oder ob wir *dies* noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen.

Angenommen nicht-*P* sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, daß sich *P* direkt beweisen läßt! Das ist also wieder eine Frage der Deutung —es sei denn, daß wir nun auch einen direkten Beweis von *P* haben. Wäre es nun so, nun, so wäre es so.—

(Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

18. "Aber angenommen, der Satz wäre nun *falsch*—und daher beweisbar!—"Warum nennst du ihn 'falsch'? Weil du einen Beweis siehst?—Oder aus andern Gründen? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z.B., daß wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten: "Ja, und nein". Und desgleichen den Satz '$\sim\sim p = p$': weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine *Verstärkung* der Verneinung verwenden und nicht bloß als ihre Aufhebung.

19. Du sagst: " . . ., also ist *P* wahr und unbeweisbar." Das heißt wohl: "Also P". Von mir aus—aber zu welchem Zweck schreibst du diese 'Behauptung' hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlößchen im Barockstile.) Und wie könntest du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen?

20. Man muß sich hier daran erinnern, daß die Sätze der Logik so konstruiert sind, daß sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht *Sätze*; und

being proved directly—for from that follows that it is provable, and hence not-P. What am I to say now, "P" or "not-P"? Why not both? If someone asks me "Which is the case, P, or not-P?" then I reply: P stands at the end of a Russellian proof, so you write P in the Russellian system; on the other hand, however, it is then provable and this is expressed by not-P, but this proposition does not stand at the end of a Russellian proof, and so does not belong to the Russellian system. ——When the interpretation "P is unprovable" was given to P, this proof of P was not known, and so one cannot say that P says: *this* proof did not exist.——Once the proof has been constructed, this has created a *new situation*: and now we have to decide whether we will call *this* a proof (a *further* proof), or whether we will still call *this* the statement of unprovability.

Suppose not-P is directly proved; it is therefore proved that P can be directly proved! So this is once more a question of interpretation—unless we now also have a direct proof of P. If it were like that, well, that is how it would be.

(The superstitious fear and awe of mathematicians in face of contradiction.)

18. "But suppose, now, that the proposition were *false*—and hence provable?"—Why do you call it 'false'? Because you can see a proof?—Or for other reasons? For in that case it doesn't matter. For one can quite well call the Law of Contradiction false, on the grounds that we very often make good sense by answering a question "Yes and no". And the same for the proposition '$\sim\sim p = p$' because we employ double negation as a *strengthening* of the negation and not merely as its cancellation.

19. You say: ". . ., so P is true and unprovable". That presumably means: "Therefore P". That is all right with me——but for what purpose do you write down this 'assertion'? (It is as if someone had extracted from certain principles about natural forms and architectural style the idea that on Mount Everest, where no one can live, there belonged a châlet in the Baroque style. And how could you make the truth of the assertion plausible to me, since you can make no use of it except to do these bits of legerdemain?

20. Here one needs to remember that the propositions of logic are so constructed as to have *no* application as *information* in practice. So it could very well be said that they were not *propositions* at all; and one's

daß man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen 'Sätzen' nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.

ANHANG II

1. Wenn einem auf die Aufforderung: "Zeige mir eine Zahl, die von allen diesen verschieden ist", die Diagonalregel zur Antwort gegeben wird, warum soll er nicht sagen: "Aber so hab ich's ja nicht gemeint!"? Was du mir gegeben hast, ist eine Regel, Zahlen successive herzustellen, die von jeder von diesen nach der Reihe verschieden sind.

"Aber warum willst du das nicht auch eine Methode nennen, eine Zahl zu kalkulieren?"—Aber was ist hier die Methode des Kalkulierens und was das Kalkulierte? Du wirst sagen, sie seien *eins*, denn es hat nun Sinn zu sagen: die Zahl *D* ist größer als . . . und kleiner als . . .; man kann sie quadrieren etc. etc..

Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*? Ja, das klingt sonderbar.—Aber es heißt eben: In welcher mathematischen Umgebung steht sie?

Es heißt hier immer: Blicke *weiter* um dich!

Das Resultat einer Kalkulation in der Wortsprache ausgedrückt, ist mit Mißtrauen zu betrachten. Die *Rechnung* beleuchtet die Bedeutung des Wortausdrucks. Sie ist das *feinere* Instrument zur Bestimmung der Bedeutung. Willst du wissen, was der Wortausdruck bedeutet, so schau auf die Rechnung; nicht umgekehrt. Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung: die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck. (Als wolltest du die Höhen zweier Berge nicht durch Höhenmessung vergleichen sondern durch ihr scheinbares Verhältnis, wenn man sie von unten anschaut.)

2. Wozu läßt sich der Begriff 'unabzählbar' verwenden?

Man könnte doch sagen—wenn Einer tagaus tagein versuchte 'alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen': "Laß das! es heißt nichts; siehst du nicht: wenn du eine Reihe aufgestellt hättest, so käme ich dir mit der Diagonalreihe!" Das könnte ihn von seinem Unternehmen writing them down at all stands in need of justification. Now if we append to these 'propositions' a further sentence-like structure of another kind, then we are all the more in the dark about what kind of application this system of sign-combinations is supposed to have; for the mere *ring of a sentence* is not enough to give these connexions of signs any meaning.

APPENDIX II

1. If someone says: "Shew me a number different from all these", and is given the diagonal rule for answer, why should he not say: "But I didn't mean it like that!"? What you have given me is a rule for the step-by-step construction of numbers that are different from each of these successively.

"But why aren't you willing to call this too a method of calculating a number?"—But what is the method of calculating and what the result here? You will say that they are *one*, for it makes sense now to say: the number D is bigger than . . . and smaller than . . .; it can be squared etc. etc..

Is the question not really: What can this number be *used* for? True, that sounds queer.—But what it means is: what are its mathematical surroundings?

The motto here is: Take a *wider* look round.

The result of a calculation expressed verbally is to be regarded with suspicion. The *calculation* illumines the meaning of the expression in words. It is the *finer* instrument for determining the meaning. If you want to know what the verbal expression means, look at the calculation; not the other way about. The verbal expression casts only a dim general glow over the calculation: but the calculation a brilliant light on the verbal expression. (As if you wanted to compare the heights of two mountains not by the technique of measurement of heights but by their apparent relation when looked at from below.)

2. What can the concept 'non-denumerable' be used for?

Now—if someone tried day-in day-out 'to put all irrational numbers into a series' we could say: "Leave it alone; it means nothing; don't you see, if you established a series, I should come along with the diagonal series!" This might get him to abandon his undertaking.

abbringen. Nun, das wäre ein Nutzen. Und mir kommt vor, das wäre auch der ganze und eigentliche Zweck dieser Methode. Sie bedient sich des vagen Begriffes dieses Menschen, der gleichsam idiotisch drauflos arbeitet und bringt ihn durch ein Bild zur Ruhe. (Man könnte ihn aber durch ein andres Bild auch wieder zur Weiterführung seines Unternehmens bringen.)

Das Verfahren führt etwas vor,—was man auf sehr vage Weise die Demonstration davon nennen kann, daß sich *diese* Rechnungsmethoden nicht in eine Reihe ordnen lassen. Und die Bedeutung des "*diese*" ist hier eben vag gehalten.

Ein gescheiter Mann hat sich in diesem Sprachnetz gefangen! Also muß es ein interessantes Sprachnetz sein.

Der Fehler beginnt damit, daß man sagt, die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen. Welchen Begriff hat man denn von diesem Ordnen? Ja, man hat natürlich einen von einer unendlichen Reihe, aber das gibt uns ja hier höchstens eine vage Idee, einen Leitstern für die Bildung eines Begriffs. Der Begriff selbst ist ja von dieser und einigen andern Reihen *abstrahiert*; oder: der Ausdruck bezeichnet eine gewisse Analogie von Fällen, und man kann ihn etwa dazu benützen, um ein Gebiet, von dem man reden will, vorläufig abzugrenzen.

Damit ist aber nicht gesagt, daß die Frage einen klaren Sinn hat: "Ist die Menge *R* in eine Reihe zu ordnen?". Denn diese Frage bedeutet nun etwa: Kann man mit diesen Gebilden etwas tun, was dem Ordnen der Kardinalzahlen in eine Reihe entspricht? Wenn man also fragt: "Kann man die reellen Zahlen in eine Reihe ordnen?" so könnte die gewissenhafte Antwort sein: "Ich kann mir vorläufig gar nichts Genaues darunter vorstellen."—"Aber du kannst doch z.B. die Wurzeln und die algebraischen Zahlen in eine Reihe ordnen; also verstehst du doch den Ausdruck!"—Richtiger gesagt, ich *habe* hier gewisse analoge Gebilde, die ich mit dem gemeinsamen Namen 'Reihen' benenne. Aber ich habe noch keine sichere Brücke von diesen Fällen zu dem 'aller reellen Zahlen'. Ich habe auch keine allgemeine Methode um zu versuchen, ob sich die und die Menge 'in eine Reihe ordnen läßt'.

Nun zeigt man mir das Diagonalverfahren und sagt: "Hier hast du nun den Beweis, daß dieses Ordnen hier nicht geht." Aber ich kann antworten: "Ich weiß—wie gesagt—nicht, was es ist, was hier *nicht geht*." Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von "Wurzel", "algebraische Zahl", etc. einerseits und "reelle Zahl" anderseits. Und zwar etwa so: Die Wurzeln nennen wir "reelle Zahlen" und die Diagonalzahl, die aus den Wurzeln gebildet ist, *auch*. Und ähnlich mit allen Reihen reeller Zahlen. Daher hat es keinen Sinn, von einer "Reihe *aller* reellen Zahlen" zu reden, weil man

Well, that would be useful. And it strikes me as if this were the whole and real purpose of this method. It makes use of the vague notion of this man who goes on, as it were idiotically, with his furious work, and brings him to a stop by means of a picture. (But one could get him to resume his undertaking by means of another picture.)

The procedure exhibits something—which can in a very vague way be called the demonstration that *these* methods of calculation cannot be ordered in a series. And here the meaning of "*these*" is just kept vague.

A clever man got caught in this net of language! So it must be an interesting net.

The mistake begins when one says that the cardinal numbers can be ordered in a series. For what concept has one of this ordering? True, one has of course got one of an infinite series, but here that gives us at most a vague idea, a guiding light for the formation of a concept. For the concept itself is *abstracted* from this and from other series; or: the expression stands for a certain analogy between cases, and it can e.g. be used to define provisionally a domain that one wants to talk about.

That, however, is not to say that the question: "Can the set R be ordered in a series?" has a clear sense. For this question means e.g.: Can one do something with these formations, corresponding to the ordering of the cardinal numbers in a series? So if it is asked: "Can the real numbers be ordered in a series?" the sure answer might be: "For the time being I can't form any precise idea of that".—"But you can order the roots and the algebraic numbers for example in a series; so you surely understand the expression!"—To put it better, I *have got* certain analogous formations, which I call by the common name 'series'. But so far I haven't any certain bridge from these cases to that of 'all real numbers'. Nor have I any general method of trying whether such-and-such a set 'can be ordered in a series'.

Now I am shewn the diagonal procedure and told: "Now here you have the proof that this ordering can't be done here". But I can reply: "I don't know—to repeat—what it is that *can't be done* here". Though I can see that you want to shew a difference between the use of "root", "algebraic number", etc. on the one hand, and "real number" on the other. Such a difference as e.g. this: roots are called "real numbers", *and so* is the diagonal number formed from the roots. And similarly for all series of real numbers. For this reason it makes no sense to speak of a "series of *all* real numbers", just because the diagonal ja auch die Diagonalzahl der Reihe eine "reelle Zahl" nennt.——Wäre das nicht etwas ähnliches, wie wenn man gewöhnlich jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennte und nun sagte: "Es hat keinen Sinn, von 'der Reihe aller Bücher' zu reden, da diese Reihe selbst ein Buch wäre."

3. Es ist hier sehr nützlich, sich vorzustellen, daß das Diagonalverfahren zur Erzeugung einer reellen Zahl längst vor der Erfindung der Mengenlehre bekannt und auch den Schulkindern geläufig gewesen wäre, wie es ja sehr wohl hätte sein können. So wird nämlich der Aspekt der Entdeckung Cantors geändert. Diese Entdeckung hätte sehr wohl bloß in der Interpretation dieser altbekannten, elementaren Rechnung liegen können.

Die Rechnungsart selbst ist ja nützlich. Die Aufgabe wäre etwa: Schreibe eine Dezimalzahl an, die verschieden ist von den Zahlen:

0.1246798 . . .
0.3469876 . . .
0.0127649 . . .
0.3426794 . . .
. . . . (Man denke sich eine lange Reihe.)

Das Kind denkt sich: Wie soll ich das machen, ich müßte ja auf alle die Zahlen zugleich schauen um zu vermeiden, daß ich nicht doch eine von ihnen anschriebe? Die Methode sagt nun: Durchaus nicht; ändere die erste Stelle der ersten Zahl, die zweite der zweiten, etc. etc. und du bist sicher, eine Zahl hingeschrieben zu haben, die mit keiner der gegebenen übereinstimmt. Die Zahl, die man so erhält, könnte immer die Diagonalzahl genannt werden.

Das Gefährliche, Täuschende der Fassung: "Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen" oder gar "Die Menge . . . ist nicht abzählbar" liegt darin, daß sie das, was eine Begriffsbestimmung, Begriffsbildung ist, als eine Naturtatsache erscheinen lassen.

Bescheiden lautet der Satz: "Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine 'reelle Zahl' und zwar sagt man, sie sei von allen Gliedern der Reihe verschieden."

Unser Verdacht sollte immer rege sein, wenn ein Beweis mehr beweist, als seine Mittel ihm erlauben. Man könnte so etwas 'einen prahlerischen Beweis' nennen.

Der gebräuchliche Ausdruck fingiert einen Vorgang, eine Methode des Ordnens, die hier zwar anwendbar ist, aber nicht zum Ziele führt number for each series is also called a "real number".——Would this not be as if any row of books were itself ordinarily called a book, and now we said: "It makes no sense to speak of 'the row of all books', as this row would itself be a book."

3. Here it is very useful to imagine the diagonal procedure for the production of a real number as having been well-known before the invention of set theory, and familiar even to school-children, as indeed might very well have been the case. For this changes the aspect of Cantor's discovery. The discovery might very well have consisted *merely* in the interpretation of this long familiar elementary calculation.

For this kind of calculation is itself useful. The question set would be perhaps: write down a decimal number which is different from the numbers:

0.1246798...
0.3469876...
0.0127649...
0.3426794...
.... (Imagine a long series.)

The child thinks to itself: how am I to do this, when I should have to look at all the numbers at once, to prevent what I write down from being one of them? Now the method says: Not at all; change the first place of the first number, the second of the second one etc. etc., and you are sure of having written down a number that does not coincide with any of the given ones. The number got in this way might always be called the diagonal number.

The dangerous, deceptive thing about the idea: "The real numbers cannot be arranged in a series", or again "The set . . . is not denumerable" resides in its making what is a determination, formation, of a concept, look like a fact of nature.

The following sentence sounds sober: "If something is called a series of real numbers, then the expansion given by the diagonal procedure is also called a 'real number', and is moreover said to be different from all members of the series".

Our suspicion ought always to be aroused when a proof proves more than its means allow it. Something of this sort might be called 'a puffed-up proof'.

The usual expression simulates a procedure, a method of ordering which is indeed applicable here, but does not lead to the goal because wegen der Zahl der Gegenstände, die größer ist als selbst die aller Kardinalzahlen.

Wenn gesagt würde: "Die Überlegung über das Diagonalverfahren zeigt Euch, daß der *Begriff* 'reelle Zahl' viel weniger Analogie mit dem Begriff 'Kardinalzahl' hat, als man, durch gewisse Analogien verführt, zu glauben geneigt ist", so hätte das einen guten und ehrlichen Sinn. Es geschieht aber gerade das *Gegenteil*: indem die 'Menge' der reellen Zahlen angeblich der Größe nach mit der der Kardinalzahlen verglichen wird. Die Artverschiedenheit der beiden Konzeptionen wird durch eine schiefe Ausdrucksweise als Verschiedenheit der Ausdehnung dargestellt.

4. Die Krankheit einer Zeit heilt sich durch eine Veränderung in der Lebensweise der Menschen und die Krankheit der philosophischen Probleme konnte nur durch eine veränderte Denkweise und Lebensweise geheilt werden, nicht durch eine Medizin die ein einzelner erfand.

Denke, daß der Gebrauch des Wagens gewisse Krankheiten hervorruft und begünstigt und die Menschheit von dieser Krankheit geplagt wird, bis sie sich, aus irgendwelchen Ursachen, als Resultat irgendeiner Entwickelung, das Fahren wieder abgewöhnt.

5. Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: "Es gibt keine größte Kardinalzahl"? Wann und bei welcher Gelegenheit würde man ihn sagen? Diese Verwendung ist jedenfalls eine ganz andere, als die des mathematischen Satzes '$25 \times 25 = 625$'.

Vor allem ist zu bemerken, daß wir das überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht auf der Hand liegt.

Und ferner, wenn man die Frage rasch beantworten will, gleitet man leicht aus. Es ist hier ähnlich wie mit der Frage, welche Erfahrung uns zeigt, daß unser Raum dreidimensional ist.

Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende.

Und man kann sagen, die Erlaubnis Sprachspiele mit Kardinalzahlen zu spielen habe kein Ende. Dies würde man etwa Einem sagen, den wir unsere Sprache und Sprachspiele lehrten. Es wäre also wieder ein grammatischer Satz, aber von *ganz* anderer Art als '$25 \times 25 = 625$'. Er wäre aber von großer Bedeutung, wenn der Schüler etwa geneigt wäre (vielleicht weil er in einer ganz anderen Kultur erzogen worden wäre) ein definitives Ende dieser Reihe von Sprachspielen zu erwarten.

6. Warum sollen wir sagen: Die Irrationalzahlen können nicht geordnet werden?—Wir haben eine Methode, jede Ordnung zu stören.

of the number of objects involved, which is greater even than the number of all cardinal numbers.

If it were said: "Consideration of the diagonal procedure shews you that the *concept* 'real number' has much less analogy with the concept 'cardinal number' than we, being misled by certain analogies, are inclined to believe", that would have a good and honest sense. But just the *opposite* happens: one pretends to compare the 'set' of real numbers in magnitude with that of cardinal numbers. The difference in kind between the two conceptions is represented, by a skew form of expression, as difference of extension.

4. The sickness of a time is cured by an alteration in the mode of life of human beings, and it was possible for the sickness of philosophical problems to get cured only through a changed mode of thought and of life, not through a medicine invented by an individual.

Suppose the use of the motor-car produces or encourages certain illnesses, and mankind is plagued by such illness until, from some cause or other, as the result of some development or other, it abandons the habit of driving.

5. For how do we make use of the proposition: "There is no greatest cardinal number"? When and on what occasion would it be said? This use is at any rate quite different from that of the mathematical proposition '$25 \times 25 = 625$'.

First and foremost, notice that we ask this question at all; this points to the fact that the answer is not ready to hand.

Moreover, if one tries to answer the question in a hurry, it is easy to trip up. The case is like that of the question: what experience shews us that our space is three-dimensional?

We say of a *licence* that it does not terminate.

And it can be said that the licence to play language-games with cardinal numbers does not terminate. This would be said e.g. to someone to whom we were teaching our language and language-games. So it would again be a grammatical proposition, but of an *entirely* different kind from '$25 \times 25 = 625$'. It would however be of great importance if the pupil were, say, inclined to expect a definitive end to this series of language-games (perhaps because he had been brought up in a different culture).

6. Why should we say: The irrational numbers cannot be ordered?—We have a method of upsetting any order.

Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigt uns nicht eine Irrationalzahl, die von allen im System verschieden ist, aber es gibt dem mathematischen Satz Sinn, die Zahl so und so sei von allen des Systems verschieden. Cantor könnte sagen: Du kannst *dadurch* beweisen, daß eine Zahl von allen des Systems verschieden ist, daß du beweist, daß sie in der ersten Stelle von der ersten Zahl, in der zweiten Stelle von der zweiten Zahl u.s.f. verschieden ist.

Cantor sagt etwas über die Multiplizität des Begriffs 'reelle Zahl, verschieden von allen eines Systems'.

Cantor zeigt, wenn wir ein System von Extensionen haben, daß es dann Sinn hat, von einer Extension zu reden, die von ihnen allen verschieden ist.—Aber damit ist die Grammatik des Wortes "Extension" noch nicht bestimmt.

Cantor gibt dem Ausdruck "Extension die von allen Extensionen eines Systems verschieden ist" einen Sinn, indem er vorschlägt, eine Extension solle so genannt werden, wenn von ihr bewiesen werden kann, daß sie von den Extensionen eines Systems diagonal verschieden ist.

Es gibt also eine *Aufgabe*: Finde eine Zahl deren Entwicklung von denen dieses Systems diagonal verschieden ist.

7. Man könnte sagen: Außer den rationalen Punkten befinden sich auf der Zahlenlinie *diverse Systeme* irrationaler Punkte.

Es gibt kein System der Irrationalzahlen—aber auch kein Über-System, keine 'Menge der irrationalen Zahlen' von einer Unendlichkeit höherer Ordnung.

Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung*, nämlich eine Verschiedenheit einer Entwicklung von einem *System* von Entwicklungen. Man kann diese Erklärung so benützen, daß man zeigt, daß eine Zahl in diesem Sinne von einem System von Zahlen verschieden ist: sagen wir π von dem System der algebraischen Zahlen. Aber wir können nicht gut sagen, die Regel, die Stellen in der Diagonale so und so zu verändern, sei dadurch als von den Regeln des Systems verschieden bewiesen, weil diese Regel selbst 'höherer Ordnung' ist, denn sie *handelt* von der Veränderung eines Systems von Regeln und daher ist es von vornherein nicht klar, in welchem Fall wir die Entwickelung *so einer* Regel von allen Entwicklungen des Systems verschieden erklären wollen.

8. '*Diese Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen*, daß $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.'

D.h.: wir können die Überlegungen uns dahin führen *lassen*.

Oder: wir können *dies* sagen, und *dies* als Grund dafür angeben.

Aber wenn wir es nun sagen—was ist weiter damit anzufangen? In welcher Praxis ist dieser Satz *verankert*? Er ist vorläufig ein Stück

Cantor's diagonal procedure does not shew us an irrational number different from all in the system, but it gives sense to the mathematical proposition that the number so-and-so is different from all those of the system. Cantor could say: You can prove that a number is different from all the numbers in the system *by* proving that it differs in its first place from its first number and in its second place from its second number and so on.

Cantor is saying something about the multiplicity of the concept "Real number different from all the ones of a system".

Cantor shews that if we have a system of expansions it makes sense to speak of an expansion that is different from them all.—But that is not enough to determine the grammar of the word "expansion".

Cantor gives a sense to the expression "expansion which is different from all the expansions in a system", by proposing that an expansion should be so called when it can be proved that it is diagonally different from the expansions in a system.

Thus it can be *set* as a question: Find a number whose expansion is diagonally different from those in this system.

7. It might be said: Besides the rational points there are *diverse systems* of irrational points to be found in the number line.

There is no system of irrational numbers—but also no super-system, no 'set of irrational numbers' of higher-order infinity.

Cantor defines a *difference of higher order*, that is to say a difference of an expansion from a *system* of expansions. This definition can be used so as to shew that a number is in this sense different from a system of numbers: let us say π from the system of algebraic numbers. But we cannot very well say that the rule of altering the places in the diagonal in such-and-such a way is as such proved different from the rules of the system, because this rule is itself of 'higher order'; for it *treats of* the alteration of a system of rules, and for that reason it is not clear in advance in which cases we shall be willing to declare the expansion of *such a* rule different from all the expansions of the system.

8. 'These considerations may lead us to say that $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.'

That is to say: we can *make* the considerations lead us to that.

Or: we can say *this* and give *this* as our reason.

But if we do say it—what are we to do next? In what practice is this proposition *anchored*? It is for the time being a piece of mathematical mathematischer Architektur, die in der Luft hängt, so aussieht als wäre es, sagen wir, ein Architrav, aber von nichts getragen wird und nichts trägt.

Gewisse Überlegungen können uns dahin führen zu sagen, daß 10^{10} Seelen in einem cm^3 Platz haben. Warum sagen wir es aber trotzdem nicht? Weil es zu nichts nütze ist. Weil es zwar ein Bild herauf ruft, aber eins, womit wir weiter nichts machen können.

Der Satz gilt soviel, als seine Gründe gelten.

Er trägt soviel, wie seine Gründe tragen, die ihn stützen.

9. Eine interessante Frage ist: Welchen Zusammenhang hat $\aleph_0$ mit den Kardinalzahlen, deren Zahl es sein soll? $\aleph_0$ wäre offenbar das *Prädikat* "*endlose Reihe*", in seiner Anwendung auf die Reihe der Kardinalzahlen und ähnliche mathematische Bildungen. Es ist hier wichtig, das Verhältnis zwischen einer Reihe im nicht-mathematischen Sinn und einer im mathematischen Sinn zu erfassen. Es ist natürlich klar, daß wir in der Mathematik das Wort "Zahlenreihe" *nicht* im Sinne von "Reihe von Zahlzeichen" gebrauchen, wenn, natürlich, auch ein Zusammenhang zwischen dem Gebrauch des einen Ausdrucks und des andern besteht. Eine Eisenbahn ist nicht ein Eisenbahnzug; sie ist auch nicht etwas einem Eisenbahnzug ähnliches. 'Reihe' im mathematischen Sinn ist eine Konstruktionsart für Reihen sprachlicher Ausdrücke.

Wir haben also eine grammatische Klasse "endlose Folge" und äquivalent mit diesem Ausdruck ein Wort, dessen Grammatik (eine gewisse) Ähnlichkeit mit der eines Zahlworts hat: "Endlos" oder "$\aleph_0$". Dies hängt damit zusammen, daß wir unter den Kalkülen der Mathematik eine Technik haben, die wir mit einem gewissen Recht "1–1 Zuordnung der Glieder zweier endlosen Folgen" nennen können, da sie mit einem solchen gegenseitigen Zuordnen der Glieder sogenannter 'endlicher' Klassen Ähnlichkeit hat.

Daraus aber, daß wir Verwendung für eine *Art* von Zahlwort haben, welches, gleichsam, die Anzahl der Glieder einer endlosen Reihe angibt, folgt nicht daß es auch irgend einen Sinn hat von der Anzahl des Begriffes 'endlose Folge' zu reden, daß wir *hier* irgend welche Verwendung füt etwas zahlwort-ähnliches haben. Es gibt eben keine grammatische Technik, die die Verwendung so eines Ausdrucks nahelegte. Denn ich kann freilich den Ausdruck bilden: "Klasse aller Klassen, die mit der Klasse 'endlose Folge' zahlengleich sind" wie auch den: "Klasse aller Engel, die auf einer Nadelspitze Platz haben" aber dieser Ausdruck ist leer, solang es keine Verwendung für ihn gibt. Eine solche ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden*.

architecture which hangs in the air, and looks as if it were, let us say, an architrave, but not supported by anything and supporting nothing.

Certain considerations may lead us to say that 10^{10} souls fit into a cubic centimetre. But why do we nevertheless not say it? Because it is of no use. Because, while it does conjure up a picture, the picture is one with which we cannot go on to do anything.

The proposition is worth as much as its grounds are.
It supports as much as the grounds that support it do.

9. An interesting question is: what is the connexion of $\aleph_0$ with the cardinal numbers whose number it is supposed to be? $\aleph_0$ would obviously be the *predicate "infinite series"* in its application to the series of cardinal numbers and to similar mathematical formations. Here it is important to grasp the relationship between a series in the non-mathematical sense and one in the mathematical sense. It is of course clear that in mathematics we do *not* use the word "series of numbers" in the sense "series of numerical signs", even though, of course, there is also a connexion between the use of the one expression and of the other. A railway is not a railway train; nor is it something similar to a railway train. A 'series' in the mathematical sense is a method of construction for series of linguistic expressions.

Thus we have a grammatical class "infinite sequence", and equivalent with this expression a word whose grammar has (a certain) similarity with that of a numeral: "infinity" or "$\aleph_0$". This is connected with the fact that among the calculi of mathematics we have a technique which there is a certain justice in calling "1-1 correlation of the members of two infinite series", since it has a similarity to such a mutual correlation of the members of what are called 'finite' classes.

From the fact, however, that we have an employment for a *kind* of numeral which, as it were, gives the number of the members of an infinite series, it does not follow that it also makes some kind of sense to speak of the number of the concept 'infinite series'; that we have *here* some kind of employment for something like a numeral. For there is no grammatical technique suggesting employment of such an expression. For I can of course form the expression: "class of all classes which are equinumerous with the class 'infinite series'" (as also: "class of all angels that can get on to a needlepoint") but this expression is empty so long as there is no employment for it. Such an employment is not: yet to be discovered, but: still to be *invented.*

Denke, ich legte ein in Felder geteiltes Spielbrett vor dich, setzte Schachfiguren-ähnliche Stücke darauf,—erklärte: "Diese Figur ist der '*König*', das sind die '*Ritter*', das die '*Bürger*'.—Mehr wissen wir von dem Spiel noch nicht; aber das ist immerhin etwas.—Und mehr wird vielleicht noch entdeckt werden."

10. "Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach ordnen."—Dies klingt vor allem höchst interessant und merkwürdig.

Es klingt interessant im ganz anderem Sinne, als, etwa, ein Satz aus der Differentialrechnung. Der Unterschied liegt, glaube ich, darin, daß ein solcher sich leicht mit einer Anwendung auf Physikalisches assoziiert, während *jener* Satz einzig und allein der Mathematik anzugehören, gleichsam die Naturgeschichte der mathematischen Gegenstände selbst zu betreffen scheint.

Man möchte von ihm etwa sagen: er führe uns in die Geheimnisse der mathematischen Welt ein. Es ist *dieser* Aspekt vor dem ich warnen will.

Wenn es den Anschein hat, . . ., dann ist Vorsicht geboten.

11. Wenn ich mir bei dem Satz, die Brüche können nicht ihrer Größe nach in eine Reihe geordnet werden, das Bild einer unendlichen Reihe von Dingen mache, und zwischen jedem Ding und seinem Nachbar werden neue Dinge sichtbar, und wieder zwischen jedem Ding und seinem Nachbar neue, und so fort ohne Ende, so haben wir hier sicher etwas, wovor Einem schwindlich werden kann.

Sehen wir aber, daß dieses Bild, wenn auch sehr aufregend, doch aber kein treffendes ist, daß wir uns nicht von den Worten "Reihe", "ordnen", "existieren", und andern, fangen lassen dürfen, so werden wir auf die *Technik* des Bruchrechnens zurückgreifen, an der nun nichts *seltsames* mehr ist.

Daß in einer Technik der Berechnung von Brüchen der Ausdruck "der nächst größere Bruch" keinen Sinn hat, daß wir ihm keinen Sinn gegeben haben, ist nichts erstaunliches.

Wenn wir eine Technik des fortgesetzten Interpolierens von Brüchen anwenden, so werden wir keinen Bruch den "nächst größeren" nennen wollen.

12. Von einer Technik zu sagen, sie sei unbegrenzt, heißt *nicht*, sie laufe ohne aufzuhören weiter—*wachse* ins ungemessene; sondern, es fehle ihr die Institution des Endes, sie sei nicht abgeschlossen. Wie man von einem Satz sagen kann, es mangle ihm der Abschluß, wenn der Schlußpunkt fehlt. Oder von einem Spielfeld es sei unbegrenzt,

Imagine that I put a playing-board divided into squares in front of you, and put pieces like chess pieces on it—and stated: "This piece is the '*King*', these are the '*Knights*', these the '*Commoners*'.—So far that's all we know about the game; but that's always something.—And perhaps more will be discovered."

10. "Fractions cannot be arranged in an order of magnitude."—First and foremost, this sounds extremely interesting and remarkable.

It sounds interesting in a quite different way from, say, a proposition of the differential calculus. The difference, I think, resides in the fact that *such* a proposition is easily associated with an application to physics, whereas *this* proposition belongs simply and solely to mathematics, seems to concern as it were the natural history of mathematical objects themselves.

One would like to say of it e.g.: it introduces us to the mysteries of the mathematical world. *This* is the aspect against which I want to give a warning.

When it looks as if . . ., we should look out.

11. When, on hearing the proposition that the fractions cannot be arranged in a series in order of magnitude, I form the picture of an unending row of things, and between each thing and its neighbour new things appear, and more new ones again between each of these things and its neighbour, and so on without end, then certainly there is something here to make one dizzy.

But once we see that this picture, though very exciting, is all the same not appropriate; that we ought not to let ourselves be trapped by the words "series", "order", "exist", and others, we shall fall back on the *technique* of calculating fractions, about which there is no longer anything *queer*.

The fact that in a technique of calculating fractions the expression "the next greatest fraction" has no sense, that we have not given it any sense, is nothing to marvel at.

If we apply a technique of continuous interpolation of fractions, we shall not be willing to call any fraction the "next biggest".

12. To say that a technique is unlimited does *not* mean that it goes on without ever stopping—that it increases immeasurably; but that it lacks the institution of the end, that it is not finished off. As one can say of a sentence that it is not finished off if it has no period. Or of a

wenn die Spielregeln keine Begrenzung—etwa durch einen Strich—vorschreiben.

Eine neue Rechentechnik soll uns ja eben ein *neues* Bild liefern, eine *neue Ausdrucksweise*; und wir können nichts Absurderes tun, als dieses neue Schema, diese neue Art von Gerüst, vermittels der alten Ausdrücke beschreiben zu wollen.

13. Was ist die Funktion eines solchen Satzes wie: "Es gibt zu einem Bruch nicht einen nächst größern Bruch, aber zu einer Kardinalzahl eine nächst größere"? Es ist doch gleichsam ein Satz, der zwei Spiele vergleicht. (Wie: im Damespiel gibt es ein Überspringen eines Steines, aber nicht im Schachspiel.)

Wir nennen etwas "die nächst größere Kardinalzahl konstruieren" aber nichts "den nächst größeren Bruch konstruieren".

14. Wie vergleicht man Spiele? Indem man sie beschreibt—indem man das eine als Variation des andern beschreibt—indem man sie beschreibt und die Unterschiede und Analogien *hervorhebt*.

"Im Damespiel gibt es keinen König"—was sagt das? (Es klingt kindisch.) Heißt es nur, daß man keinen Damestein "König" nennt; und wenn man nun einen so nennte, gäbe es nun im Damespiel einen König? Wie ist es aber mit *dem* Satz: "Im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, aber nicht im Schach"? Wem teile ich dies mit? Dem, der die beiden Spiele schon kennt, oder einem der sie noch nicht kennt. Da scheint es, daß der erste unsere Mitteilung nicht bedarf und der zweite mit ihr nichts anfangen kann. Aber wie wenn ich sagte: Schau! im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, . . ." oder noch besser: "Schau! in diesen Spielen sind alle Steine gleichberechtigt, in jenen nicht". Aber was tut so ein Satz? Er führt einen neuen *Begriff* ein, einen neuen Einteilungsgrund. Ich lehre dich, die Aufgabe beantworten: "Nenne mir Spiele der ersten Art!" etc.. Ähnlich aber könnte man Aufgaben stellen: "Erfinde ein Spiel, in dem es einen König gibt".

15. 'Wir können die Brüche nicht ihrer Größe nach in eine Reihe, aber wir *können* sie in eine unendliche Reihe ordnen.'

Was hat der gelernt, der das nicht wußte? Er hat eine neue Art der Rechnung gelernt, z.B.: "Bestimme die Nummer des Bruches . . .".

Er lernt diese Technik—aber lernt er nicht auch, daß es so eine Technik gibt?

playing-field that it is unlimited, when the rules of the game do not prescribe any boundaries—say by means of a line.

For the point of a new technique of calculation is to supply us with a *new* picture, *a new form of expression*; and there is nothing so absurd as to try and describe this new schema, this new kind of scaffolding, by means of the old expressions.

13. What is the function of such a proposition as: "A fraction has not a next biggest fraction but a cardinal number has a next biggest cardinal number"? Well, it is as it were a proposition that compares two games. (Like: in draughts pieces jump over one another, but not in chess.)

We call something "constructing the next biggest cardinal number" but nothing "constructing the next biggest fraction".

14. How do we compare games? By describing them—by describing one as a variation of another—by describing them and *emphasizing* their differences and analogies.

"In draughts there isn't a rook"—what does this mean? (It sounds childish.) Does it only mean that none of the pieces in draughts is called "rook"; and if we did call one of the pieces that, would there be a rook in draughts? But what about *this* proposition: "In draughts all the pieces have the same powers, but not in chess"? Whom am I telling this? Someone who already knows both games, or someone who does not yet know them. Here it looks as if the first one stands in no need of our information and the second can do nothing with it. But suppose I were to say: "See! In draughts all the pieces have the same powers, . . ." or better still: "See! In these games all the pieces have the same powers, in those not." But what does such a proposition do? It introduces a new *concept*, a new ground of classification. I teach you to answer the question: "Name games of the first sort" etc.. But in a similar way it would be possible to set questions like: "Invent a game with a rook".

15. 'We cannot arrange fractions in a series in order of magnitude, but we *can* order them in an infinite series.'

If someone did not know this, what has he learnt? He has learned a new kind of calculation, e.g.: "Determine the number of the fraction . . .".

He learns this technique—but doesn't he also learn that there is such a technique?

Ich habe allerdings in einem wichtigen Sinne gelernt, daß es so eine Technik gibt; ich habe nämlich eine Technik kennen gelernt, die sich jetzt auf alles mögliche Andre anwenden läßt.

16. 'Wie würdest du nun *das* nennen?'

	1	2	3	4	. . .
1	1	3	6	10	.
2	2	5	9	.	
3	4	8	.		
4	7	.			
.	.				

Nicht, "eine Methode die Zahlenpaare fortlaufend zu numerieren"? Und könnte ich nicht auch sagen: "die Zahlenpaare in eine Reihe zu ordnen"?

Lehrt mich nun die Mathematik, daß ich die Zahlenpaare in eine Reihe ordnen kann? Kann ich denn sagen: sie lehrt mich, daß ich *das* machen kann? Hat es denn Sinn zu sagen, ich lehre ein Kind, daß man multiplizieren kann—indem ich es lehre zu multiplizieren? Eher könnte man natürlich sagen, ich lehre ihn daß man Brüche multiplizieren kann, nachdem er Kardinalzahlen miteinander zu multiplizieren gelernt hat. Denn nun, könnte man sagen, weiß er schon was "multiplizieren" heißt. Aber wäre nicht auch das irreführend?

Wenn Einer sagt, ich habe den Satz bewiesen, daß man Zahlenpaare in eine Reihe ordnen könne; so ist zu antworten, daß dies ja kein mathematischer Satz ist, da man mit den Worten "man", "kann", "die", "Zahlenpaare" etc. nicht rechnet. Der Satz "man kann die . . ." ist vielmehr nur eine beiläufige Beschreibung der Technik die man lehrt, etwa ein nicht unpassender *Titel*, eine Überschrift zu diesem Kapitel. Aber ein Titel mit dem man, vorderhand, nicht *rechnen* kann.

Aber, sagst du, das ist es eben, was der logische Kalkül Freges und Russells tut: in ihm hat jedes Wort, was in der Mathematik gesprochen wird, exakte Bedeutung, ist ein Element des Kalküls. In diesem Kalkül kann man also wirklich beweisen: "man kann multiplizieren". Wohl, nun ist er ein mathematischer Satz; aber wer sagt, daß man mit diesem Satz etwas anfangen kann? Wer sagt, *wozu* er nütze sein kann? Denn, daß er interessant klingt, ist nicht genug.

Weil wir im Unterricht vielleicht den Satz gebrauchen: "Du siehst also, man kann die Brüche in eine Reihe ordnen", sagt nicht, daß wir für diesen Satz andere Verwendung haben, als die, ein einprägsames Bild mit dieser Rechnungsart zu verknüpfen.

I have indeed, in an important sense, learned that there is such a technique; that is, I have got to know a technique which can now be applied to all sorts of other things.

16. 'What would you call *this*?'

	1	2	3	4	. . .
1	1	3	6	10	.
2	2	5	9	.	
3	4	8	.		
4	7	.			
.	.				

Surely "a method of numbering the pairs of numbers"? And might I not also say: "of ordering pairs of numbers in a series"?

Now does mathematics teach me that I can order the pairs of numbers in a series? Can I say: it teaches me that I can do *this*? For does it make sense to say that I teach a child that it is possible to multiply—by teaching him to multiply? It would rather be natural to say I teach him that it is possible to multiply fractions, after he has learned to multiply cardinal numbers together. For now, it might be said, he knows what "multiplying" means. But wouldn't this be misleading too?

If someone says I have proved the proposition that we can order pairs of numbers in a series, it should be answered that this is not a mathematical proposition, since one doesn't calculate with the words "we", "can", "the", "pairs of numbers", etc. The proposition "one can . . ." is rather a mere approximate description of the technique one is teaching, say a not unsuitable *title*, a heading to this chapter. But a title with which it is not possible to *calculate*.

But, you say, this is just what the logical calculus of Frege and Russell does: in it every word that is spoken in mathematics has exact significance, is an element of the calculus. Thus in this calculus we can really prove that "multiplying is possible". Very well, now it is a mathematical proposition; but who says that anything can be done with this proposition? Who says *what* use it can be? For its sounding interesting is not enough.

Our perhaps using the proposition: "And so you see that we can order the fractions in a series", in teaching, does not mean that we have any other use for this proposition than that of attaching a memorable picture to this sort of calculation.

Wenn hier das Interesse an dem Satz haftet, der bewiesen wurde, so haftet es en einem Bild, das eine äußerst schwächliche Berechtigung hat, uns aber durch seine Seltsamkeit reizt, wie etwa das Bild von der 'Richtung' des Zeitverlaufs. Es bewirkt einen leisen Taumel der Gedanken.

Ich kann hier nur sagen: Trenne dich so bald wie möglich von diesem Bild, und sieh das Interesse der Rechnung in ihrer Anwendung. (Es ist als wären wir auf einem Maskenball auf dem jede Rechnung in seltsamer Verkleidung erscheint.)

17. "Soll man das Wort 'unendlich' in der Mathematik vermeiden?" Ja; dort, wo es dem Kalkül eine Bedeutung zu verleihen scheint; statt sie erst von ihm zu erhalten.

Die Redeweise: "Wenn man aber in den Kalkül sieht, ist gar nichts Unendliches da"—natürlich eine ungeschickte Redeweise—aber sie bedeutet: Ist es wirklich nötig das Bild des Unendlichen (der ungeheuern Größe) hier heraufzubeschwören? Und wie ist dieses Bild mit dem *Kalkül* in Verbindung? denn seine Verbindung ist nicht die des Bildes | | | | mit 4.

So zu tun, als sei man enttäuscht, nichts Unendliches im Kalkül gefunden zu haben ist freilich komisch; nicht aber zu fragen: welches ist denn die alltägliche Verwendung des Wortes "unendlich", die ihm seine Bedeutung für uns gibt, und was ist nun seine Verbindung mit diesen mathematischen Kalkülen?

18. Finitismus und Behaviourismus sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur. . . . Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um aus einer Verwirrung zu entkommen.

Was ich tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen; sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen. Ich prüfe etwa die Berechtigung, hier noch das Wort . . . zu gebrauchen. Eigentlich aber: ich fordere immer wieder zu so einer Untersuchung auf. Zeige, daß es sie gibt, und was da etwa zu untersuchen ist. Ich darf also nicht sagen: "So darf man sich nicht ausdrücken", oder "Das ist absurd", oder "Das ist uninteressant", sondern: "Prüfe diesen Ausdruck in dieser Weise auf seine Berechtigung". Man kann die Berechtigung eines Ausdrucks, *weil seine Verwendung*, damit nicht übersehen, daß man eine Facette seiner Verwendung ansieht; etwa ein Bild, das sich mit ihm verbindet.

If the interest here attaches to the proposition that has been proved, then it attaches to a picture which has an extremely weak justification, but which fascinates us by its queerness, like e.g. the picture of the "direction" of time. It makes one's thoughts reel mildly.

Here I can only say: depart as quickly as possible from this picture, and see the interest of this calculation in its application. (It is as if we were at a masked ball at which every calculation appears in a queer guise.)

17. "Ought the word 'infinite' to be avoided in mathematics?" Yes; where it appears to confer a meaning upon the calculus; instead of getting one from it.

This way of talking: "But when one examines the calculus there is nothing infinite there" is of course clumsy—but it means; is it really necessary here to conjure up the picture of the infinite (of the enormously big)? And how is this picture connected with the *calculus*? For its connexion is not that of the picture | | | | with 4.

To act as if one were disappointed to have found nothing infinite in the calculus is of course funny; but not to ask: what is the everyday employment of the word "infinite", which gives it its meaning for us; and what is its connexion with these mathematical calculi?

18. Finitism and behaviourism are quite similar trends. Both say, but surely, all we have here is.... Both deny the existence of something, both with a view to escaping from a confusion.

What I am doing is, not to shew that calculations are wrong, but to subject the *interest* of calculations to a test. I test e.g. the justification for still using the word . . . here. Or really, I keep on urging such an investigation. I shew that there is such an investigation and what there is to investigate there. Thus I must say, not: "We must not express ourselves like this", or "That is absurd", or "That is uninteresting", but: "Test the justification of this expression in this way". You cannot survey the justification of an expression unless you survey its employment; which you cannot do by looking at some facet of its employment, say a picture attaching to it.

II

1939–40

1. 'Ein mathematischer Beweis muß übersichtlich sein.' "Beweis" nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist. Es muß sich mit Sicherheit entscheiden lassen, ob wir hier wirklich zweimal den gleichen Beweis vor uns haben, oder nicht. Der Beweis muß ein Bild sein, welches sich mit Sicherheit genau reproduzieren läßt. Oder auch: was dem Beweise wesentlich ist, muß sich mit Sicherheit genau reproduzieren lassen. Er kann z.B. in zwei verschiedenen Handschriften oder Farben niedergeschrieben sein. Zur Reproduktion eines Beweises soll nichts gehören, was von der Art einer genauen Reproduktion eines Farbtones oder einer Handschrift ist.

Es muß leicht sein, *genau* diesen Beweis wieder anzuschreiben. Hierin liegt der Vorteil des geschriebenen im Vergleich zum gezeichneten Beweis. Dieser ist oft seinem Wesen nach mißverstanden worden. Die Zeichnung eines Euklidischen Beweises kann ungenau sein, in dem Sinne, daß die Geraden nicht gerade sind, die Kreisbögen nicht genau kreisförmig etc. etc. und dabei ist die Zeichnung doch ein exakter Beweis und daraus sieht man, daß diese Zeichnung nicht—z.B. —demonstriert, daß eine solche Konstruktion ein Vieleck mit 5 gleich langen Seiten ergibt, daß sie einen Satz der Geometrie, nicht einen über die Eigenschaften von Papier, Zirkel, Lineal und Bleistift beweist.

[Hängt zusammen mit: Beweis ein *Bild* eines Experiments.]

2. Ich will sagen: Wenn man eine nicht übersehbare Beweisfigur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher keiner war.

Denken wir uns nun einen Beweis für einen Russellschen Additionssatz der Art '$a + b = c$' der aus ein paar tausend Zeichen bestünde. Du wirst sagen: Zu sehen, ob dieser Beweis stimmt oder nicht, ist eine rein äußerliche Schwierigkeit, die von keinem mathematischen Interesse ist. ("Ein Mensch übersieht leicht, was ein anderer schwer oder gar nicht übersieht" etc. etc..)

Die Annahme ist, daß die Definitionen nur zur Abkürzung des Ausdrucks dienen, zur Bequemlichkeit des Rechnenden; während sie doch ein Teil der Rechnung sind. Mit ihrer Hilfe werden Ausdrücke erzeugt, die ohne ihre Hilfe nicht erzeugt werden könnten.

II

1939–40

1. 'A mathematical proof must be perspicuous.' Only a structure whose reproduction is an easy task is called a "proof". It must be possible to decide with certainty whether we really have the same proof twice over, or not. The proof must be a configuration whose exact reproduction can be certain. Or again: we must be sure we can exactly reproduce what is essential to the proof. It may for example be written down in two different handwritings or colours. What goes to make the reproduction of a proof is not anything like an exact reproduction of a shade of colour or a hand-writing.

It must be easy to write down *exactly* this proof again. This is where a written proof has an advantage over a drawing. The essentials of the latter have often been misunderstood. The drawing of a Euclidian proof may be inexact, in the sense that the straight lines are not straight, the segments of circles not exactly circular, etc. etc. and at the same time the drawing is still an exact proof; and from this it can be seen that this drawing does not—e.g.—demonstrate that such a construction results in a polygon with five equal sides; that what it proves is a proposition of geometry, not one about the properties of paper, compass, ruler and pencil.

[Connects with: proof a *picture* of an experiment.]

2. I want to say: if you have a proof-pattern that cannot be taken in, and by a change in notation you turn it into one that can, then you are producing a proof, where there was none before.

Now let us imagine a proof for a Russellian proposition stating an addition like '$a + b = c$', consisting of a few thousand signs. You will say: Seeing whether this proof is correct or not is a purely external difficulty, of no mathematical interest. ("One man takes in easily what someone else takes in with difficulty or not at all" etc. etc..)

The assumption is that the definitions serve merely to abbreviate the expression for the convenience of the calculator; whereas they are part of the calculation. By their aid expressions are produced which could not have been produced without it.

3. Wie ist es aber damit: "Man kann zwar im Russellschen Kalkül nicht 234 mit 537 multiplizieren—im gewöhnlichen Sinn—aber es gibt eine Russellsche Rechnung, die dieser Multiplikation entspricht."—Welcher Art ist diese Entsprechung? Es könnte so sein: Man kann auch im Russellschen Kalkül diese Multiplikation ausführen, nur in einem andern Symbolismus—wie wir ja auch sagen würden, wir könnten sie auch in einem andern Zahlensystem ausführen. Wir könnten dann also z.B. die praktischen Aufgaben, zur deren Lösung man jene Multiplikation benützt, auch durch die Rechnung im Russellschen Kalkül lösen, nur umständlicher.

Denken wir uns nun die Kardinalzahlen erklärt als 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, und so fort. Du sagst, die Definitionen, welche die Ziffern des Dezimalsystems einführen, dienen bloß zur Bequemlichkeit; man könnte die Rechnung 703000 × 40000101 auch in jener langwierigen Schreibweise ausführen. Aber stimmt das?—"Freilich stimmt es! Ich kann doch eine Rechnung in jener Notation anschreiben, konstruieren, die der Rechnung in der Dezimalnotation entspricht."—Aber wie weiß ich, daß sie ihr entspricht?—Nun, weil ich sie nach einer gewissen Methode aus der andern abgeleitet habe.—Aber wenn ich sie nun nach einer halben Stunde wieder anschaue, kann sie sich da nicht verändert haben? Sie ist ja nicht übersehbar.

Ich frage nun: Könnten wir uns von der Wahrheit des Satzes 7034174 + 6594321 = 13628495 auch durch einen Beweis überzeugen, der in der ersten Notation geführt wäre?—Gibt es so einen Beweis dieses Satzes?—Die Antwort ist: nein.

4. Aber lehrt uns Russell nicht doch *eine* Art des Addierens?

Angenommen wir bewiesen auf Russell's Methode, daß $(\exists a \ldots g)(\exists a \ldots l) \supset (\exists a \ldots s)$ eine Tautologie ist; könnten wir nun unser Resultat dahin ausdrücken, $g + l$ sei s? Das setzt doch voraus, daß ich die drei Stücke des Alphabets als Repräsentanten des Beweises nehmen kann. Aber zeigt denn das Russell's Beweis? Den Russellschen Beweis hätte ich doch offenbar mit solchen Gruppen von Zeichen in den Klammern führen können, deren Reihenfolge für mich nichts Charakteristisches gehabt hätten, so daß es nicht möglich gewesen wäre, die Zeichengruppe in einer Klammer durch ihr letztes Glied zu repräsentieren.

Angenommen sogar, der Russellsche Beweis werde mit einer Notation der Art $x_1 x_2 \ldots x_{10} x_{11} \ldots x_{100} \ldots$ als in der Dezimalnotation geführt, und es seien 100 Glieder in der ersten, 300 Glieder in der zweiten und 400 Glieder in der dritten Klammer, zeigt der Beweis selbst dann, daß 100 + 300 = 400 ist?—Wie, wenn dieser Beweis

3. But how about the following: "While it is true that we cannot—in the ordinary sense—multiply 234 by 537 in the Russellian calculus, still there is a Russellian calculation corresponding to this multiplication."—What kind of correspondence is this? It might be like this: we can carry out this multiplication in the Russellian calculus too, only in a different symbolism,—just as, as we should certainly say, we can carry it out in a different number system. In that case, then, we could e.g. solve the practical problems for which we use that multiplication by means of the calculation in the Russellian calculus too, only in a more roundabout way.

Now let us imagine the cardinal numbers explained as 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, and so on. You say that the definitions introducing the figures of the decimal system are a mere matter of convenience; the calculation 703000 × 40000101 could be done in that wearisome notation too. But is that true?—"Of course it's true! I can surely write down, construct, a calculation in that notation corresponding to the calculation in the decimal notation."—But how do I know that it corresponds to it? Well, because I have derived it from the other by a given method.—But now if I look at it again half an hour later, may it not have altered? For one cannot command a clear view of it.

Now I ask: could we also find out the truth of the proposition 7034174 + 6594321 = 13628495 by means of a proof carried out in the first notation?—Is there such a proof of this proposition?—The answer is: no.

4. But still doesn't Russell teach us *one* way of adding?

Suppose we proved by Russell's method that $(\exists\ a \ldots g)$ $(\exists\ a \ldots l) \supset (\exists\ a \ldots s)$ is a tautology; could we reduce our result to $g + l$'s being s? Now this presupposes that I can take the three bits of the alphabet as representatives of the proof. But does Russell's proof shew this? After all I could obviously also have carried out Russell's proof with groups of signs in the brackets whose sequence made no characteristic impression on me, so that it would not have been possible to represent the group of signs between brackets by its last term.

Even assuming that the Russellian proof were carried out with a notation such as $x_1 x_2 \ldots x_{10} x_{11} \ldots x_{100} \ldots$ as in the decimal notation, and there were 100 members in the first pair of brackets, 300 in the second and 400 in the third, does the proof itself shew that 100 + 300 einmal zu diesem, einmal zu einem andern Resultat führte, zum Beispiel $100 + 300 = 420$? Was bedarf es, um zu sehen, daß das Resultat des Beweises, wenn er richtig geführt ist, immer nur von den letzten Ziffern der ersten zwei Klammern abhängt?

Aber für kleine Zahlen lehrt uns doch Russell addieren; denn dann übersehen wir eben die Zeichengruppen in den Klammern und können *sie* als Zahlzeichen nehmen; zum Beispiel '*xy*', '*xyz*', '*xyzuv*'.

Russell lehrt uns also einen anderen Kalkül, um von 2 und 3 zu 5 zu gelangen; und das stimmt auch dann, wenn wir sagen, der logische Kalkül sei nur—Fransen, die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.

Die *Anwendung* der Rechnung muß für sich selber sorgen. Und das ist, was am 'Formalismus' richtig ist.

Die Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik soll die Applikation der Arithmetik zeigen; gleichsam das Ansatzstück, mit welchem sie an ihrer Anwendung angebracht ist. So als zeigte man Einem erst eine Trompete ohne das Mundstück—und nun das Mundstück, welches uns lehrt, wie eine Trompete verwendet, mit dem menschlichem Körper in Kontakt gebracht wird. Das Ansatzstück aber, das uns Russell gibt, ist einerseits zu eng, anderseits zu weit—zu allgemein und zu speziell. Die Rechnung sorgt für ihre eigene Anwendung.

Wir dehnen unsre Ideen von den Rechnungen mit kleinen Zahlen auf die mit großen Zahlen aus, ähnlich wie wir uns vorstellen, daß, wenn die Distanz von hier zur Sonne mit dem Zollstock gemessen werden *könnte*, dann eben das herauskäme, was wir heute auf ganz andere Art herausbringen. D.h., wir sind geneigt, die Längenmessung mit dem Zollstab zum Modell zu nehmen auch für die Messung des Abstands zweier Sterne.

Und man sagt, etwa in der Schule: "Wenn wir uns Zollstäbe von hier bis zur Sonne gelegt denken, . . ." und scheint damit zu erklären, was wir unter dem Abstand zwischen Sonne und Erde verstehen. Und die Verwendung eines solchen Bildes ist ganz in Ordnung, so lange es uns klar ist, daß wir den Abstand von uns zur Sonne messen können, und daß wir ihn nicht mit Zollstäben messen können.

5. Wie, wenn jemand sagen würde: "Der eigentliche Beweis von $1000 + 1000 = 2000$ ist doch erst der Russellsche, der zeigt, daß der Ausdruck . . . eine Tautologie ist"? Kann ich denn nicht beweisen, daß eine Tautologie herauskommt, wenn ich in den beiden ersten Klammern je 1000 Glieder und in der dritten 2000 habe? Und wenn

= 400?—What if this proof led at one time to this result, and at another to a different one, for example 100 + 300 = 420? What is needed in order to see that the result of the proof, if it is correctly carried out, always depends solely on the last figures of the first two pairs of brackets?

But still for small numbers Russell does teach us to add; for then we take the groups of signs in the brackets in at a glance and we can take *them* as numerals; for example '*xy*', '*xyz*', '*xyzuv*'.

Thus Russell teaches us a new calculus for reaching 5 from 2 and 3; and that is true even if we say that a logical calculus is only—frills tacked on to the arithmetical calculus.

The *application* of the calculation must take care of itself. And that is what is correct about 'formalism'.

The reduction of arithmetic to symbolic logic is supposed to shew the point of application of arithmetic, as it were the attachment by means of which it is plugged in to its application. As if someone were shewn, first a trumpet without the mouthpiece—and then the mouthpiece, which shews how a trumpet is used, brought into contact with the human body. But the attachment which Russell gives us is on the one hand too narrow, on the other hand too wide; too general and too special. The calculation takes care of its own application.

We extend our ideas from calculations with small numbers to ones with large numbers in the same kind of way as we imagine that, if the distance from here to the sun *could* be measured with a footrule, then we should get the very result that, as it is, we get in a quite different way. That is to say, we are inclined to take the measurement of length with a footrule as a model even for the measurement of the distance between two stars.

And one says, e.g. at school: "If we imagine rulers stretching from here to the sun . . ." and seems in this way to explain what we understand by the distance between the sun and the earth. And the use of such a picture is all right, so long as it is clear to us that we can measure the distance from us to the sun, and that we cannot measure it with footrules.

5. Suppose someone were to say: "The only real proof of 1000 + 1000 = 2000 is after all the Russellian one, which shews that the expression . . . is a tautology"? For can I not prove that a tautology results if I have 1000 members in each of the two first pairs of brackets

ich dies beweisen kann, so kann ich das als Beweis des arithmetischen Satzes ansehen.

In der Philosophie ist es immer gut, statt einer Beantwortung einer Frage eine *Frage* zu setzen.

Denn eine Beantwortung der philosophischen Frage kann leicht ungerecht sein; ihre Erledigung mittels einer andern Frage ist es nicht.

Soll ich also zum Beispiel hier eine *Frage* setzen statt der Antwort, man könne jenen arithmetischen Satz mit Russell's Methode nicht beweisen?

6. Der Beweis, daß $\overset{1}{(\quad)}\overset{2}{(\quad)} \supset \overset{3}{(\quad)}$ eine Tautologie ist, besteht darin, daß man immer ein Glied der dritten Klammer für ein Glied von (1) oder (2) abstreicht. Und es gibt ja viele Arten und Weisen dieses Kollationierens. Oder man könnte auch sagen: Es gibt viele Arten und Weisen, das Gelingen der 1-1 Zuordnung festzustellen. Eine Art wäre z.B. sternförmige Muster, eines für die linke, eines für die rechte Seite der Implikation zu konstruieren und diese wieder dadurch zu vergleichen, daß man ein Ornament aus beiden bildet.

Man könnte also die Regel geben: "Wenn du wissen willst, ob die Zahlen *A* und *B* zusammen wirklich *C* ergeben, schreib einen Ausdruck der Form . . . an und ordne die Variablen in den Klammern einander zu, indem du den Beweis dafür anschreibst (oder anzuschreiben trachtest), daß der Ausdruck eine Tautologie ist."

Mein Einwand dagegen ist nun *nicht*, daß es willkürlich ist, gerade diese Art des Kollationierens vorzuschreiben, sondern, daß man auf diese Weise nicht feststellen kann, daß $1000 + 1000 = 2000$ ist.

7. Denke, du hättest eine meilenlange 'Formel' angeschrieben, und zeigtest durch Transformation, daß sie tautologisch ist ('wenn *sie* sich inzwischen nicht verändert hat' müßte man sagen). Nun *zählen* wir die Glieder in den Klammern oder teilen sie ab und machen den Ausdruck übersichtlich, und es zeigt sich, daß in der ersten Klammer 7566, in der zweiten 2434, in der dritten 10000 Glieder stehen. Habe ich nun gezeigt, daß $2434 + 7566 = 10000$ ist?—Das kommt drauf an—könnte man sagen—ob du sicher bist, daß das Zählen wirklich die Zahlen der Glieder ergeben hat, die während des Beweises in den Klammern standen.

Könnte man so sagen: "Russell lehrt uns in die dritte Klammer so viele Variablen schreiben als in den beiden ersten zusammen stehen"? Aber eigentlich: er lehrt uns für je eine Variable in (1) und in (2) eine Variable in (3) schreiben.

and 2000 in the third? And if I can prove that, then I can look at it as a proof of the arithmetical proposition.

In philosophy it is always good to put a *question* instead of an answer to a question.

For an answer to the philosophical question may easily be unfair; disposing of it by means of another question is not.

Then should I put a *question* here, for example, instead of the answer that that arithmetical proposition cannot be proved by Russell's method?

6. The proof that $\overset{1}{(\quad)}\,\overset{2}{(\quad)} \supset \overset{3}{(\quad)}$ is a tautology consists in always crossing out a term of the third pair of brackets for a term of (1) or (2). And there are many methods for such collating. Or one might even say: there are many ways of establishing the success of a 1-1 correlation. One way, for example, would be to construct a star-shaped pattern for the left-hand side of the implication and another one for the right-hand side and then to compare these in their turn by making an ornament out of the two of them.

Thus the rule could be given: "If you want to know whether the numbers A and B together actually yield C, write down an expression of the form . . . and correlate the variables in the brackets by writing down (or trying to) the proof that the expression is a tautology".

My objection to this is *not* that it is arbitrary to prescribe just this way of collating, but that it cannot be established in this way that $1000 + 1000 = 2000$.

7. Imagine that you had written down a 'formula' a mile long, and you shewed by transformation that it was tautologous ('if *it* has not altered meanwhile', one would have to say). Now we *count* the terms in the brackets or we divide them up and make the expression into one that can be taken in, and it comes out that there are 7566 terms in the first pair of brackets, 2434 in the second, 10000 in the third. Now have I proved that $2434 + 7566 = 10000$?—That depends—one might say—on whether you are certain that the counting has really yielded the number of terms which stood between the brackets in the course of the proof.

Could one say: "Russell teaches us to write as many variables in the third pair of brackets as were in the first two together"? But really: he teaches us to write a variable in (3) for every variable in (1) and (2).

Aber lernen wir dadurch, welche Zahl die Summe zweier gegebener Zahlen ist? Vielleicht sagt man: "Freilich, denn in der dritten Klammer steht nun das Paradigma, Urbild der neuen Zahl". Aber inwiefern ist ||||||||||||||| das Paradigma einer Zahl? Bedenke, wie man es als solches verwenden kann.

8. Die Russellsche Tautologie, die dem Satz $a + b = c$ entspricht, zeigt uns vor allem nicht in welcher Notation die Zahl c zu schreiben ist, und es ist kein Grund, warum sie nicht in der Form $a + b$ geschrieben werden soll.—Denn Russell lehrt uns ja nicht die Technik des Addierens, etwa, im Dezimalsystem.—Aber könnten wir sie vielleicht aus seiner Technik ableiten?

Fragen wir einmal so: Kann man die Technik des Dezimalsystems aus der des Systems 1, $1 + 1$, $(1 + 1) + 1$, etc. ableiten?

Könnte man diese Frage nicht auch so stellen: Wenn man eine Rechentechnik in dem einen System und eine im andern System hat,—wie zeigt man, daß die beiden äquivalent sind?

9. "Ein Beweis soll nicht nur zeigen, daß es so ist, sondern daß es so sein muß."

Unter welchen Umständen zeigt dies das Zählen?

Man möchte sagen: "Wenn die Ziffern und das Gezählte ein einprägsames Bild ergeben. Wenn dieses Bild nun statt jedes neuen Zählens dieser Menge gebraucht wird."—Aber hier scheinen wir nur von *räumlichen* Bildern zu reden: wenn wir aber eine Reihe von Wörtern auswendig wissen und nun zwei solche Reihen einander eins zu eins zuordnen, indem wir zum Beispiel sagen: "der erste—Montag; der zweite—Dienstag; der dritte—Mittwoch; etc."—können wir so nicht *beweisen*, daß von Montag zum Donnerstag vier Tage sind?

Es fragt sich eben: Was nennen wir ein "einprägsames Bild"? Was ist das Kriterium davon, daß wir es uns eingeprägt haben? Oder ist die Antwort hierauf: "Daß wir es als Paradigma der Identität benützen!"?

10. Wir machen nicht *Versuche* an einem Satz oder Beweis, um seine Eigenschaften festzustellen.

Wie reproduzieren wir, kopieren wir einen Beweis?—Nicht zum Beispiel, indem wir Messungen an ihm anstellen.

Wie, wenn ein Beweis so ungeheuer lang wäre, daß man ihn unmöglich übersehen könnte? Oder sehen wir einen andern Fall an:

But do we learn from this what number is the sum of two given numbers? Perhaps it is said: "Of course, for in the third pair of brackets we have the paradigm, the prototype of the new number". But in what sense is | | | | | | | | | | | | | | | | the paradigm of a number? Consider how it can be used as such.

8. Above all, the Russellian tautology corresponding to the proposition $a + b = c$ does not shew us in what notation the number c is to be written, and there is no reason why it should not be written in the form $a + b$.—For Russell does not teach us the technique of, say, adding in the decimal system.—But could we perhaps derive it from his technique?

Let us just ask the following question: Can one derive the technique of the decimal system from that of the system $1, 1 + 1, (1 + 1) + 1$, etc.?

Could this question not also be formulated as follows: if one has one technique of calculation in the one system and one in the other,—how is it shewn that the two are equivalent?

9. "A proof ought to shew not merely that this is how it is, but this is how it has to be."

In what circumstances does counting shew this?

One would like to say: "When the figures and the thing being counted yield a memorable configuration. When this configuration is now used in place of any fresh counting."—But here we seem to be talking only of *spatial* configurations: but if we know a series of words by heart and then co-ordinate two such series, one to one, saying for example: "First—Monday; second—Tuesday; third—Wednesday; etc."—can we not *prove* in this way that from Monday to Thursday is four days?

For the question is: What do we call a "memorable configuration"? What is the criterion for its being impressed on our minds? Or is the answer to that: "That we use it as a paradigm of identity!"?

10. We do not make *experiments* on a sentence or a proof in order to establish its properties.

How do we reproduce, how do we copy, a proof?—Not e.g. by taking measurements of it.

Suppose a proof were so hugely long that it could not possibly be taken in? Or let us look at a different case: Let there be a long row of

Man habe als Paradigma der Zahl, die wir 1000 nennen, eine lange Reihe von Strichen in einen harten Fels gegraben. Diese Reihe nennen wir die Urtausend und um zu erfahren, ob tausend Menschen auf einem Platz sind, ziehen wir Striche oder spannen Schnüre (1-1 Zuordnung).

Hier hat nun das Zahlzeichen für 1000 nicht die Identität einer Gestalt sondern eines physikalischen Gegenstandes. Wir könnten uns ähnlich eine Ur-Hundert etc. denken und einen Beweis, daß $10 \times 100 = 1000$ ist, den wir nicht übersehen könnten.

Die Ziffer für 1000 im $1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ System kann nicht durch ihre *Gestalt* erkannt werden.

11. ||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||

Ist diese Figur ein Beweis für $27 + 16 = 43$, weil man zu '27' kommt, wenn man die Striche der linken Seite zählt, zu '16' auf der rechten Seite, und zu '43', wenn man die ganze Reihe zählt?

Worin liegt hier das Seltsame—wenn man die Figur den Beweis dieses Satzes nennt? Doch in der Art, wie dieser Beweis zu reproduzieren oder wiederzuerkennen ist; darin, daß er keine charakteristische visuelle Gestalt hat.

Wenn nun jener Beweis auch keine visuelle Gestalt hat, so kann ich ihn dennoch genau kopieren (reproduzieren)—ist die Figur also nicht doch ein Beweis? Ich könnte ihn etwa in ein Stahlstück einritzen und von Hand zu Hand geben lassen. Ich würde also Einem sagen: "Hier hast du den Beweis, daß $27 + 16 = 43$ ist."——Nun, kann man nicht *doch* sagen: er beweise den Satz mit Hilfe der Figur? Doch; aber die Figur ist nicht der Beweis.

Das aber würde man doch einen Beweis von $250 + 3220 = 3470$ nennen: Man zählt über 250 hinaus und fängt zugleich auch bei 1 zu zählen an und ordnet die beiden Zählungen einander zu:

$$\begin{array}{ccc} 251 & \ldots\ldots & 1 \\ 252 & \ldots\ldots & 2 \\ 253 & \ldots\ldots & 3 \\ & \text{etc.} & \\ 3470 & \ldots\ldots & 3220 \end{array}$$

Man könnte das einen Beweis nennen, der durch 3220 Stufen fortschreitet. Das ist doch ein Beweis—und kann man ihn übersichtlich nennen??

12. Was ist die Erfindung des Dezimalsystems eigentlich? Die Erfindung eines Systems von Abkürzungen——aber was ist das System der Abkürzungen? Ist es bloß das System der neuen Zahlen oder auch ein System ihrer Anwendungen zur Abkürzung? Und ist es das Zweite, dann ist es ja eine neue Anschauungsart des alten Zeichensystems.

strokes engraved in hard rock which is our paradigm for the number that we call 1000. We call this row the proto-thousand and if we want to know whether there are a thousand men in a square, we draw lines or stretch threads. (1-1 correlation.)

Now here the sign of the number 1000 has the identity, not of a shape, but of a physical object. We could imagine a 'proto-hundred' similarly, and a proof, which we could not take in at a glance, that $10 \times 100 = 1000$.

The figure for 1000 in the system of $1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ cannot be recognized by its *shape*.

11. ||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||

Is this pattern a proof of $27 + 16 = 43$, because one reaches '27' if one counts the strokes on the left-hand side, '16' on the right-hand side, and '43' when one counts the whole row?

Where is the queerness of calling the pattern the proof of this proposition? It lies in the kind of way this proof is to be reproduced or known again; in its not having any characteristic visual shape.

Now even if that proof has not any such visual shape, still I can copy (reproduce) it exactly—so isn't the figure a proof after all? I might e.g. have it engraved on a bit of steel and passed from hand to hand. So I should tell someone: "Here you have the proof that $27 + 16 = 43$".—Well, can't one say *after all* that he proves the proposition with the aid of the pattern? Yes; but the pattern is not the proof.

This, however, would surely be called a proof of $250 + 3220 = 3470$: one counts on from 250 and at the same time begins counting from 1 and co-ordinates the two counts:

$$
\begin{array}{c}
251 \ldots\ldots 1 \\
252 \ldots\ldots 2 \\
253 \ldots\ldots 3 \\
\text{etc.} \\
3470 \ldots\ldots 3220
\end{array}
$$

That could be called a proof in 3220 steps. It is surely a proof—and can it be called perspicuous?

12. What is the invention of the decimal system really? The invention of a system of abbreviations——but what is the system of the abbreviations? Is it simply the system of the new signs or is it also a system of applying them for the purpose of abbreviation? And if it is the latter, then it *is* a new way of looking at the old system of signs.

Können wir, vom 1 + 1 + 1 ... System kommend, durch bloße Abkürzungen der Schreibweise im Dezimalsystem rechnen lernen?

13. Angenommen ich habe nach Russell einen Satz der Form $(\exists xyz \ldots)(\exists uvw \ldots) \supset (\exists abc \ldots)$ bewiesen—und nun 'mache ich ihn übersichtlich', indem ich über die Variablen Zeichen x_1, x_2, $x_3 \ldots$ schreibe—soll ich nun sagen, ich habe nach Russell einen arithmetischen Satz im Dezimalsystem bewiesen?

Aber jedem Beweis im Dezimalsystem entspricht doch einer im Russellschen System—Woher wissen wir, daß es so ist? Lassen wir die Intuition beiseite.—Aber man kann es beweisen.—

Wenn man eine Zahl im Dezimalsystem aus 1, 2, 3, ... 9, 0 definiert und die Zeichen 0, 1 ..., 9 aus 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ..., kann man dann durch die rekursive Erklärung des Dezimalsystems hindurch von irgend einer Zahl zu einem Zeichen der Form 1 + 1 + 1 ... gelangen?

Wie, wenn Einer sagte: Die Russellsche Arithmetik stimmt mit der gewöhnlichen bis zu Zahlen unter 10^{10} überein; dann aber weicht sie von ihr ab. Und nun führt er uns einen R-Beweis dafür vor, daß $10^{10} + 1 = 10^{10}$ ist. Warum soll ich nun einem solchen Beweis nicht trauen? Wie wird man mich davon überzeugen, dass ich mich im R-Beweis verrechnet haben muß?
Brauche ich denn aber einen Beweis aus einem andern System, um mich zu überzeugen, ob ich mich in dem ersten Beweis verrechnet habe? Genügt es nicht, daß ich diesen Beweis übersehbar anschreibe?

14. Liegt denn nicht meine ganze Schwierigkeit darin, einzusehen, wie man, ohne aus Russell's logischen Kalkül herauszutreten, zum Begriff der *Menge der Variablen* im Ausdruck '$(\exists xyz \ldots)$' kommen kann dort, wo dieser Ausdruck nicht übersehbar ist?—
Nun kann man ihn aber doch übersehbar machen, indem man schreibt: $(\exists x_1, x_2, x_3 \ldots)$. Und dennoch verstehe ich etwas nicht: man hat doch nun das Kriterium für die Identität so eines Ausdrucks geändert. Ich sehe jetzt auf andere Weise, daß die Menge der Zeichen in zwei solchen Ausdrücken dieselbe ist.

Ich bin eben versucht zu sagen: Russell's Beweis kann wohl Stufe für Stufe weitergehen, aber am Schluß wisse man nicht recht, was man bewiesen habe—wenigstens nicht nach den alten Kriterien. Indem ich den Russellschen Beweis übersichtlich mache, beweise ich etwas über diesen Beweis.

Can we start from the system of 1 + 1 + 1 . . . and learn to calculate in the decimal system through mere abbreviations of the notation?

13. Suppose that following Russell I have proved a proposition of the form $(\exists\, xyz \ldots)(\exists\, uvw \ldots) \supset (\exists\, abc \ldots)$—and now 'I make it perspicuous' by writing signs $x_1, x_2, x_3 \ldots$ over the variables—am I to say that following Russell I have proved an arithmetical proposition in the decimal system?

But for every proof in the decimal system there is surely a corresponding one in Russell's system!—How do we know there is? Let us leave intuition on one side.—But it can be proved.—

If a number in the decimal system is defined in terms of 1, 2, 3, . . . 9, 0, and the signs 0, 1 . . . 9 in terms of 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, . . . can one then use the recursive explanation of the decimal system to reach a sign of the form 1 + 1 + 1 . . . from any number?

Suppose someone were to say: Russellian arithmetic agrees with ordinary arithmetic up to numbers less than 10^{10}; but then it diverges from it. And now he produces a Russellian proof that $10^{10} + 1 = 10^{10}$. Now why should I not trust such a proof? How will anybody convince me that I must have miscalculated in the Russellian proof?

But then do I need a proof from another system in order to ascertain whether I have miscalculated in the first proof? Is it not enough for me to write down that proof in a way that makes it possible to take it in?

14. Is not my whole difficulty one of seeing how it is possible, without abandoning Russell's logical calculus, to reach the concept of the *set of variables* in the expression '$(\exists\, xyz \ldots)$', where this expression cannot be taken in?—

Well, but it can be made surveyable by writing: $(\exists\, x_1, x_2, x_3$, etc.). And still there is something that I do not understand: the criterion for the identity of such an expression has now surely been changed: I now see in a different way that the set of signs in two such expressions is the same.

What I am tempted to say is: Russell's proof can indeed be continued step by step, but at the end one does not rightly know what one has proved—at least not by the old criteria. By making it possible to command a clear view of the Russellian proof, I prove something about this proof.

Ich will sagen: man brauche die Russellsche Rechentechnik gar nicht anzuerkennen—und könne mit einer andern Rechentechnik beweisen, daß es einen Russellschen Beweis des Satzes geben *müsse*. Dann aber ruht der Satz freilich nicht mehr auf dem R-Beweis.

Oder: Daß man sich zu jedem bewiesenen Satz der Form $m + n = l$ einen Russellschen Beweis vorstellen kann, zeigt nicht, daß der Satz auf diesem Beweis ruht. Denn der Fall ist denkbar, daß man den R-Beweis eines Satzes vom R-Beweis eines andern Satzes gar nicht unterscheiden kann und nur darum sagt, sie seien verschieden, weil sie die Übersetzungen zweier erkennbar verschiedener Beweise sind.

Oder: Etwas hört auf, Beweis zu sein, wenn es aufhört, Paradigma zu sein, z.B. Russell's logischer Kalkül; und anderseits ist jeder andere Kalkül annehmbar, der uns als Paradigma dient.

15. Es ist eine Tatsache, daß verschiedene Methoden der Zählung so gut wie immer übereinstimmen.

Wenn ich die Felder eines Schachbretts zähle, komme ich so gut wie immer zu '64'.

Wenn ich zwei Reihen von Wörtern auswendig weiß, z.B. Zahlwörter und das Alphabet, und ich ordne sie nun einander 1-1 zu

$$\begin{array}{cc} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \\ \multicolumn{2}{c}{\text{etc.}} \end{array}$$

so komme ich bei 'z' so gut wie immer zu '26'.

Es gibt so etwas wie: eine Reihe von Wörtern auswendig können. Wann sagt man, ich wisse das Gedicht . . . auswendig? Die Kriterien sind ziemlich kompliziert. Übereinstimmung mit dem gedruckten Texte ist eines. Was müßte geschehen, das mich zweifeln machte, daß ich wirklich das *ABC* auswendig weiß? Es ist schwer vorzustellen.

Aber ich verwende nun das Aufsagen oder Anschreiben aus dem Gedächtnis einer Wortfolge als Kriterium der Zahlengleichheit, Mengengleichheit.

Soll ich nun sagen: Das macht ja alles nichts—die Logik bleibt doch der Grundkalkül, nur wird freilich, ob ich zweimal dieselbe Formel vor mir habe, von Fall zu Fall verschieden festgestellt?

16. Es ist nicht die Logik, die mich zwingt—möchte ich sagen—einen Satz von der Form $(\exists\quad)(\exists\quad) \supset (\exists\quad)$ anzuerkennen, wenn in der ersten beiden Klammern je eine Million Variablen ist und in der

I want to say: one need not acknowledge the Russellian technique of calculation at all—and can prove by means of a different technique of calculation that there *must* be a Russellian proof of the proposition. But in that case, of course, the proposition is no longer based upon the Russellian proof.

Or again: its being possible to imagine a Russellian proof for every proved proposition of the form $m + n = l$ does not shew that the proposition is based on this proof. For it is conceivable that the Russellian proof of one proposition should not be distinguishable from the Russellian proof of another and should be called different only because they are the translations of two recognizably different proofs.

Or again: something stops being a proof when it stops being a paradigm, for example Russell's logical calculus; and on the other hand any other calculus which serves as a paradigm is acceptable.

15. It is a fact that different methods of counting practically always agree.

When I count the squares on a chess-board I practically always reach '64'.

If I know two series of words by heart, for example numerals and the alphabet, and I put them into one-one correspondence:

$$\begin{array}{cc} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \end{array}$$
etc.

at 'z' I practically always reach '26'.

There is such a thing as: knowing a series of words by heart. When am I said to know the poem . . . by heart? The criteria are rather complicated. Agreement with a printed text is one. What would have to happen to make me doubt that I really know the *ABC* by heart? It is difficult to imagine.

But I use reciting or writing down a series of words from memory as a criterion for equality of numbers, equality of sets.

Ought I now to say: all that doesn't matter—logic still remains the fundamental calculus, only whether I have the same formula twice is of course differently established in different cases?

16. It is not logic—I should like to say—that compels me to accept a proposition of the form $(\exists \quad)(\exists \quad) \supset (\exists \quad)$, when there are a million variables in the first two pairs of brackets and two million

dritten zwei Millionen. Ich will sagen: die Logik zwänge mich in diesem Falle gar nicht, irgend einen Satz anzuerkennen. Etwas *anderes* zwingt mich, so einen Satz als der Logik gemäß anzuerkennen.

Die Logik zwingt mich nur, sofern mich der logische Kalkül zwingt.

Aber es ist doch dem Kalkül mit 1000000 wesentlich, daß sich diese Zahl muß in eine Summe $1 + 1 + 1 \ldots$ auflösen lassen! Und um sicher zu sein, daß wir die richtige Anzahl von Einsern vor uns haben, können wir die Einser numerieren: $\underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \underset{3}{1} + \underset{4}{1} + \ldots + \underset{1000000.}{1}$ Diese Notation wäre ähnlich der: '100,000.000,000', die ja auch das Zahlzeichen übersehbar macht. Und ich kann mir doch denken, jemand hätte große Summen Geldes in Pfennigen in ein Buch eingetragen, wo sie etwa als 100stellige Zahlen erschienen, mit denen ich nun zu rechnen hätte. Ich finge nun damit an, sie mir in eine übersehbare Notation zu übersetzen, würde sie aber doch 'Zahlzeichen' nennen, sie als Dokumente von Zahlen behandeln. Ja ich würde es sogar als Dokument einer Zahl ansehen, wenn mir einer sagte, N hat soviele Schillinge, als Erbsen in dieses Faß gehen. Anders wieder: "Er hat soviele Schillinge als das Hohe Lied Buchstaben hat."

17. Die Notation '$x_1, x_2, x_3, \ldots$' macht den Ausdruck '$(\exists \ldots)$' zur Gestalt und damit die R-bewiesene Tautologie.

Laß mich so fragen: Ist es nicht denkbar, daß die 1-1 Zuordnung im Russellschen Beweis nicht verläßlich vollzogen werden kann, daß *z.B.*, wenn wir sie zum Addieren benutzen wollen, regelmäßig sich ein dem gewöhnlichen Resultate widersprechendes ergibt, und daß wir das auf eine Ermüdung schieben, die, ohne daß wir's merken, uns gewisse Schritte überspringen läßt? Und könnten wir dann nicht sagen:—wenn wir nur nicht ermüdeten, würde sich das gleiche Resultat ergeben—? Darum, weil es die *Logik* fordert? Fordert sie es denn? Berichtigen wir hier nicht die Logik mit einem anderen Kalkül?

Nehmen wir an, wir nähmen immer 100 Schritte des logischen Kalküls zusammen und erhielten nun verläßliche Resultate, während wir sie nicht erhalten, wenn wir alle Schritte einzeln auszuführen versuchen ——man möchte sagen: die Rechnung basiert ja doch auf Einerschritten, da ein Hundertschritt durch Einerschritte definiert ist.—Die Definition sagt doch: einen Hundertschritt machen, sei dasselbe wie . . ., und doch machen wir den Hundertschritt und *nicht* die hundert Einerschritte.

Beim abgekürzten Rechnen folge ich doch einer *Regel*——und wie wurde diese Regel begründet?——Wie, wenn der gekürzte und der ungekürzte Beweis verschiedene Resultate ergeben?

in the third. I want to say: logic would not compel me to accept any proposition at all in this case. Something *else* compels me to accept such a proposition as in accord with logic.

Logic compels me only so far as the logical calculus compels me.

But surely it is essential to the calculus with 1000000 that this number must be capable of resolution into a sum $1 + 1 + 1 \ldots$, and in order to be certain that we have the right number of units before us, we can number the units: $\begin{array}{cccccccccc} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + \ldots + & 1 \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 1000000. \end{array}$ This notation would be like: '100,000.000,000' which also makes the numeral surveyable. And I can surely imagine someone's having a great sum of money in pennies entered in a book in which perhaps they appear as numbers of 100 places, with which I have to calculate. I should now begin to translate them into a surveyable notation, but still I should call them 'numerals', should treat them as a record of numbers. For I should even regard it as the record of a number if someone were to tell me that N has as many shillings as this vessel will hold peas. Another case again: "He has as many shillings as the Song of Songs has letters".

17. The notation '$x_1, x_2, x_3, \ldots$' gives a shape to the expression '$(\exists \ldots)$', and so to the R-proved tautology.

Let me ask the following question: Is it not conceivable that the 1-1 correlation could not be trustworthily carried out in the Russellian proof, that when, *for example*, we try to use it for adding, we regularly get a result contradicting the usual one, and that we blame this on fatigue, which makes us leave out certain steps unawares? And might we not then say:—if only we didn't get tired we should get the same result—? Because *logic* demands it? Does it demand it, then? Aren't we here rectifying logic by means of another calculus?

Suppose we took 100 steps of the logical calculus at a time and now got trustworthy results, while we don't get them if we try to take all the steps singly——one would like to say: the calculation is still based on unit steps, since 100 steps at a time is defined by means of unit steps.—But the definition says: to take 100 steps at a time is the same thing as . . ., and yet we take the 100 steps at a time and *not* 100 unit steps.

Still, in the shortened calculation I am obeying a *rule*——and how was this rule justified?—What if the shortened and the unshortened proof yielded different results?

18. Was ich sage, kommt doch darauf hinaus: daß ich z.B. '10' als '1 + 1 + 1 + 1 ...' definieren kann und '100 × 2' als '2 + 2 + 2 ...', aber darum nicht notwendig '100 × 10' als '10 + 10 + 10 ...' oder gar als '1 + 1 + 1 + 1 ...'.

Ich kann mich davon, daß 100 × 100 = 10000 ist, durch ein 'abgekürztes' Verfahren überzeugen. Warum soll ich dann nicht *dieses* als das ursprüngliche Beweisverfahren betrachten?

Ein abgekürztes Verfahren lehrt mich, was bei dem unabgekürzten herauskommen *soll*. (Statt das es umgekehrt wäre.)

19. "Die Rechnung basiert ja doch auf den Einerschritten. . . ." Ja; aber auf andre Weise. Der Beweisvorgang ist eben ein anderer.

Ich könnte zum Beispiel sagen: 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und *gleichermaßen* 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Habe ich nicht die Erklärung von 100 auf die successive Addition von 1 basiert? Aber in derselben Weise, als hätte ich 100 Einser addiert? Braucht es in meiner Notation überhaupt ein Zeichen der Form—'1 + 1 + 1 ...' mit 100 Summanden geben?

Die Gefahr scheint hier zu sein, das gekürzte Verfahren als einen blassen Schatten des ungekürzten anzusehen. Die Regel des Zählens ist nicht das Zählen.

20. Worin besteht es, 100 Schritte des Kalküls 'zusammenzunehmen'? Doch darin, daß man nicht die Einerschritte sondern einen andern Schritt als maßgebend ansieht.

Beim gewöhnlichen Addieren von ganzen Zahlen im Dezimalsystem machen wir Einerschritte, Zehnerschritte, etc. . Kann man sagen, das Verfahren basiere auf dem, nur Einerschritte zu machen? Und man könnte es so begründen: Das Resultat der Addition schaut allerdings so aus—'7583', aber die Erklärung dieses Zeichens, seine Bedeutung, die endlich auch in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen muß, ist doch dieser Art: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 u.s.f. Aber ist dem so? Muß das Zahlzeichen so erklärt werden oder diese Erklärung implizite in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen? Ich glaube, wenn wir nachdenken, zeigt sich's, es ist nicht der Fall.

Das Rechnen mit Kurven oder mit dem Rechenschieber.

Freilich wenn wir die eine Art des Rechnens mit der anderen kontrollieren, kommt normalerweise dasselbe heraus. Wenn es nun aber mehrere Arten gibt—wer sagt, wenn sie nicht übereinstimmen, welches die eigentliche, an der Quelle der Mathematik sitzende Rechnungsweise ist?

18. What I am saying surely comes to this: I can e.g. define '10' as '1 + 1 + 1 + 1 . . .' and '100 × 2' as '2 + 2 + 2 . . .' but I cannot therefore necessarily define '100 × 10' as '10 + 10 + 10 . . .', nor yet as '1 + 1 + 1 + 1 . . . .'

I can find out that 100 × 100 equals 10000 by means of a 'shortened' procedure. Then why should I not regard *that* as the original proof procedure?

A shortened procedure tells me what *ought* to come out with the unshortened one. (Instead of the other way round.)

19. "But the calculation is surely based on the unit steps. . . ." Yes; but in a different way. For the procedure of proof is a different one.

I could say for example: 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 *and in like manner* 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Have I not based the definition of 100 on the successive addition of 1? But in the same way as if I had added 100 units? Is there any need at all in my notation for a sign of the form—'1 + 1 + 1 . . .' with 100 components of the sum?

The danger here seems to be one of looking at the shortened procedure as a pale shadow of the unshortened one. The rule of counting is not counting.

20. What does taking 100 steps of the calculus 'at once' consist in? Surely in one's regarding, not the unit step, but a different step, as decisive.

In ordinary addition of whole numbers in the decimal system we make steps in units, steps in tens, etc. Can one say that the procedure is founded on one of only making unit steps? One might justify it like this: the result of the addition does indeed look so—'7583'; but the explanation of this sign, its meaning, which must ultimately receive expression in its application too, is surely of this sort: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 and so on. But is it so? Must the numerical sign be explained in this way, or this explanation receive expression implicitly in its application? I believe that if we reflect it turns out that that is not the case.

Calculating with graphs or with a slide-rule.

Of course when we check the one kind of calculation by the other, we normally get the same result. But if there are several kinds—who says, if they do not agree, which is the proper method of calculation, with its roots at the source of mathematics?

21. Wo ein Zweifel darüber auftauchen kann, ob *dies* wirklich das Bild *dieses* Beweises ist, wo wir bereit sind, die Identität eines Beweises anzuzweifeln, dort hat die Ableitung ihre Beweiskraft verloren. Denn der Beweis dient uns ja als Maß.

Könnte man sagen: Zu einem Beweise gehört ein von uns anerkanntes Kriterium der richtigen Reproduktion des Beweises?

Das heißt z.B.: wir müssen sicher sein können, es muß uns als sicher feststehen, daß wir beim Beweisen kein Zeichen übersehen haben. Daß uns kein Teufelchen betrogen haben kann, indem es Zeichen ohne unser Wissen verschwinden ließ, hinzusetzte, etc..

Man könnte sich so ausdrücken: Wo man sagen kann: "auch wenn uns ein Dämon betrogen hätte, so wäre doch alles in Ordnung", dort hat der Schabernack, den er uns antun wollte, eben seinen Zweck verfehlt.

22. Der Beweis, könnte man sagen, zeigt nicht bloß, *daß* es so ist, sondern: *wie* es so ist. Er zeigt, *wie* 13 + 14 27 ergeben.

"Der Beweis muß übersehbar sein"—heißt: wir müssen bereit sein, ihn als Richtschnur unseres Urteilens zu gebrauchen.

Wenn ich sage "der Beweis ist ein Bild"—so kann man sich ihn als kinematographisches Bild denken.

Den Beweis macht man ein für alle Mal.

Der Beweis muß natürlich vorbildlich sein.

Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind überzeugt, das ein *so* geregeltes Vorgehen immer zu diesem Bild führt.

(Der Beweis führt uns ein synthetisches Faktum vor.)

23. Mit dem Satz, der Beweis sei ein Vorbild,—dürfen wir natürlich nichts Neues sagen.

Der Beweis muß ein Vorgang sein, von dem ich sage: Ja, so muß es sein; das muß herauskommen, wenn ich nach dieser Regel vorgehe.

Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Experiment sein——wird aber dann einfach als Bild genommen.

Wenn ich 200 Äpfel und 200 Äpfel zusammenschütte und zähle, und es kommt 400 heraus, so ist das kein Beweis für $200 + 200 = 400$. Das heißt, wir würden dieses Faktum nicht als Paradigma zur Beurteilung aller ähnlicher Situationen verwenden wollen.

Zu sagen: "diese 200 Äpfel und diese 200 Äpfel geben 400"—sagt:

21. Where a doubt can make its appearance whether *this* is really the pattern of *this* proof, where we are prepared to doubt the identity of the proof, the derivation has lost its proving power. For the proof serves as a measure.

Could one say: it is part of proof to have an accepted criterion for the correct reproduction of a proof?

That is to say, e.g.: we must be able to be certain, it must hold as certain for us, that we have not overlooked a sign in the course of the proof. That no demon can have deceived us by making a sign disappear without our noticing, or by adding one, etc.

One might say: When it can be said: "Even if a demon had deceived us, still everything would be all right", then the prank he wanted to play on us has simply failed of its purpose.

22. Proof, one might say, does not merely shew *that* it is like this, but: *how* it is like this. It shows *how* 13 + 14 yield 27.

"A proof must be capable of being taken in" means: we must be prepared to use it as our guide-line in judging.

When I say "a proof is a picture"—it can be thought of as a cinematographic picture.

We construct the proof once for all.

A proof must of course have the character of a model.

The proof (the pattern of the proof) shews us the result of a procedure (the construction); and we are convinced that a procedure regulated in *this* way always leads to this configuration.

(The proof exhibits a fact of synthesis to us.)

23. When we say that a proof is a model,—we must, of course, not be saying anything new.

Proof must be a procedure of which I say: Yes, this is how it has to be; this must come out if I proceed according to this rule.

Proof, one might say, must originally be a kind of experiment—but is then taken simply as a picture.

If I pour two lots of 200 apples together and count them, and the result is 400, that is not a proof that 200 + 200 = 400. That is to say, we should not want to take this fact as a paradigm for judging all similar situations.

To say: "these 200 apples and these 200 apples come to 400"—

Wenn man sie zusammenschüttet, kommt keiner weg noch dazu, sie verhalten sich *normal*.

24. "Das ist das Vorbild der Addition von 200 und 200"—nicht: "Das ist das Vorbild davon, daß 200 und 200 addiert 400 ergeben". Der Vorgang des Addierens *ergab* allerdings 400, aber dies Resultat nehmen wir nun zum Kriterium der richtigen Addition—oder einfach: der Addition—dieser Zahlen.

Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, wie diese Operationen *ein Ergebnis* haben.

Der 'bewiesene Satz' drückt aus, was aus dem Beweisbild abzulesen ist.

Der Beweis ist unser Vorbild des richtigen Zusammenzählens von 200 Äpfeln und 200 Äpfeln. Das heißt, er bestimmt einen neuen Begriff: 'das Zusammenzählen von 200 und 200 Gegenständen'. Oder man könnte auch sagen: "ein neues Kriterium dafür, daß nichts weggekommen oder dazugekommen ist".

Der Beweis *definiert* das 'richtige Zusammenzählen'.

Der Beweis ist unser Vorbild eines bestimmten *Ergebens*, welches als Vergleichsobjekt (Maßstab) für wirkliche Veränderungen dient.

25. Der Beweis überzeugt uns von etwas——aber nicht der Gemütszustand des Überzeugtseins interessiert uns—sondern die Anwendungen, die diese Überzeugung belegen.

Daher läßt uns die Aussage kalt: der Beweis überzeuge uns von der Wahrheit dieses Satzes,—da dieser Ausdruck der verschiedensten Auslegungen fähig ist.

Wenn ich sage: "der Beweis überzeugt mich von etwas", so muß aber der Satz, der dieser Überzeugung Ausdruck gibt, nicht im Beweise konstruiert werden. Wie wir z.B. multiplizieren, aber nicht notwendigerweise das Ergebnis in Form des Satzes '$\ldots \times \ldots = \ldots$' hinschreiben. Man wird also wohl sagen: die Multiplikation gebe uns diese Überzeugung, ohne das der *Satz*, der sie ausdrückt, je ausgesprochen wird.

Ein psychologischer Nachteil der Beweise, die *Sätze* konstruieren, ist, daß sie uns leichter vergessen lassen, daß der *Sinn* des Resultats nicht aus diesem allein abzulesen ist, sondern aus dem *Beweis*. In dieser Hinsicht hat das Eindringen des Russellschen Symbolismus in die Beweise viel Schaden getan.

Die Russellschen Zeichen hüllen die wichtigen Formen des Beweises means: when one puts them together, none are lost or added, they behave *normally*.

24. "This is the model for the addition of 200 and 200"—not: "this is the model of the fact that 200 and 200 added together yield 400". The process of adding *did* indeed yield 400, but now we take this result as the criterion for the correct addition—or simply: for the addition—of these numbers.

The proof must be our model, our picture, of how these operations have *a result*.

The 'proved proposition' expresses what is to be read off from the proof-picture.

The proof is now our model of correctly counting 200 apples and 200 apples together: that is to say, it defines a new concept: 'the counting of 200 and 200 objects together'. Or, as we could also say: "a new criterion for nothing's having been lost or added".

The proof *defines* 'correctly counting together'.

The proof is our model for a particular *result's being yielded*, which serves as an object of comparison (yardstick) for real changes.

25. The proof convinces us of something——though what interests us is, not the mental state of conviction, but the applications attaching to this conviction.

For this reason the assertion that the proof convinces us of the truth of this proposition leaves us cold,—since this expression is capable of the most various constructions.

When I say: "the proof convinces me of something", still the proposition expressing this conviction need not be constructed in the proof. As e.g. we multiply, but do not necessarily write down the result in the form of the proposition '$\ldots \times \ldots = \ldots$.' So we shall presumably say: the multiplication gives us this conviction without our ever uttering the *sentence* expressing it.

A psychological disadvantage of proofs that construct *propositions* is that they easily make us forget that the *sense* of the result is not to be read off from this by itself, but from the *proof*. In this respect the intrusion of the Russellian symbolism into the proofs has done a great deal of harm.

The Russellian signs veil the important forms of proof as it were gleichsam bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in viele Tücher gewickelt ist.

26. Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir *eine Regel annehmen.*

Nichts ist wahrscheinlicher, als daß der Wortausdruck des Resultats eines mathematischen Beweises dazu angetan ist, uns einen Mythus vorzuspiegeln.

27. Ich will etwa sagen: Wenn auch der bewiesene mathematische Satz auf eine Realität außerhalb seiner selbst zu deuten scheint, so ist er doch nur der Ausdruck der Anerkennung eines neuen Maßes (der Realität).

Wir nehmen also die Konstruierbarkeit (Beweisbarkeit) dieses Symbols (nämlich des mathematischen Satzes) zum Zeichen dafür, daß wir Symbole so und so transformieren sollen.

Wir haben uns im Beweis zu einer Erkenntnis durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist diese Erkenntnis nun frei vom Beweis (ist die Nabelschnur abgeschnitten)?—Nun, der Satz wird jetzt allein und ohne das Anhängsel des Beweises verwendet.

Warum soll ich nicht sagen: ich habe mich im Beweis zu einer *Entscheidung* durchgerungen?

Der Beweis stellt diese Entscheidung in ein System von Entscheidungen.

(Ich könnte natürlich auch sagen: "der Beweis überzeugt mich von der Zweckmäßigkeit dieser Regel". Aber das zu sagen könnte leicht irreführen.)

28. Der durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel, also als Paradigma. Denn nach der Regel *richten* wir uns.

Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, *wie* wir uns nach ihr richten sollen?

Der mathematische Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen SINN hat.

Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben drauf an, *wie* er ihn konstruiert. Manchmal z.B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* und dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz *überzeugen*, so heißt das, daß sie uns dazu bringen muß, diesen Satz so und so anzuwenden. Daß sie uns bestimmen muß, das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen.

to the point of unrecognizability, as when a human form is wrapped up in a lot of cloth.

26. Let us remember that in mathematics we are convinced of *grammatical* propositions; so the expression, the result, of our being convinced is that we *accept a rule*.

Nothing is more likely than that the verbal expression of the result of a mathematical proof is calculated to delude us with a myth.

27. I am trying to say something like this: even if the proved mathematical proposition seems to point to a reality outside itself, still it is only the expression of acceptance of a new measure (of reality).

Thus we take the constructability (provability) of this symbol (that is, of the mathematical proposition) as a sign that we are to transform symbols in such and such a way.

We have won through to a piece of knowledge in the proof? And the final proposition expresses this knowledge? Is this knowledge now independent of the proof (is the navel string cut)?—Well, the proposition is now used by itself and without having the proof attached to it.

Why should I not say: in the proof I have won through to a *decision*?

The proof places this decision in a system of decisions.

(I might of course also say: "the proof convinces me that this rule serves my purpose". But to say this might easily be misleading.)

28. The proposition proved by means of the proof serves as a rule—and so as a paradigm. For we *go by* the rule.

But does the proof only bring us to the point of going by this rule (accepting it), or does it also shew us *how* we are to go by it?

For the mathematical proposition is to shew us what it makes SENSE to say.

The proof constructs a proposition; but the point is *how* it constructs it. Sometimes, for example, it first constructs a *number* and then comes the proposition that there is such a number. When we say that the construction must *convince* us of the proposition, that means that it must lead us to apply this proposition in such-and-such a way. That it must determine us to accept this as sense, that not.

29. Was hat der Zweck einer euklidischen Konstruktion, etwa der Halbierung der Strecke, mit dem Zweck der Ableitung einer Regel aus Regeln mittels logischer Schlüsse gemein?

Das Gemeinsame scheint zu sein, daß ich durch die Konstruktion eines Zeichens die Anerkennung eines Zeichens erzwinge.

Könnte man sagen: "Die Mathematik schafft neue *Ausdrücke*, nicht neue Sätze"??
Insofern nämlich, als die mathematischen Sätze ein für allemal in die Sprache aufgenommene Instrumente sind—und ihr Beweis die Stelle zeigt, an der sie stehen.

Inwiefern sind aber zum Beispiel Russell's Tautologien 'Instrumente der Sprache'?
Russell hätte sie jedenfalls nicht für solche gehalten. Sein Irrtum, wenn ein solcher vorlag, konnte aber nur darin bestehen, daß er auf die *Anwendung* nicht acht hatte.

Der Beweis läßt ein Gebilde aus einem anderen entstehen.
Er führt uns die Entstehung von einem aus anderen vor.
Das ist alles recht gut—aber er leistet doch damit in verschiedenen Fällen ganz Verschiedenes! Was ist das *Interesse* dieser Überleitung?!

Wenn ich auch den Beweis in einem Archiv der Sprache niedergelegt denke—wer sagt, *wie* dies Instrument zu verwenden ist, wozu er dient?

30. Der Beweis bringt mich dazu zu sagen: das *müsse* sich so verhalten.——Nun, das verstehe ich im Fall eines euklidischen Beweises oder eines Beweises von '$25 \times 25 = 625$', aber ist es auch so im Fall eines Russellschen Beweises etwa von '$\vdash p \supset q \,.\, p : \supset : q$'? Was heißt hier 'es *müsse* sich so verhalten', im Gegensatz zu 'es verhält sich so'? Soll ich sagen: "Nun, ich nehme diesen Ausdruck als Paradigma für alle nichtssagenden Sätze dieser Form an"?

Ich gehe den Beweis durch und sage: "Ja, so *muß* es sein; ich muß den Gebrauch meiner Sprache *so* festlegen".

Ich will sagen, daß das *Muß* einem Gleise entspricht, das ich in der Sprache lege.

31. Wenn ich sagte, ein Beweis führe einen neuen Begriff ein, so meinte ich so etwas wie: der Beweis setze ein neues Paradigma zu den Paradigmen der Sprache; ähnlich wie wenn man ein besonderes rötlichblau mischte, die besondere Farbmischung irgendwie festlegte und ihr einen Namen gäbe.

29. What is in common between the purpose of a Euclidean construction, say the bisection of a line, and the purpose of deriving a rule from rules by means of logical inferences?

The common thing seems to be that by the construction of a sign I compel the acceptance of a sign.

Could we say: "mathematics creates new *expressions*, not new propositions"?
Inasmuch, that is, as mathematical propositions are instruments taken up into the language once for all—and their proof shews the place where they stand.

But in what sense are e.g. Russell's tautologies 'instruments of language'?
Russell at any rate would not have held them to be so. His mistake, if there was one, can however only have consisted in his not paying attention to their *application*.

The proof makes one structure generate another.
It exhibits the generation of one from others.
That is all very well—but still it does quite different things in different cases! What is the *interest* of this transition?

Even if I think of a proof as something deposited in the archives of language—who says *how* this instrument is to be employed, what it is for?

30. A proof leads me to say: this *must* be like this.——Now, I understand this in the case of a Euclidean proof or the proof of '25 times 25 = 625', but is it also like this in the case of a Russellian proof, e.g. of '$\vdash p \supset q \,.\, p : \supset : q$'? What does 'it *must* be like this' mean here in contrast with 'it is like this'? Should I say: "Well, I accept this expression as a paradigm for all non-informative propositions of this form"?

I go through the proof and say: "Yes, this is how it *has* to be; I must fix the use of my language in *this* way".

I want to say that the *must* corresponds to a track which I lay down in language.

31. When I said that a proof introduces a new concept, I meant something like: the proof puts a new paradigm among the paradigms of the language; like when someone mixes a special reddish blue, somehow settles the special mixture of the colours and gives it a name.

Aber, wenn wir auch geneigt sind, einen Beweis ein solches neues Paradigma zu nennen—was ist die genaue Ähnlichkeit eines Beweises zu so einem Begriffsvorbild?

Man möchte sagen: der Beweis ändert die Grammatik unserer Sprache, ändert unsere Begriffe. Er macht neue Zusammenhänge, und er schafft den Begriff dieser Zusammenhänge. (Er stellt nicht fest, daß sie da sind, sondern sie sind nicht da, ehe er sie nicht macht.)

32. Welchen Begriff schafft '$p \supset p$'? Und doch ist es mir als könnte man sagen '$p \supset p$' diene uns als Begriffszeichen.

'$p \supset p$' ist eine Formel. Legt eine Formel einen Begriff fest? Man kann sagen: "daraus folgt nach der Formel . . . das und das". Oder auch: "daraus folgt auf die Art . . . das und das". Aber ist das ein Satz, wie ich ihn wünsche? Wie ist es aber damit: "Zieh' daraus die Konsequenz auf die Art . . ."?

33. Wenn ich vom Beweis sage, er sei ein Vorbild (ein Bild), so muß ich es auch von einem Russellschen Pp. sagen können (als der Eizelle eines Beweises).

Man kann fragen: Wie ist man darauf gekommen, den Satz '$p \supset p$' als eine wahre Behauptung auszusprechen? Nun, man hat ihn nicht im praktischen Sprachverkehr gebraucht,—aber dennoch war man geneigt, ihn unter besonderen Umständen (wenn man zum Beispiel Logik betrieb) mit *Überzeugung* auszusprechen.

Wie ist es aber mit '$p \supset p$'? Ich sehe in ihm einen degenerierten Satz, der auf der Seite der Wahrheit ist.

Ich lege ihn als wichtigen Schnittpunkt von sinnvollen Sätzen fest. Ein Angelpunkt der Darstellungsweise.

34. Die Konstruktion des Beweises beginnt mit irgend welchen Zeichen, und unter diesen müssen einige, die 'Konstanten', in der Sprache schon Bedeutung haben. So ist es wesentlich, daß '$\vee$' und '$\sim$' schon eine uns geläufige Anwendung besitzen, und die Konstruktion eines Beweises in der "Principia Mathematica" nimmt ihre Wichtigkeit, ihren Sinn, daher. Die Zeichen aber des Beweises lassen diese Bedeutung *nicht* erkennen.

Die 'Verwendung' des Beweises hat natürlich mit jener Verwendung seiner Zeichen zu tun.

35. Wie gesagt, ich bin ja auch schon von den Pp. Russell's in gewissem Sinne überzeugt.

Die Überzeugung also, die der Beweis hervorbringt, kann nicht nur von der Beweiskonstruktion herrühren.

But even if we are inclined to call a proof such a new paradigm—what is the exact similarity of the proof to such a concept-model?

One would like to say: the proof changes the grammar of our language, changes our concepts. It makes new connexions, and it creates the concept of these connexions. (It does not establish that they are there; they do not exist until it makes them.)

32. What concept is created by '$p \supset p$'? And yet I feel as if it would be possible to say that '$p \supset p$' serves as the sign of a concept.

'$p \supset p$' is a formula. Does a formula establish a concept? One can say: "by the formula . . . such-and-such follows from this". Or again: "such-and-such follows from this in the following way: . . ." But is that the sort of proposition I want? What, however, about: "Draw the consequences of this in the following way: . . ."?

33. If I call a proof a model (a picture), then I must also be able to say this of a Russellian primitive proposition (as the egg-cell of a proof).

It can be asked: how did we come to utter the sentence '$p \supset p$' as a true assertion? Well, it was not used in practical linguistic intercourse,—but still there was an inclination to utter it in particular circumstances (when for example one was doing logic) *with conviction.*

But what about '$p \supset p$'? I see in it a degenerate proposition, which is on the side of truth.

I fix it as an important point to divide significant sentences at. A pivotal point of our method of description.

34. The construction of a proof begins with some signs or other, and among these some, the 'constants', must already have meaning in the language. In this way it is essential that 'v' and '$\sim$' already possess a familiar application, and the construction of a proof in *Principia Mathematica* gets its importance, its sense, from this. But the signs of the proof do *not* enable us to see this meaning.

The 'employment' of the proof has of course to do with that employment of its signs.

35. To repeat, in a certain sense even Russell's primitive propositions convince me.

Thus the conviction produced by a proof cannot simply arise from the proof-construction.

36. Wenn ich das Urmeter in Paris sähe, aber die Institution des Messens und ihren Zusammenhang mit jenem Stab nicht kennte—könnte ich sagen, ich kenne den Begriff des Urmeters?

Ist nicht auch so der Beweis ein Teil einer Institution?

Der Beweis ist ein Instrument—aber warum sage ich: "ein Instrument der Sprache"?

Ist denn die Rechnung notwendigerweise ein Instrument der Sprache?

37. Was ich immer tue, scheint zu sein—zwischen Sinnbestimmung und Sinnverwendung einen Unterschied hervorzuheben.

38. Den Beweis anerkennen: Man kann ihn anerkennen als Paradigma der Figur, die entsteht, wenn *diese* Regeln richtig auf gewisse Figuren angewandt werden. Man kann ihn anerkennen als die richtige Ableitung einer Schlußregel. Oder als eine richtige Ableitung aus einem richtigen Erfahrungssatz; oder als die richtige Ableitung aus einem falschen Erfahrungssatz; oder einfach als die richtige Ableitung aus einem Erfahrungssatz, von dem wir nicht wissen, ob er wahr oder falsch ist.

Kann ich nun aber sagen, daß die Auffassung des Beweises als 'Beweises der Konstruierbarkeit' des bewiesenen Satzes in irgendeinem Sinn eine einfachere, primärere, als jede andre Auffassung ist?

Kann ich also sagen: "Ein jeder Beweis beweist *vor allem*, daß diese Zeichenform herauskommen muß, wenn ich diese Regel auf diese Zeichenformen anwende"? Oder: "Der Beweis beweist vor allem, daß diese Zeichenform entstehen kann, wenn man nach diesen Transformationsregeln mit diesen Zeichen operiert."—

Das würde auf eine geometrische Anwendung deuten. Denn der Satz, dessen Wahrheit, wie ich sage, hier bewiesen ist, ist ein geometrischer Satz—ein Satz Grammatik die Transformierungen von Zeichen betreffend. Man könnte zum Beispiel sagen: es sei bewiesen, daß es Sinn habe zu sagen, jemand habe das Zeichen . . . nach diesen Regeln aus . . . und . . . erhalten; aber keinen Sinn etc. etc..

Oder: Wenn man die Mathematik jedes Inhalts entkleide, so bleibe, daß gewisse Zeichen aus andern nach gewissen Regeln sich konstruieren lassen.—

Das Mindeste, was wir anerkennen müssen, sei: daß dies Zeichen etc. etc.—und diese Anerkennung lege jeder anderen zu Grunde.—

Ich möchte nun sagen: Die Zeichenfolge des Beweises zieht nicht

36. If I were to see the standard metre in Paris, but were not acquainted with the institution of measuring and its connexion with the standard metre—could I say, that I was acquainted with the concept of the standard metre?

Is a proof not also part of an institution in this way?

A proof is an instrument—but why do I say "an instrument of language"?

Is a calculation necessarily an instrument of language, then?

37. What I always do seems to be—to emphasize a distinction between the determination of a sense and the employment of a sense.

38. Accepting a proof: one may accept it as the paradigm of the pattern that arises when *these* rules are correctly applied to certain patterns. One may accept it as the correct derivation of a rule of inference. Or as a correct derivation from a correct empirical proposition; or as the correct derivation from a false empirical proposition; or simply as the correct derivation from an empirical proposition, of which we do not know whether it is true or false.

But now can I say that the conception of a proof as 'proof of constructability' of the proved proposition is in some sense a simpler, more primary, one than any other conception?

Can I therefore say: "Any proof proves *first and foremost* that this formation of signs must result when I apply these rules to these formations of signs"? Or: "The proof proves first and foremost that this formation can arise when one operates with these signs according to these transformation-rules".—

This would point to a geometrical application. For the proposition whose truth, as I say, is proved here, is a geometrical proposition—a proposition of grammar concerning the transformations of signs. It might for example be said: it is proved that it makes *sense* to say that someone has got the sign . . . according to these rules from . . . and . . .; but no sense etc. etc.

Or again: when mathematics is divested of all content, it would remain that certain signs can be constructed from others according to certain rules.—

The least that we have to accept would be: that these signs etc. etc.—and accepting this is a basis for accepting anything else.

I should now like to say: the sequence of signs in the proof does notwendigerweise irgendein Anerkennen nach sich. Wenn wir aber einmal mit dem Anerkennen anfangen, dann braucht es nicht das 'geometrische' zu sein.

Ein Beweis könnte doch aus bloß zwei Stufen bestehen; etwa einem Satz '$(x).fx$' und einem 'fa'—spielt hier das richtige Übergehen nach einer Regel eine wichtige Rolle?

39. *Was* ist unerschütterlich gewiß am Bewiesenen?

Einen Satz als unerschütterlich gewiß anzuerkennen—will ich sagen—heißt, ihn als grammatische Regel zu verwenden: dadurch entzieht man ihn der Ungewißheit.

"Der Beweis muß übersehbar sein" heißt eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich im Beweis ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, daß es sich so ergeben *muß*.

Nicht, daß dies Zuordnen zu diesem Resultat führt, *beweist*—sondern daß wir überredet werden, diese Erscheinungen (Bilder) als Vorlagen zu nehmen dafür, wie es ausschaut, wenn. . . .

Der Beweis ist unser neues Vorbild dafür wie es ausschaut, wenn nichts weg- und nichts dazukommt, wenn wir richtig zählen, etc.. Aber diese Worte zeigen, daß ich nicht recht weiß, wovon der Beweis ein Vorbild ist.

Ich will sagen: mit der Logik der "Principia Mathematica" könnte man eine Arithmetik begründen, in der $1000 + 1 = 1000$ ist; und alles, was dazu nötig ist, wäre die sinnliche Richtigkeit der Rechnungen anzuzweifeln. Wenn wir sie aber nicht anzweifeln, so hat daran nicht unsre Überzeugtheit von der Wahrheit der Logik die Schuld.

Wenn wir beim Beweis sagen: "Das *muß* herauskommen"—so nicht aus Gründen, die wir nicht *sehen*.

Nicht, daß wir dieses Resultat erhalten, sondern, daß es das Ende dieses Weges ist, läßt es uns annehmen.

Das ist der Beweis, was uns überzeugt: Das Bild, was uns nicht überzeugt, ist der Beweis auch dann nicht, wenn von ihm gezeigt werden kann, daß es den bewiesenen Satz exemplifiziert.

Das heißt: es darf keine physikalische Untersuchung des Beweisbildes nötig sein, um uns zu zeigen, was bewiesen ist.

40. Wir sagen von zwei Menschen auf einem Bild nicht *vor allem*, der eine erscheint kleiner als der andre und *erst dann*, er erscheine weiter hinten zu sein. Es ist, kann man sagen, wohl möglich, daß uns

not necessarily carry with it any kind of acceptance. If however we do begin by accepting, this does not have to be 'geometrical' acceptance.

A proof could surely consist of only two steps: say one proposition '$(x).fx$' and one 'fa'—does the correct transition according to a rule play an important part here?

39. *What* is unshakably certain about what is proved?

To accept a proposition as unshakably certain—I want to say—means to use it as a grammatical rule: this removes uncertainty from it.

"Proof must be capable of being taken in" really means nothing but: a proof is not an experiment. We do not accept the result of a proof because it results once, or because it often results. But we see in the proof the reason for saying that this *must* be the result.

What *proves* is not that this correlation leads to this result—but that we are persuaded to take these appearances (pictures) as models for what it is like if. . . .

The proof is our new model for what it is like if nothing gets added and nothing taken away when we count correctly etc.. But these words shew that I do not quite know what the proof is a model of.

I want to say: with the logic of *Principia Mathematica* it would be possible to justify an arithmetic in which $1000 + 1 = 1000$; and all that would be necessary for this purpose would be to doubt the sensible correctness of calculations. But if we do not doubt it, then it is not our conviction of the truth of logic that is responsible.

When we say in a proof: "This *must* come out"—then this is not for reasons that we do not *see*.

It is not our getting this result, but its being the end of this route, that makes us accept it.

What convinces us—*that* is the proof: a configuration that does not convince us is not the proof, even when it can be shewn to exemplify the proved proposition.

That means: it must not be necessary to make a physical investigation of the proof-configuration in order to shew us what has been proved.

40. If we have a picture of two men, we do not say *first* that the one appears smaller than the other, and *then* that he seems to be further away. It is, one can say, perfectly possible that the one figure's being

das Kürzersein gar nicht auffällt sondern *bloß* das Hintenliegen. (Dies scheint mir mit der Frage der 'geometrischen' Auffassung des Beweises zusammen zu hängen.)

41. "Er ist das Vorbild für das, was man so und so nennt."

Von was soll aber der Übergang von '$(x).fx$' auf 'fa' ein Vorbild sein? Höchstens davon, wie von Zeichen der Art '$(x).fx$' geschlossen werden kann.

Das Vorbild dachte ich mir als eine Rechtfertigung, hier aber ist es keine Rechtfertigung. Das Bild $(x).fx \therefore fa$ *rechtfertigt* den Schluß nicht. Wenn wir von einer Rechtfertigung des Schlusses reden wollen, so liegt sie außerhalb dieses Zeichenschemas.

Und doch ist etwas daran, daß der mathematische Beweis einen neuen Begriff schafft.—Jeder Beweis ist gleichsam ein Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung.

Aber zu was ist er ein Bekenntnis? Nur zur *dieser* Verwendung der Übergangsregeln von Formel zu Formel? Oder auch ein Bekenntnis zu den 'Axiomen' in irgend einem Sinn?

Könnte ich sagen: ich bekenne mich zu $p \supset p$ als einer Tautologie?

Ich nehme '$p \supset p$' als Maxime an, etwa des Schließens.

Die Idee, der Beweis schaffe einen neuen Begriff, könnte man ungefähr so ausdrücken: Der Beweis ist nicht seine Grundlagen plus den Schlußregeln, sondern ein *neues* Haus—obgleich ein Beispiel dieses und dieses Stils. Der Beweis ist ein *neues* Paradigma.

Der Begriff, den der Beweis schafft, kann zum Beispiel ein neuer Schlußbegriff sein, ein neuer Begriff des richtigen Schließens. *Warum* ich aber das als *richtiges* Schließen anerkenne, hat seine Gründe außerhalb des Beweises.

Der Beweis schafft einen neuen Begriff—indem er ein neues Zeichen schafft oder ist. Oder—indem er dem Satz, der sein Ergebnis ist, einen neuen Platz gibt. (Denn der Beweis ist nicht eine Bewegung sondern ein Weg.)

42. Es darf nicht *vorstellbar* sein, daß *diese* Substitution in *diesem* Ausdruck etwas anderes ergibt. Oder: ich muß es für nicht vorstellbar erklären. (Das Ergebnis eines Experiments aber kann so und anders ausfallen.)

Man könnte sich doch aber den Fall vorstellen, daß der Beweis sich dem Ansehen nach ändert—er ist in einen Fels gegraben und man sagt, es sei der gleiche, was immer der Anschein sagt.

Sagst du eigentlich etwas anderes als: der Beweis wird als *Beweis* genommen?

shorter should not strike us at all, but only its being behind. (This seems to me to be connected with the question of the 'geometrical' conception of proof.)

41. "It (the proof) is the model for what is called such-and-such."

But what is the transition from '$(x).fx$' to 'fa' supposed to be a model for? At most for how inferences can be drawn from signs like '$(x).fx$'.

I thought of the model as a justification, but here it is not a justification. The pattern $(x).fx \therefore fa$ does not *justify* the conclusion. If we want to talk about a justification of the conclusion, it lies outside this schema of signs.

And yet there is something in saying that a mathematical proof creates a new concept.—Every proof is as it were an avowal of a particular employment of signs.

But what is it an avowal of? Only of *this* employment of the rules of transition from formula to formula? Or is it also an avowal in some sense, of the 'axioms'?

Could I say: I avow $p \supset p$ as a tautology?

I accept '$p \supset p$' as a maxim, e.g. of inference.

The idea that proof creates a new concept might also be roughly put as follows: a proof is not its foundations plus the rules of inference, but a *new* building—although it is an example of such and such a style. A proof is a *new* paradigm.

The concept which the proof creates may for example be a new concept of inference, a new concept of correct inferring. But as for *why* I accept this as *correct* inferring the reasons for that lie outside the proof.

The proof creates a new concept by creating or being a new sign. Or—by giving the proposition which is its result a new place. (For the proof is not a movement but a route.)

42. It must not be *imaginable* for *this* substitution in *this* expression to yield anything else. Or: I must declare it unimaginable. (The result of an experiment, however, can turn out this way or that.)

Still, the case could be imagined in which a proof altered in appearance—engraved in rock, it is stated to be the same whatever the appearance says.

Are you really saying anything but: a proof is taken as *proof*?

Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein. Oder auch: der Beweis ist der *anschauliche* Vorgang.

Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist.

43. Wenn ich sage: "es muß vor allem offenbar sein, daß *diese* Substitution wirklich *diesen* Ausdruck ergibt"—so könnte ich auch sagen: "ich muß es als unzweifelhaft annehmen"—aber dann müssen dafür gute Gründe vorliegen: z.B., daß die gleiche Substitution so gut wie immer das gleiche Resultat ergibt etc.. Und besteht darin nicht eben die Übersehbarkeit?

Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Platz ist, ob wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist. Und nicht in einer dummen und unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat.

Oder: Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut's schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht und fällt.[1]

Das heißt: Der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur so lange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt.[1] Und eine Abkürzung eines solchen logischen Beweises kann diese Überzeugungskraft haben und durch sie ein Beweis sein, wenn die voll ausgeführte Konstruktion nach Russellscher Art es nicht ist.

Wir neigen zu dem Glauben, daß der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft hat, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- und Schlußgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlußgesetze ist.

Die logische Gewißheit der Beweise—will ich sagen—reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewißheit.

44. Wenn nun der Beweis ein Vorbild ist, so muß es darauf ankommen, was als eine richtige Reproduktion des Beweises zu gelten hat.

Käme zum Beispiel im Beweis das Zeichen '| | | | | | | | | |' vor, so ist es nicht klar, ob als Reproduktion davon nur eine 'gleichzahlige' Gruppe von Strichen (oder etwa Kreuzchen) gelten soll, oder ebensowohl auch eine andere, wenn nicht gar zu kleine Anzahl. Etc.

Es ist doch die Frage, was als Kriterium der Reproduktion des Beweises zu gelten hat,—der Gleichheit von Beweisen. Wie sind sie

[1] **Vergl. aber §38 Anm. d. Herausg.**

Proof must be a procedure plain to view. Or again: the proof is the procedure that is *plain to view*.

It is not something behind the proof, but the proof, that proves.

43. When I say: "it must first and foremost be evident that *this* substitution really yields *this* expression"—I might also say: "I must accept it as indubitable"—but then there must be good reasons for this: for example, that the same substitution practically always yields the same result etc. . And isn't this exactly what surveyability consists in?

I should like to say that where surveyability is not present, i.e. where there is room for a doubt whether what we have really is the result of this substitution, the *proof* is destroyed. And not in some silly and unimportant way that has nothing to do with the *nature* of proof.

Or: logic as the foundation of all mathematics does not work, and to shew this it is enough that the cogency of logical proof stands and falls with its geometrical cogency.[1]

That is to say: logical proof, e.g. of the Russellian kind, is cogent only so long as it also possesses geometrical cogency.[1] And an abbreviation of such a logical proof may have this cogency and so be a proof, when the Russellian construction, completely carried out, is not.

We incline to the belief that *logical* proof has a peculiar, absolute cogency, deriving from the unconditional certainty in logic of the fundamental laws and the laws of inference. Whereas propositions proved in this way can after all not be more certain than is the correctness of the way those laws of inference are *applied*.

The logical certainty of proofs—I want to say—does not extend beyond their geometrical certainty.

44. Now if a proof is a model, then the point must be what is to count as a correct reproduction of the proof.

If, for example, the sign '| | | | | | | | | |' were to occur in a proof, it is not clear whether merely 'the same number' of strokes (or perhaps little crosses) should count as the reproduction of it, or whether some other, not too small, number does equally well. Etc.

But the question is what is to count as the criterion for the reproduction of a proof—for the identity of proofs. How are they to be

[1] But compare §38. Edd.

zu vergleichen, um die Gleichheit festzustellen? Sind sie gleich, wenn sie gleich ausschaun?

Ich möchte, sozusagen, zeigen, daß wir den logischen Beweisen in der Mathematik entlaufen können.

45. "Mittels entsprechender Definitionen können wir '25 × 25 = 625' in der Russellschen Logik beweisen."—Und kann ich die gewöhnliche Beweistechnik durch die Russellsche erklären? Aber wie kann man eine Beweistechnik durch eine andere *erklären*? Wie kann die eine das *Wesen* der andern erklären? Denn ist die eine eine 'Abkürzung' der anderen, so muß sie doch eine *systematische* Abkürzung sein. Es bedarf doch eines Beweises, daß ich die langen Beweise systematisch abkürzen kann und also wieder ein System von Beweisen erhalte.

Die langen Beweise gehen nun zuerst immer mit den kurzen einher und bevormunden sie gleichsam. Aber endlich können sie den kurzen nicht mehr folgen und diese zeigen ihre Selbständigkeit.

Das Betrachten der *langen* unübersehbaren logischen Beweise ist nur ein Mittel um zu zeigen, wie diese Technik—die auf der Geometrie des Beweisens ruht—zusammenbrechen kann und neue Techniken notwendig werden.

46. Ich möchte sagen: Die Mathematik ist ein BUNTES *Gemisch* von Beweistechniken.—Und darauf beruht ihre mannigfache Anwendbarkeit und ihre Wichtigkeit.

Und das kommt doch auf das Gleiche hinaus, wie zu sagen: Wer ein System, wie das Russellsche, besäße und aus diesem durch entsprechende Definitionen Systeme, wie den Differentialkalkül, erzeugte, der erfände ein neues Stück Mathematik.

Nun, man könnte doch einfach sagen: Wenn ein Mensch das Rechnen im Dezimalsystem erfunden hätte—der hätte doch eine mathematische Erfindung gemacht!—Auch wenn ihm Russell's "Principia Mathematica" bereits vorgelegen wären.—

Wie ist es, wenn man ein Beweissystem einem anderen koordiniert? Es gibt dann eine Übersetzungsregel mittels derer man die im einen bewiesenen Sätze in die im andern bewiesenen übersetzen kann.

Man kann sich doch aber denken, daß einige—oder alle—Beweissysteme der heutigen Mathematik auf solche Weise einem System, etwa dem Russellschen zugeordnet wären. Sodaß alle Beweise, wenn auch umständlich, in diesem System ausgeführt werden könnten. So gäbe es dann nur das eine System—und nicht mehr die vielen Systeme?—Aber es muß sich doch also von dem *einen* System zeigen lassen, daß es sich in die vielen auflösen läßt.—*Ein* Teil des Systems wird die Eigentümlichkeiten der Trigonometrie besitzen, ein anderes compared to establish the identity? Are they the same if they look the same?

I should like, so to speak, to shew that we can get away from logical proofs in mathematics.

45. "By means of suitable definitions, we can prove '$25 \times 25 = 625$' in Russell's logic."—And can I define the ordinary technique of proof by means of Russell's? But how can one technique of proof be *defined* by means of another? How can one explain the *essence* of another? For if the one is an 'abbreviation' of the other, it must surely be a *systematic* abbreviation. Proof is surely required that I can systematically shorten the long proofs and thus once more get a system of proofs.

Long proofs at first always go along with the short ones and as it were tutor them. But in the end they can no longer follow the short ones and these shew their independence.

The consideration of *long* unsurveyable logical proofs is only a means of shewing how this technique—which is based on the geometry of proving—may collapse, and new techniques become necessary.

46. I should like to say: mathematics is a MOTLEY of techniques of proof.——And upon this is based its manifold applicability and its importance.

But that comes to the same thing as saying: if you had a system like that of Russell and produced systems like the differential calculus out of it by means of suitable definitions, you would be producing a new bit of mathematics.

Now surely one could simply say: if a man had invented calculating in the decimal system—that would have been a mathematical invention! —Even if he had already got Russell's *Principia Mathematica*.—

What is it to co-ordinate one system of proofs with another? It involves a translation rule by means of which proved propositions of the one can be translated into proved propositions of the other.

Now it is possible to imagine some—or all—of the proof systems of present-day mathematics as having been co-ordinated in such a way with one system, say that of Russell. So that all proofs could be carried out in this system, even though in a roundabout way. So would there then be only the single system—no longer the many?—But then it must surely be possible to shew of the *one* system that it can be resolved into the many.—*One* part of the system will possess the properties of die der Algebra, und so weiter. Man *kann* also sagen, daß in diesen Teilen verschiedene Techniken verwendet werden.

Ich sagte: der, welcher das Rechnen in der Dezimalnotation erfunden hat, habe doch eine mathematische Entdeckung gemacht. Aber hätte er diese Entdeckung nicht in lauter Russellschen Symbolen machen können? Er hätte, sozusagen einen neuen *Aspekt* entdeckt.

"Aber die Wahrheit der wahren mathematischen Sätze kann dann dennoch aus jenen allgemeinen Grundlagen bewiesen werden."—Mir scheint, hier ist ein Haken. Wann sagen wir, ein mathematischer Satz sei wahr?—

Mir scheint, als führten wir, ohne es zu wissen, neue Begriffe in die Russellsche Logik ein.——Zum Beipiel, indem wir festsetzen, was für Zeichen der Form '$(\exists x, y, z \ldots)$' als einander äquivalent und welche nicht als äquivalent gelten sollen.

Ist es selbstverständlich, daß '$(\exists x, y, z)$' nicht das gleiche Zeichen ist wie '$(\exists x, y, z, n)$'?

Aber wie ist es—: Wenn ich zuerst '$p \vee q$' und '$\sim p$' einführe und einige Tautologien mit ihnen konstruiere—und dann zeige ich etwa die Reihe $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc. vor und führe eine Notation ein wie $\sim^1 p$, $\sim^2 p$, $\ldots \sim^{10} p \ldots$ Ich möchte sagen: wir hätten vielleicht an die *Möglichkeit* so einer Reihenordnung ursprünglich gar nicht gedacht, und wir haben nun einen neuen Begriff in unsre Rechnung eingeführt. Hier ist ein 'neuer Aspekt'.

Es ist ja klar, daß ich den Zahlbegriff, wenn auch in sehr primitiver und unzureichender Weise, hätte so einführen können—aber dieses Beispiel zeigt mir alles, was ich brauche.

Inwiefern kann es richtig sein zu sagen, man hätte mit der Reihe $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc. einen neuen Begriff in die Logik eingeführt? —Nun, vor allem könnte man sagen, man habe es mit dem '*etc.*' getan. Denn dieses 'etc.' steht für ein mir neues Gesetz der Zeichenbildung. Dafür charakteristisch—die Tatsache, daß eine *rekursive* Definition zur Erklärung der Dezimalnotation nötig ist.

Eine neue *Technik* wird eingeführt.

Man kann es auch so sagen: Wer den Begriff der Russellschen Beweis- und Satzbildung hat, hat damit noch *nicht* den Begriff jeder *Reihe* Russellscher Zeichen.

Ich möchte sagen: Russell's Begründung der Mathematik schiebt die Einführung neuer Techniken hinaus,—bis man endlich glaubt, sie sei gar nicht mehr nötig.

trigonometry, another those of algebra, and so on. Thus one *can* say that different techniques are used in these parts.

I said: whoever invented calculation in the decimal notation surely made a mathematical discovery. But could he not have made this discovery all in Russellian symbols? He would, so to speak, have discovered a new *aspect*.

"But in that case the truth of true mathematical propositions can still be proved from those general foundations."—It seems to me there is a snag here. When do we say that a mathematical proposition is true?—

It seems to me as if we were introducing new concepts into the Russellian logic without knowing it.——For example, when we settle what signs of the form '$(\exists x, y, z \ldots)$' are to count as equivalent to one another, and what are not to count as equivalent.

Is it a matter of course that '$(\exists x, y, z)$' is not the same sign as '$(\exists x, y, z, n)$'?

But suppose I first introduce '$p \vee q$' and '$\sim p$' and use them to construct some tautologies—and then produce (say) the series $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc. and introduce a notation like $\sim^1 p$, $\sim^2 p$, $\ldots \sim^{10} p \ldots$. I should like to say: we should perhaps originally never have thought of the *possibility* of such a sequence and we have now introduced a new concept into our calculation. Here is a 'new aspect'.

It is clear that I could have introduced the concept of number in this way, even though in a very primitive and inadequate fashion—but this example gives me all I need.

In what sense can it be correct to say that one would have introduced a new concept into logic with the series $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc.? —Well, first of all one could be said to have done it with the '*etc.*'. For this 'etc.' stands for a law of sign formation which is new to me. A characteristic mark of this is the fact that *recursive* definition is required for the explanation of the decimal notation.

A new *technique* is introduced.

It can also be put like this: having the concept of the Russellian formation of proofs and propositions does *not* mean you have the concept of every *series* of Russellian signs.

I should like to say: Russell's foundation of mathematics postpones the introduction of new techniques—until it is finally believed that this is no longer necessary at all.

(Es wäre vielleicht so, als philosophierte ich über den Begriff der Längenmessung so lange, bis man vergäße, daß zur Längenmessung die tatsächliche Festsetzung einer Längeneinheit nötig ist.)

47. Kann man nun, was ich sagen will, *so* ausdrücken: "Wenn wir von Anfang an gelernt hätten, alle Mathematik in Russell's System zu betreiben, so wäre natürlich mit dem Russellschen Kalkül die Differentialrechnung z.B. noch nicht erfunden. Wer also diese Rechnungsart *im Russellschen Kalkül* entdeckte———."

Angenommen, ich hätte Russellsche Beweise der Sätze

$$`p = \sim\sim p'$$
$$`\sim p = \sim\sim\sim p'$$
$$`p = \sim\sim\sim\sim p'$$

vor mir und fände nun einen abgekürzten Weg, den Satz

$$`p = \sim^{10} p'$$

zu beweisen. Es ist, als habe ich eine neue Rechnungsart innerhalb des alten Kalküls gefunden. Worin besteht es, daß sie gefunden wurde?

Sage mir: Habe ich eine neue Rechnungsart entdeckt, wenn ich multiplizieren gelernt hatte und mir nun Multiplikationen mit lauter gleichen Faktoren als ein besonderer Zweig dieser Rechnungen auffallen und ich daher die Notation einführe '$a^n = \ldots$'?

Offenbar die bloß 'abgekürzte', oder *andere*, Schreibweise—'16^2' statt '16×16'—macht's nicht. Wichtig ist, daß wir jetzt die Faktoren bloß *zählen*.

Ist '16^{15}' nur eine andere Schreibweise für '$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$'?

Der Beweis, daß $16^{15} = \ldots$ ist, besteht nicht einfach darin, daß ich 16 fünfzehnmal mit sich selbst multipliziere, und daß dabei dies herauskommt—sondern der Beweis muß es zeigen, daß ich die Zahl 15-*mal* zum Faktor setze.

Wenn ich frage: "Was ist das Neue an der 'neuen Rechnungsart' des Potenzierens"—so ist das schwer zu sagen. Das Wort 'neuer Aspekt' ist vag. Es heißt, wir sehen die Sache jetzt anders an—aber die Frage ist: was ist die wesentliche, die *wichtige* Äußerung dieses 'anders-Ansehens'?

Zuerst will ich sagen: "Es hätte einem nie *auffallen* brauchen, daß in gewissen Produkten alle Faktoren gleich sind"—oder: " 'Produkt lauter gleicher Faktoren' ist ein neuer Begriff"—oder: "Das Neue besteht darin, daß wir die Rechnungen anders zusammenfassen".

(It would perhaps be as if I were to philosophize about the concept of measurement of length for so long that it was forgotten that the actual establishment of a unit of length is necessary for the measurement of length.)

47. Can what I want to say be put like *this*: "If we had learnt from the beginning to do all mathematics in Russell's system, the differential calculus, for example, would not have been invented just by our having Russell's calculus. So if someone discovered this kind of calculation *in Russell's calculus*———."

Suppose I had Russellian proofs of the propositions

$$`p \equiv \sim\sim p'$$
$$`\sim p \equiv \sim\sim\sim p'$$
$$`p \equiv \sim\sim\sim\sim p'$$

and I were now to find a shortened way of proving the proposition

$$`p \equiv \sim^{10} p'.$$

It is as if I had discovered a new kind of calculation within the old calculus. What does its having been discovered consist in?

Tell me: have I discovered a new kind of calculation if, having once learnt to multiply, I am struck by multiplications with all the factors the same, as a special branch of these calculations, and so I introduce the notation '$a^n = \ldots$'?

Obviously the mere 'shortened', or *different*, notation—'16^2' instead of '16×16'—does not amount to that. What is important is that we now merely *count* the factors.

Is '16^{15}' merely another notation for '$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$'?

The proof that $16^{15} = \ldots$ does not simply consist in my multiplying 16 by itself fifteen times and getting this result—the proof must shew that I take the number as a factor 15 times.

When I ask "What is new about the 'new kind of calculation'—exponentiation"—that is difficult to say. The expression 'new aspect' is vague. It means that we now look at the matter differently—but the question is: what is the essential, the *important* manifestation of this 'looking at it differently'?

First of all I want to say: "It need never have *struck* anyone that in certain products all the factors are equal"—or: " 'Product of all equal factors' is a new concept"—or: "What is new consists in our classifying

Beim Potenzieren ist es offenbar das Wesentliche, daß wir auf die *Zahl* der Faktoren sehen. Es ist doch nicht gesagt, daß wir auf die Zahl der Faktoren je geachtet haben. Es *muß* uns nicht aufgefallen sein, daß es Produkte mit 2, 3, 4 etc. Faktoren gibt, obwohl wir schon oft solche Produkte ausgerechnet haben. Ein neuer Aspekt—aber wieder: Was ist seine *wichtige* Seite? Wozu benütze ich, was mir aufgefallen ist?—Nun vor allem lege ich es vielleicht in einer Notation nieder. Ich schreibe also zum Beispiel statt '$a \times a$' 'a^2'. Dadurch beziehe ich mich auf die Zahlenreihe (spiele auf sie an), was früher nicht geschehen war. Ich stelle also doch eine neue Verbindung her!—Eine Verbindung—zwischen welchen Dingen? Zwischen der Technik des Zählens von Faktoren und der Technik des Multiplizierens.

Aber so macht ja jeder Beweis, jede einzelne Rechnung neue Verbindungen!

Aber der *gleiche* Beweis, der zeigt, daß $a \times a \times a \times a \ldots = b$ ist, zeigt doch auch, daß $a^n = b$ ist; nur, daß wir den Übergang nach der Definition von 'a^n' machen müssen.

Aber dieser Übergang ist ja gerade das Neue. Aber wenn er nur ein Übergang zum alten Beweis ist, wie kann er dann wichtig sein?

'Es ist nur eine andere Schreibweise.' Wo hört es auf—bloß eine andere Schreibweise zu sein?

Nicht dort: wo nur die eine Schreibweise und nicht die andre so und so verwendet werden kann?

Man könnte es "einen neuen Aspekt finden" nennen, wenn Einer statt '$f(a)$' schreibt '$(a)f$'; man könnte sagen: "Er *sieht* die Funktion als Argument ihres Arguments an". Oder wenn Einer statt '$a \times a$' schriebe '$\times (a)$' könnte man sagen: "Was man früher als Spezialfall einer Funktion mit zwei Argumentstellen ansah, sieht er als Funktion mit *einer* Argumentstelle an".

Wer das tut, hat gewiß in einem Sinn den Aspekt verändert, er hat z.B. *diesen* Ausdruck mit anderen zusammengestellt, verglichen, mit denen er früher nicht verglichen wurde.—Aber ist das nun eine *wichtige* Aspektänderung? *Nicht*, solange sie nicht gewisse Konsequenzen hat.

Es ist schon wahr, daß ich durch das Hineinbringen des Begriffs der *Anzahl* der Negationen den Aspekt der logischen Rechnung geändert habe: "So habe ich es noch nicht angeschaut"—könnte man sagen. Aber wichtig wird diese Änderung erst, wenn sie in die Anwendung des Zeichens eingreift.

Ein Fuß als 12 *Zoll* auffassen, hieße allerdings den Aspekt des Fußes calculations differently". In exponentiation the essential thing is evidently that we look at the *number* of the factors. But who says we ever attended to the number of factors? It *need* not have struck us that there are products with 2, 3, 4 factors etc. although we have often worked out such products. A new aspect—but once more: what is *important* about it? For what purpose do I use what has struck me?—Well, first of all perhaps I put it down in a notation. Thus I write e.g. 'a^2' instead of '$a \times a$'. By this means I refer to the series of numbers (allude to it), which did not happen before. So I am surely setting up a new connexion!—A connexion—between what objects? Between the technique of counting factors and the technique of multiplying.

But in that way every proof, each individual calculation makes new connexions!

But the *same* proof as shews that $a \times a \times a \times a \ldots = b$, surely also shews that $a^n = b$; it is only that we have to make the transition according to the definition of 'a^n'.—

But this transition is exactly what is new. But if it is only a transition to the old proof, how can it be important?

'It is only a different notation.' Where does it stop being—just a different notation?

Isn't it where only the one notation and not the other can be used in such-and-such a way?

It might be called "finding a new aspect", if someone writes '$a\,(f)$' instead of '$f\,(a)$'; one might say: "He *looks at* the function as an argument of its argument". Or if someone wrote '$\times\ (a)$' instead of '$a \times a$' one could say: "he looks at what was previously regarded as a special case of a function with two argument places as a function with *one* argument place".

If anyone does this he has certainly altered the aspect in a sense, he has for example classified *this* expression with others, compared it with others, with which it was not compared before.—But now, is that an *important* change of aspect? *No*, not so long as it does not have certain consequences.

It is true enough that I changed the aspect of the logical calculation by introducing the concept of the *number* of negations: "I never looked at it like that"—one might say. But this alteration only becomes important when it connects with the application of the sign.

Conceiving one foot as *12 inches* would indeed mean changing the ändern, aber wichtig würde diese Änderung erst, wenn man nun auch Längen in Zoll *mäße*.

Wer das Zählen der Negationszeichen einführt, führt eine neue Art der Reproduktion der Zeichen ein.

Es ist zwar für die Arithmetik, die doch von der Gleichheit von Anzahlen spricht, ganz gleichgültig, wie Anzahlengleichheit zweier Klassen festgestellt wird—aber es ist für ihre Schlüsse nicht gleichgültig, wie ihre Zeichen mit einander verglichen werden, nach welcher Methode also z.B. festgestellt wird, ob die Anzahl der Ziffern zweier Zahlzeichen die gleiche ist.

Nicht die Einführung der Zahlzeichen als Abkürzungen ist wichtig, sondern die *Methode* des Zählens.

48. Ich will die Buntheit der Mathematik erklären.

49. "Ich kann auch im Russell's System den Beweis führen, daß $127 : 18 = 7{\cdot}05$ ist." Warum nicht.—Aber muß beim Russellschen Beweis dasselbe herauskommen, wie bei der gewöhnlichen Division? Die beiden sind freilich durch eine *Rechnung* (durch Übersetzungsregeln etwa) mit einander verbunden; aber ist es nicht doch gewagt, die Division nach der neuen Technik auszuführen,—da doch die Wahrheit des Resultats nun abhängig wird von der Geometrie der Übertragung?

Aber wenn nun Einer sagte: "Unsinn—solche Bedenken spielen in der Mathematik gar keine Rolle".

—Aber nicht um die Unsicherheit handelt sich's, denn wir sind unsrer Schlüsse sicher, sondern darum, ob wir noch (Russellsche) Logik betreiben, wenn wir z.B. *dividieren*.

50. Die Trigonometrie hat ihre Wichtigkeit ursprünglich in ihrer Verbindung mit Längen- und Winkelmessungen: sie ist ein Stück Mathematik, das zur Verwendung auf Längen- und Winkelmessungen eingerichtet ist.

Man könnte die Anwendbarkeit auf dieses Gebiet auch einen 'Aspekt' der Trigonometrie nennen.

Wenn ich einen Kreis in gleiche Teile teile und den Cosinus eines dieser Teile durch Messung bestimme—ist das eine Rechnung oder ein Experiment?

Wenn eine Rechnung—ist sie denn ÜBERSEHBAR?

Ist das Rechnen mit dem Rechenschieber *übersehbar*?

Wenn man den Kosinus eines Winkels durch Messung bestimmen aspect of 'a foot', but this change would only become important if one now also *measured* lengths in inches.

If you introduce the counting of negation signs, you bring in a new way of reproducing signs.

For arithmetic, which does talk about the equality of numbers, it is indeed a matter of complete indifference how equality of number of two classes is established—but for its inferences it is not indifferent how its signs are compared with one another, and so e.g. what is the method of establishing whether the number of figures in two numerical signs is the same.

It is not the introduction of numerical signs as abbreviations that is important, but the *method* of counting.

48. I want to give an account of the motley of mathematics.

49. "I can carry out the proof that $127 : 18 = 7{\cdot}05$ in Russell's system too." Why not.—But must the same result be reached in the Russellian proof as in ordinary division? The two are of course connected by means of a type of *calculation* (by rules of translation, say—); but still, is it not risky to work out the division by the new technique, —since the truth of the result is now dependent on the geometry of the rendering?

But now suppose someone says: "Nonsense—such considerations play no part in mathematics".—

—But the question is not one of uncertainty, for we *are* certain of our conclusions, but of whether we are still doing (Russellian) logic when we e.g. divide.

50. Trigonometry has its original importance in connexion with measurements of lengths and angles: it is a bit of mathematics adapted to employment on measurements of lengths and angles.

Applicability to this field might also be called an 'aspect' of trigonometry.

When I divide a circle into equal sectors and determine the cosine of one of these sectors by measurement—is that a calculation or an experiment?

If a calculation—is it SURVEYABLE?

Is calculation with a slide-rule *surveyable*?

If the cosine of an angle has to be determined by measurement, is muß,—ist dann ein Satz der Form 'cos $\alpha = n$' ein *mathematischer* Satz? Was ist das Kriterium dieser Entscheidung? Sagt der Satz etwas Äusseres über unsre Lineale und dergleichen aus; oder etwas Internes über unsre Begriffe?—Wie ist das zu entscheiden?

Gehören die Figuren (Zeichnungen) in der Trigonometrie zur reinen Mathematik, oder sind sie nur Beispiele einer möglichen *Anwendung*?

51. Wenn an dem, was ich sagen will, irgend etwas Wahres ist, so muß—z.B.—das Rechnen in der Dezimalnotation sein eigenes Leben haben.—Man kann natürlich jede Dezimalzahl darstellen in der Form:

$$\frac{||||||||||||||||||||||||}{||||||||||||||||||}$$

und daher die vier Rechnungsarten in dieser Notation ausführen. Aber das Leben der Dezimalnotation müßte unabhängig sein von dem Rechnen mit Einerstrichen.

52. In diesem Zusammenhang fällt mir immer wieder dies ein: Daß man in Russell's Logik zwar einen Satz '$a : b = c$' *beweisen* kann, daß sie uns aber einen richtigen Satz dieser Form nicht konstruieren lehrt, d.h. daß sie uns nicht *dividieren* lehrt. Der Vorgang des Dividierens entspräche z.B. dem eines *systematischen Probierens* Russellscher Beweise zu dem Zweck etwa, den Beweis eines Satzes von der Form '$37 \times 15 = x$' zu erhalten. "Aber die Technik eines solchen systematischen Probierens gründet sich doch wieder auf Logik. Man kann doch wieder logisch beweisen, daß diese Technik zum Ziel führen muß." Es ist also ähnlich, wie wenn wir im Euklid beweisen, daß sich das und das so und so konstruieren läßt.

53. Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie:—Wenn man Tische, Stühle, Schränke etc. in genug Papier wickelt, werden sie gewiß endlich kugelförmig ausschauen.

Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem mathematischen Beweis einen Russellschen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) 'entspricht', sondern, daß das Anerkennen so einer Entsprechung sich nicht auf Logik stützt.

"Aber wir können doch immer auf die primitive logische Methode zurückgehen!" Nun, angenommen, daß wir es können—wie kommt es, daß wir es nicht tun *müssen*? Oder sind wir vorschnell, unvorsichtig, wenn wir es nicht tun?

Aber wie finden wir denn zurück zum primitiven Ausdruck? Gehen wir z.B. den Weg durch den sekundären Beweis und von seinem Ende a proposition of the form 'cos $\alpha = n$' a *mathematical* proposition? What is the criterion for this decision? Does the proposition say something external about our rulers etc.; or something internal about our concepts?—How is this to be decided?

Do the figures (drawings) in trigonometry belong to pure mathematics, or are they only examples of a possible *application*?

51. If there is something true about what I am trying to say, then—e.g.—calculating in the decimal notation must have its own life.—One can of course represent any decimal number in the form:

$$\frac{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}$$

and hence carry out the four species of calculation in this notation. But the life of the decimal notation would have to be independent of calculating with unit strokes.

52. In this connexion I am constantly struck by the following: while indeed a proposition '$a : b = c$' can be *proved* in Russell's logic, still that logic does not teach us to construct a correct sentence of this form, i.e. does not teach us to *divide*. The procedure of dividing would correspond e.g. to that of a *systematic testing* of Russellian proofs with a view, say, to getting the proof of a proposition of the form '$37 \times 15 = x$'. "But the technique of such a systematic testing is in its turn founded on logic. It can surely be logically proved in turn that this technique must lead to the goal." So it is like proving in Euclid that such-and-such can be constructed in such-and-such a way.

53. If someone tries to shew that mathematics is not logic, what is he trying to shew? He is surely trying to say something like:—If tables, chairs, cupboards, etc. are swathed in enough paper, certainly they will look spherical in the end.

He is not trying to shew that it is impossible that, for every mathematical proof, a Russellian proof can be constructed which (somehow) 'corresponds' to it, but rather that the acceptance of such a correspondence does not lean on logic.

"But surely we can always go back to the primitive logical method!" Well, assuming that we can—how is it that we don't *have* to? Or are we hasty, reckless, if we do not?

But how do we get back to the primitive expression? Do we e.g. take the route through the secondary proof and back from the end of aus zurück ins primäre System und sehen zu, wo wir so hingelangen; oder gehen wir in beiden Systemen vor und machen dann die Verbindung der Endpunkte? Und wie wissen wir, daß wir im primären System in beiden Fällen zum gleichen Resultat gelangen?

Führt das Vorgehen im sekundären System nicht Überzeugungskraft mit sich?

"Aber wir können uns doch beim jeden Schritt im sekundären System denken, daß er auch im primären gemacht werden könnte!"—Das ist es eben: *wir können uns denken, daß er gemacht werden könnte*—ohne, daß wir ihn machen.

Und warum nehmen wir den einen an Stelle des andern an? Aus Gründen der *Logik*?

"Aber kann man nicht logisch beweisen, daß beide Umwandlungen zum gleichen Resultat gelangen müssen?"—Aber es handelt sich doch hier um das Ergebnis von Umwandlungen von Zeichen! Wie kann die Logik dies entscheiden?

54. Wie kann der Beweis im Strichsystem beweisen, daß der Beweis im Dezimalsystem ein Beweis ist?

Nun,—ist es hier mit dem Beweis im Dezimalsystem nicht so, wie mit einer *Konstruktion* bei Euklid, von der bewiesen wird, daß sie wirklich eine Konstruktion dieses und dieses Gebildes ist?

Darf ich es so sagen: "Die Übertragung des Strichsystems ins Dezimalsystem setzt eine rekursive Definition voraus. Diese Definition führt aber nicht die Abkürzung *eines* Ausdrucks durch einen andern ein. Der induktive Beweis im Dezimalsystem aber enthält natürlich nicht die Menge jener Zeichen, die durch die rekursive Definition in Strichzeichen zu übertragen wären. Dieser allgemeine Beweis kann daher durch die rekursive Definition nicht in einen Beweis des Strichsystems übertragen werden"?

Der rekursive Beweis führt eine neue Zeichentechnik ein.—Er muß also den Übergang in eine neue 'Geometrie' machen. Es wird uns eine neue Methode gelehrt, Zeichen wiederzuerkennen. Es wird ein neues Kriterium für die Gleichheit von Zeichen eingeführt.

55. Der Beweis zeigt uns, was herauskommen SOLL.—Und da jede Reproduktion des Beweises das Nämliche demonstrieren muß, so muß sie einerseits also das Resultat automatisch reproduzieren, anderseits aber auch den *Zwang*, es zu erhalten.

D.h.: wir reproduzieren nicht nur die *Bedingungen*, unter welchen sich dies Resultat einmal ergab (wie beim Experiment), sondern das it into the primary system, and then look to see where we have got; or do we go forward in both systems and then connect the end points? And how do we know that we reach the same result in the primary system in the two cases?

Does not proceeding in the secondary system carry the power of conviction with it?

"But at every step in the secondary system, we can imagine that it could be taken in the primary one too!"—That is just it: *we can imagine that it could be done*—without doing it.

And why do we accept the one in place of the other? On grounds of *logic*?

"But can't one prove logically that both transformations must lead to the same result?"—But what is in question here is surely the result of transformations of signs! How can logic decide this?

54. How can the proof in the stroke system prove that the proof in the decimal system is a proof?

Well—isn't it the same for the proof in the decimal system, as it is for a *construction* in Euclid of which it is proved that it really is the construction of such-and-such a figure?

Can I put it like this: "The translation of the stroke system into the decimal system presupposes a recursive definition. This definition, however, does not introduce the abbreviation of *one* expression to another. Yet of course inductive proof in the decimal system does not contain the whole set of those signs which would have to be translated by means of the recursive definition into stroke signs. Therefore this general proof cannot be translated by recursive definition into a proof in the stroke system."?

Recursive definition introduces a new sign-technique.—It must therefore make the transition to a new 'geometry'. We are taught a new method of recognizing signs. A new criterion for the identity of signs is introduced.

55. A proof shews us what OUGHT to come out.—And since every reproduction of the proof must demonstrate the same thing, while on the one hand it must reproduce the result automatically, on the other hand it must also reproduce the *compulsion* to get it.

That is: we reproduce not merely the *conditions* which once yielded this result (as in an experiment), but the result itself. And yet the

Resultat selbst. Und doch ist der Beweis kein abgekartetes Spiel, insofern er uns immer wieder muß führen können.

Wir müssen einerseits den Beweis automatisch ganz reproduzieren können, und anderseits muß diese Reproduktion wieder ein *Beweis* des Resultats sein.

"Der Beweis muß übersehbar sein" will unsre Aufmerksamkeit eigentlich auf den Unterschied richten der Begriffe: 'einen Beweis wiederholen', 'ein Experiment wiederholen'. Einen Beweis wiederholen, heißt nicht: die Bedingungen reproduzieren, unter denen einmal ein bestimmtes Resultat erhalten wurde, sondern es heißt, jede Stufe *und das Resultat* wiederholen. Und obwohl so der Beweis also etwas ist, was sich ganz automatisch muß reproduzieren lassen, so muß doch jede solche Reproduktion den Beweiszwang enthalten, das Resultat anzuerkennen.

56. Wann sagen wir: ein Kalkül 'entspräche' einem andern, sei nur eine abgekürzte Form des ersten?—"Nun, wenn man die Resultate dieses durch entsprechende Definitionen in die Resultate jenes überführen kann." Aber ist schon gesagt, wie man mit diesen Definitionen zu rechnen hat? Was läßt uns diese Übertragung anerkennen? Ist sie am Ende ein abgekartetes Spiel? Das ist sie, wenn wir entschlossen sind, nur die Übertragung anzuerkennen, die zu dem uns gewohnten Resultat führt.

Warum nennen wir einen Teil des Russellschen Kalküls den der Differentialrechnung entsprechenden?—Weil in ihm die Sätze der Differentialrechnung bewiesen werden.—Aber doch nicht am Ende post hoc?—Aber ist das nicht gleichgültig? Genug, daß man Beweise dieser Sätze im Russellschen System finden kann! Aber sind es Beweise dieser Sätze nicht nur dann, wenn ihre Resultate sich nur in *diese* Sätze übersetzen lassen? Aber stimmt das sogar im Fall des Multiplizierens im Strichsystem mit numerierten Strichen?

57. Nun muß klar gesagt werden, daß die Rechnungen in der Strichnotation normalerweise immer mit denen der Dezimalnotation übereinstimmen werden. Vielleicht werden wir, um sichere Übereinstimmung zu erzielen, an einem Punkt dazu greifen müssen, die Rechnung mit Strichen von *mehreren* Leuten nachrechnen zu lassen. Und das Gleiche werden wir bei Rechnungen mit noch höheren Zahlen im Dezimalsystem vornehmen.

Aber das zeigt freilich schon: daß nicht die Beweise im Strichsystem die Beweise im Dezimalsystem zwingend machen.

"Hätte man aber nun diese nicht, so könnte man jene gebrauchen, um das gleiche zu beweisen."—Das Gleiche? Was ist das Gleiche?—

proof is not a stacked game, inasmuch as it must always be capable of guiding us.

On the one hand we must be able to reproduce the proof *in toto* automatically, and on the other hand this reproduction must once more be *proof* of the result.

"Proof must be surveyable": this aims at drawing our attention to the difference between the concepts of 'repeating a proof', and 'repeating an experiment'. To repeat a proof means, not to reproduce the conditions under which a particular result was once obtained, but to repeat every step *and the result*. And although this shews that proof is something that must be capable of being reproduced *in toto* automatically, still every such reproduction must contain the force of proof, which compels acceptance of the result.

56. When do we say that one calculus 'corresponds' to another, is only an abbreviated form of the first?—"Well, when the results of the latter can be translated by means of suitable definitions into the results of the former." But has it been said how one is to calculate with these definitions? What makes us accept this translation? Is it a stacked game in the end? It is, if we are decided on only accepting the translation that leads to the accustomed result.

Why do we call a part of the Russellian calculus the part corresponding to the differential calculus?—Because the propositions of the differential calculus are proved in it.—But, ultimately, after the event. —But does that matter? Sufficient that proofs of these propositions can be found in the Russellian system! But aren't they proofs of these propositions only when their results can be translated only into *these* propositions? But is that true even in the case of multiplying in the stroke system with numbered strokes?

57. Now it must be clearly stated that calculations in the stroke notation will normally always agree with those in the decimal notation. Perhaps, in order to make sure of agreement, we shall at some point have to take to getting the stroke-calculation worked over by *several* people. And we shall do the same for calculations with still higher numbers in the decimal system.

But that of course is enough to shew that it is not the proofs in the stroke notation that make the proofs in the decimal system cogent.

"Still, if we did not have the latter, we could use the former to prove the same thing."—The same thing? What is the same thing?—

Also, der Strichbeweis wird mich vom Gleichen, wenn auch nicht auf die gleiche Weise, überzeugen.—Wie, wenn ich sagte: "Der Platz, an den uns ein Beweis führt, kann nicht unabhängig von diesem Beweis bestimmt werden."—Bin ich durch einen Beweis im Strichsystem davon überzeugt worden, daß der bewiesene Satz die Anwendbarkeit besitzt, die der Beweis im Dezimalsystem ihm gibt——ist z.B. im Strichsystem gezeigt worden, daß der Satz auch im Dezimalsystem beweisbar ist?

58. Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz nicht mehrere Beweise haben kann—denn so sagen wir eben. Aber kann man nicht sagen: *Dieser* Beweis zeigt, daß . . . herauskommt, wenn man *das* tut; der andere Beweis zeigt, daß dieser Ausdruck herauskommt, wenn man etwas andres tut?

Ist denn z.B. das mathematische Faktum, daß 129 durch 3 teilbar ist, unabhängig davon, daß *dies* Resultat bei *dieser* Rechnung herauskommt? Ich meine: besteht das Faktum dieser Teilbarkeit unabhängig von dem Kalkül, in dem es sich ergibt; oder ist es ein Faktum dieses Kalküls?

Denke, man sagte: "Durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen."

Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?

"Zwei Beweise beweisen dasselbe, wenn sie mich von dem Gleichen überzeugen."—Und wann überzeugen sie mich von dem Gleichen? Wie weiß ich, daß sie mich vom Gleichen überzeugen? Natürlich nicht durch Introspektion.

Man kann mich auf verschiedenen Wegen dazu bringen, diese Regel anzunehmen.

59. "Jeder Beweis zeigt nicht nur die Wahrheit des bewiesenen Satzes, sondern auch, daß er sich *so* beweisen läßt."—Aber dies letztere läßt sich ja auch anders beweisen.—"Ja, aber der Beweis beweist es auf eine bestimmte Weise und beweist dabei, daß es sich auf diese Weise demonstrieren läßt."—Aber auch *das* ließ sich durch einen andern Beweis zeigen.—"Ja, aber eben nicht auf diese Weise."—

Das heißt doch etwa: Dieser Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes Wesen ersetzen läßt; man kann sagen, er könne uns von etwas überzeugen, wovon uns nichts Anderes überzeugen kann, und man kann dies zum Ausdruck bringen, indem man ihm einen Satz zuordnet, den man keinem andern Beweis zuordnet.

60. Aber mache ich nicht einen groben Fehler? Den Sätzen der Arithmetik und den Sätzen der Russellschen Logik ist es ja geradezu wesentlich, daß verschiedene Beweise zu ihnen führen. Ja, sogar, daß unendlich viele Beweise zu einem jeden von ihnen führen.

Well, the stroke proof will convince me of the same thing, though not in the same way.—Suppose I were to say: "The place to which a proof leads us cannot be determined independently of this proof."—Did a proof in the stroke system demonstrate to me that the proved proposition possesses the applicability given it by the proof in the decimal system—was it e.g. proved in the stroke system that the proposition is also provable in the decimal system?

58. Of course it would be nonsense to say that *one* proposition cannot have two proofs—for we do say just that. But can we not say: *this* proof shews that . . . results when we do *this*; the other proof shews that this expression results when we do something else?

For is e.g. the mathematical fact that 129 is divisible by 3 independent of the fact that *this* is the result in *this* calculation? I mean: is the fact of this divisibility independent of the *calculus* in which it is a result; or is it a fact of this calculus?

Suppose it were said: "By calculating we get acquainted with the properties of numbers".

But do the properties of numbers *exist* outside the calculating?

"Two proofs prove the same when what they convince me of is the same."—And when is what they convince me of the same?—How do I know that what they convince me of is the same? Not of course by introspection.

I can be brought to accept this rule by a variety of paths.

59. "Each proof proves not merely the truth of the proposition proved, but also that it can be proved *in this way*."—But this latter can also be proved in another way.—"Yes, but the proof proves this in a particular way and in doing so proves that it can be demonstrated in this way."—But even *that* could be shewn by means of a different proof.—"Yes, but then not in this way."—

But this means e.g.: this proof is a mathematical entity that cannot be replaced by any other; one can say that it can convince us of something that nothing else can, and this can be given expression by our assigning to it a proposition that we do not assign to any other proof.

60. But am I not making a crude mistake? For just this is essential to the propositions of arithmetic and to the propositions of the Russellian logic: various proofs lead to them. Even: infinitely many proofs lead to any one of them.

Ist es richtig zu sagen, daß jeder Beweis uns von etwas überzeugt, wovon nur er uns überzeugen kann? Wäre dann nicht—sozusagen—der bewiesene Satz überflüssig, und der Beweis selbst auch das Bewiesene?

Überzeugt mich der Beweis nur vom bewiesenen Satz?

Was heißt: "ein Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes ersetzen läßt"? Es heißt doch, dass jeder besondere Beweis einen Nutzen hat, den kein anderer hat. Man könnte sagen: "—daß jeder Beweis, auch eines schon bewiesenen Satzes, eine Kontribution zur Mathematik ist". Warum aber ist er eine Kontribution, wenn es bloß darauf ankam, den Satz zu beweisen? Nun, man kann sagen: "der neue Beweis zeigt (oder *macht*) einen neuen Zusammenhang". (Aber gibt es dann nicht einen mathematischen Satz, welcher sagt, daß dieser Zusammenhang besteht?)

Was *lernen* wir, wenn wir den neuen Beweis sehen,—außer den Satz, den wir ohnehin schon kennen? Lernen wir etwas, was sich nicht in einem mathematischen Satz ausdrücken läßt?

61. Inwiefern hängt die Anwendung eines mathematischen Satzes davon ab, was man als seinen Beweis gelten läßt und was nicht?

Ich kann doch sagen: Wenn der Satz '$137 \times 373 = 46792$' im gewöhnlichen Sinne wahr ist, *dann muß es eine Multiplikationsfigur geben*, an deren Enden die Seiten dieser Gleichung stehen. Und eine Multiplikationsfigur ist ein Muster, das gewissen Regeln genügt.

Ich will sagen: Erkennte ich die Multiplikationsfigur nicht als *einen* Beweis des Satzes an, so fiele damit auch die Anwendung des Satzes auf Multiplikationsfiguren fort.

62. Bedenken wir, daß es nicht genug ist, daß sich zwei Beweise im selben Satzzeichen treffen! Denn wie wissen wir, daß dies Zeichen beidemale dasselbe sagt? *Dies* muß aus anderen Zusammenhängen hervorgehen.

63. Die *genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik und in der Mathematik.

64. Denke, ich gäbe jemandem die Aufgabe: "Finde einen Beweis des Satzes . . ."—die Lösung wäre doch, daß er mir gewisse Zeichen vorlegt. Nun gut: *welcher* Bedingung müssen diese Zeichen genügen? Sie müssen ein Beweis jenes Satzes sein—aber ist das etwa eine *geometrische* Bedingung? Oder eine psychologische? Manchmal könnte man es eine geometrische Bedingung nennen; dort, wo die Beweismittel

Is it correct to say that every proof demonstrates something to us which it alone can demonstrate? Would not—so to speak—the proved proposition then be superfluous, and the proof itself also be the thing proved?

Is it only the proved proposition that the proof convinces me of?

What is meant by: "A proof is a mathematical entity which cannot be replaced by any other"? It surely means that every single proof has a usefulness which no other one has. It might be said: "—that every proof, even of a proposition which has already been proved, is a contribution to mathematics". But why is it a contribution if its only point was to prove the proposition? Well, one can say: "the new proof shews (or *makes*) a new connexion". (But in that case is there not a mathematical proposition saying that this connexion exists?)

What do we *learn* when we see the new proof—apart from the proposition, which we already know anyhow? Do we learn something that cannot be expressed in a mathematical proposition?

61. How far does the application of a mathematical proposition depend on what is allowed to count as a proof of it and what is not?

I can surely say: if the proposition '$137 \times 373 = 46792$' is true in the ordinary sense, *then there must be a multiplication-sum*, at the ends of which stand the two sides of this equation. And a multiplication-sum is a pattern satisfying certain rules.

I want to say: if I did not accept the multiplication-sum as *one* proof of the proposition, then that would mean that the application of the proposition to multiplication-sums would be gone.

62. Let us remember that it is not enough that two proofs meet in the same propositional sign. For how do we know that this sign says the same thing both times? *That* must proceed from other connexions.

63. The *exact* correspondence of a correct (convincing) transition in music and in mathematics.

64. Suppose I were to set someone the problem: "Find a proof of the proposition . . ."—The answer would surely be to shew me certain signs. Very well: *what* condition must these signs satisfy? They must be a proof of that proposition—but is that, say, a *geometrical* condition? Or a psychological one? Sometimes it could be called a

schon vorgeschrieben sind und nur noch eine bestimmte Zusammenstellung gesucht wird.

65. Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze, die sagen, wie wir Menschen schließen und kalkulieren?—Ist ein Gesetzbuch ein Werk über Anthropologie, das uns sagt, wie die Leute dieses Volkes einen Dieb etc. behandeln?——Könnte man sagen: "Der Richter schlägt in einem Buch über Anthropologie nach und verurteilt hierauf den Dieb zu einer Gefängnisstrafe"? Nun, der Richter GEBRAUCHT das Gesetzbuch nicht als Handbuch der Anthropologie.

66. Die Prophezeiung lautet *nicht*, daß der Mensch, wenn er bei der Transformation dieser Regel folgt, *das* herausbringen wird—sondern, daß er, wenn wir *sagen*, er folge der Regel, das herausbringen werde.

Wie, wenn wir sagten, daß mathematische Sätze in *diesem* Sinne Prophezeiungen sind: indem sie vorhersagen, was Glieder einer Gesellschaft, die diese Technik gelernt haben, in Übereinstimmung mit den übrigen Gliedern der Gesellschaft herausbringen werden? '$25 \times 25 = 625$' hieße also, daß Menschen, wenn sie unsrer Meinung nach die Regeln des Multiplizierens befolgen, bei der Multiplikation 25×25 zum Resultat 625 kommen werden.—Daß dies eine richtige Vorhersage ist, ist zweifellos; und auch, daß das Wesen des Rechnens auf solche Vorhersagen gegründet ist. D.h., daß wir etwas nicht 'rechnen' nennen würden, wenn wir so eine Prophezeiung nicht mit Sicherheit machen könnten. Das heißt eigentlich: das Rechnen ist eine Technik. Und was wir gesagt haben, gehört zum Wesen einer Technik.

67. Zum Rechnen gehört *wesentlich* dieser Consensus, das ist sicher. D.h.: zum Phänomen unseres Rechnens gehört dieser Consensus.

In einer *Rechen*technik müssen Prophezeiungen möglich sein.

Und das macht die Rechentechnik der Technik eines *Spieles*, wie des Schachs, ähnlich.

Aber wie ist das mit dem Consensus—heißt das nicht, daß *ein* Mensch allein nicht rechnen könnte? Nun, *ein* Mensch könnte jedenfalls nicht nur *einmal* in seinem Leben rechnen.

Man könnte sagen: alle *möglichen* Spielstellungen in Schach können als Sätze aufgefaßt werden, die sagen, sie (selbst) seien *mögliche* Spielstellungen; oder auch als Prophezeiungen: die Menschen werden diese Stellungen durch Züge erreichen können, welche sie übereinstimmend geometrical condition; where the means of proof are already prescribed and all that is being looked for is a particular arrangement.

65. Are the propositions of mathematics anthropological propositions saying how we men infer and calculate?—Is a statute book a work of anthropology telling how the people of this nation deal with a thief etc.?——Could it be said: "The judge looks up a book about anthropology and thereupon sentences the thief to a term of imprisonment"? Well, the judge does not USE the statute book as a manual of anthropology.

66. The prophecy does *not* run, that a man will get *this* result when he follows this rule in making a transformation—but that he will get this result, when we *say* that he is following the rule.

What if we said that mathematical propositions were prophecies in *this* sense: they predict what result members of a society who have learnt this technique will get in agreement with other members of the society? '$25 \times 25 = 625$' would thus mean that men, if we judge them to obey the rules of multiplication, will reach the result 625 when they multiply 25×25.—That this is a correct prediction is beyond doubt; and also that calculating is in essence founded on such predictions. That is to say, we should not call something 'calculating' if we could not make such a prophecy with certainty. This really means: calculating is a technique. And what we have said pertains to the essence of a technique.

67. This consensus belongs to the essence of *calculation*, so much is certain. I.e.: this consensus is part of the phenomenon of our calculating.

In a technique of *calculating* prophecies must be possible.

And that makes the technique of calculating similar to the technique of a *game*, like chess.

But what about this consensus—doesn't it mean that *one* human being by himself could not calculate? Well, *one* human being could at any rate not calculate just *once* in his life.

It might be said: all *possible* positions in chess can be conceived as propositions saying that they (themselves) are *possible* positions, or again as prophecies that people will be able to reach these positions by moves which they agree in saying are in accordance with the den Regeln gemäß erklären. Eine so *erhaltene* Spielstellung ist dann ein bewiesener Satz dieser Art.

"Eine Rechnung ist ein Experiment."——Eine Rechnung kann ein Experiment sein. Der Lehrer läßt der Schüler eine Rechnung machen um zu sehen, ob er rechnen kann; das ist ein Experiment.

Wenn in der Früh im Ofen Feuer gemacht wird, ist das ein Experiment? Aber es könnte eins sein.

Und so sind auch Schachzüge *nicht* Beweise und Schachstellungen nicht Sätze. Und mathematische Sätze nicht Spielstellungen. Und *so* sind sie auch nicht Prophezeiungen.

68. Wenn eine Rechnung ein Experiment ist; was ist dann ein Fehler in der Rechnung? Ein Fehler im Experiment? nicht doch; ein Fehler im Experiment wäre es gewesen, wenn ich die *Bedingungen* des Experiments nicht eingehalten hätte, wenn ich also jemanden etwa bei furchtbarem Lärm hätte rechnen lassen.

Aber warum soll ich nicht sagen: Ein Rechenfehler ist zwar kein *Fehler* im Experiment aber ein—manchmal erklärliches, manchmal nicht erklärliches—*Fehlgeben* des Experiments?

69. "Eine Rechnung, z.B. eine Multiplikation, ist ein Experiment: *wir wissen nicht, was herauskommen wird* und erfahren es nun, wenn die Multiplikation fertig ist."—Gewiß; wir wissen auch nicht, wenn wir spazieren gehen, an welchem Punkt wir uns in 5 Minuten befinden werden—aber ist Spazierengehen deshalb ein Experiment?—Gut; aber in der Rechnung wollte ich doch von vornherein wissen, was herauskommen werde; *das* war es doch, was mich interessierte. Ich bin doch neugierig auf das Resultat. Aber nicht, als auf das, was ich sagen *werde*, sondern, was ich sagen *soll*.

Aber interessiert dich nicht eben an dieser Multiplikation, wie die Allgemeinheit der Menchen rechnen wird? Nein—wenigstens für gewöhnlich nicht—wenn ich auch zu einem gemeinsamen Treffpunkt mit Allen eile.

Aber die Rechnung zeigt mir doch eben experimentell, wo dieser Treffpunkt liegt. Ich lasse mich gleichsam ablaufen und sehe, wo ich hingelange. Und die richtige Multiplikation ist das Bild davon, wie wir alle ablaufen, wenn wir *so* aufgezogen werden.

Die *Erfahrung* lehrt, daß wir Alle diese Rechnung richtig finden.

Wir lassen uns ablaufen und erhalten das Resultat der Rechnung. Aber nun—will ich sagen—interessiert uns nicht, daß wir—etwa unter diesen und diesen Bedingungen—dies Resultat erzeugt haben——uns interessiert das Bild des Ablaufs, allerdings als ein überzeugendes, rules. A position *reached* in this way is then a proved proposition of this kind.

"A calculation is an experiment."——A calculation can be an experiment. The teacher makes the pupil do a calculation in order to see whether he can calculate; that is an experiment.

When the stove is lit in the morning, is that an experiment? But it could be one.

And in the same way moves in chess are *not* proofs either, and chess positions are not propositions. And mathematical propositions are not positions in a game. And in *this* way they are not prophecies either.

68. If a calculation is an experiment, then what is a mistake in calculation? A mistake in the experiment? Surely not; it would have been a mistake in the experiment, if I had not observed the *conditions* of the experiment—if, e.g., I had made someone calculate when a terrible noise was going on.

But why should I not say: while a mistake in calculating is not a *mistake* in the experiment, still, it is a *miscarriage* of the experiment—sometimes explicable, sometimes inexplicable?

69. "A calculation, for example a multiplication, is an experiment: *we do not know what will result* and we learn it once the multiplication is done." —Certainly; nor do we know when we go for a walk where exactly we shall be in five minutes' time—but does that make going for a walk into an experiment?—Very well; but in the calculation I surely wanted from the beginning to know what the result was going to be; *that* was what I was interested in. I am, after all, curious about the result. Not, however, as what I am *going* to say, but as what I *ought* to say.

But isn't this just what interests you about this multiplication—how the generality of men will calculate? No—at least not usually—even if I am running to a common meeting point with everybody else.

But surely this is just what the calculation shews me experimentally —where this meeting point is. I as it were start myself working and see where I get. And the correct multiplication is the pattern of the way we all work, when we are set like *this*.

Experience teaches that we all find this calculation correct.

We start ourselves off and get the result of the calculation. But now—I want to say—we aren't interested in having—under such and such conditions say—actually produced this result, but in the pattern sozusagen *wohlklingendes*, aber nicht als das Resultat eines Experiments sondern als ein *Weg*.

Wir sagen nicht: "also *so* gehen wir!", sondern: "also *so* geht es!"

70. Unsre Zustimmung läuft gleich ab,—aber wir bedienen uns dieser Gleichheit des Ablaufs nicht bloß, um Zustimmungsabläufe vorauszusagen. Wie wir uns des Satzes "dies Heft ist rot" nicht nur *dazu bedienen* um vorherzusagen, daß die meisten Menschen das Heft 'rot' nennen werden.

"Und das *nennen* wir doch 'dasselbe'." Bestünde keine Übereinstimmung in dem, was wir 'rot' nennen, etc., etc., so würde die Sprache aufhören. Wie ist es aber bezüglich der Übereinstimmung in dem, was wir 'Übereinstimmung' nennen?

Wir können das Phänomen einer Sprachverwirrung beschreiben; aber welches sind für uns die Anzeichen einer Sprachverwirrung? Nicht notwendigerweise Tumult und Wirrwarr im Handeln. Dann also: daß ich mich, wenn die Leute sprechen, nicht auskenne; nicht übereinstimmend mit ihnen reagieren kann.

"Das ist für mich kein Sprachspiel." Ich könnte dann aber auch sagen: Sie begleiten zwar ihre Handlungen mit Sprachlauten, und ihre Handlungen kann ich nicht 'verwirrt' nennen, aber doch haben sie keine *Sprache*.—Vielleicht aber würden ihre Handlungen verwirrt, wenn man sie daran hinderte, jene Laute von sich zu geben.

71. Man könnte sagen: Ein Beweis dient der *Verständigung*. Ein Experiment setzt sie voraus.

Oder auch: Ein mathematischer Beweis formt unsre Sprache.

Aber es bleibt doch bestehen, daß man mittels eines mathematischen Beweises wissenschaftliche Voraussagen über das Beweisen anderer Menschen machen kann.—

Wenn mich Einer fragt: "Was für eine Farbe hat dieses Buch?" und ich antworte: "Es ist grün"—hätte ich ebensowohl die Antwort geben können: "Die Allgemeinheit der Deutschsprechenden nennt das 'grün' "?

Könnte er darauf nicht fragen: "Und wie nennst *du* es?" Denn er wollte meine Reaktion hören.

'*Die Grenzen des Empirismus*.'

72. Es gibt doch eine Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen;—ist das die Mathematik? Jene Wissenschaft wird sich auf Experimente stützen: und diese Experimente werden *Rechnungen* sein. Aber wie, wenn diese Wissenschaft recht exakt und am Ende gar eine 'mathematische' Wissenschaft würde?

Ist das Resultat dieser Experimente nun, daß Menschen in ihren of our working; it interests us as a convincing, harmonious, pattern–not, however, as the result of an experiment, but as a *path*.

We say, not: "So *that's* how we go!", but: "So *that's* how it goes!"

70. In what we accept we all work the same way, but we do not make use of this identity merely to predict what people will accept. Just as we do not *use* the proposition "this notebook is red" only to predict that most people will call it 'red'.

"And that's what we *call* 'the same'." If there did not exist an agreement in what we call 'red', etc. etc., language would stop. But what about the agreement in what we call 'agreement'?

We can describe the phenomenon of a confusion of language; but what are our tokens of confusion of language? Not necessarily tumult and muddle in action. But rather that, e.g. I am lost when people talk, I cannot react in agreement with them.

"For me this is not a language-game." But in this case I might also say: though they accompany their actions with spoken sounds and I cannot call their actions 'confused', still they haven't a *language*.—But perhaps their actions would become confused if they were prevented from emitting those sounds.

71. It could be said: a proof subserves mutual understanding. An experiment presupposes it.

Or even: a mathematical proof moulds our language.

But it surely remains the case that we can use a mathematical proof to make scientific predictions about the proving done by other people.—

If someone asks me: "What colour is this book?" and I reply: "It's green"—might I as well have given the answer: "The generality of English-speaking people call that 'green' "?

Might he not ask: "And what do *you* call it?" For he wanted to get my reaction.

'The limits of empiricism.'

72. But there is such a thing as a science of conditioned calculating reflexes;—is that mathematics? That science will rely on experiments: and these experiments will be *calculations*. But suppose this science became quite exact and in the end even a 'mathematical' science?

Now is the result of these experiments that human beings agree in

Rechnungen übereinstimmen, oder, daß sie darin übereinstimmen, was sie 'übereinstimmen' nennen? Und das geht so weiter.

Man könnte sagen: jene Wissenschaft würde nicht funktionieren, wenn wir in Bezug auf die Idee der Übereinstimmung nicht übereinstimmten.

Es ist doch klar, daß wir ein mathematisches Werk zum Studium der Anthropologie verwenden können. Aber eines ist dann nicht klar:—ob wir sagen sollen: "diese Schrift zeigt uns, wie bei diesem Volk mit Zeichen operiert wurde", oder ob wir sagen sollen: "diese Schrift zeigt uns, welche Teile der Mathematik dieses Volk beherrscht hat".

73. Kann ich, am Ende einer Multiplikation angelangt, sagen: "Also *damit* stimm' ich überein!—"?—Aber kann ich es bei einem *Schritt* der Multiplikation sagen? Etwa bei dem Schritt '$2 \times 3 = 6$'? Nicht ebensowenig, wie ich, auf dies Papier sehend, sagen kann: "Also das nenne ich 'weiß' "?

Ähnlich scheint mir der Fall zu sein, wenn jemand sagte: "Wenn ich mir ins Gedächtnis rufe, was ich heute getan habe, mache ich ein Experiment (ich lasse mich ablaufen) und die Erinnerung, die dann kommt, dient dazu, mir zu zeigen, was Andere, die mich gesehen haben, auf die Frage, was ich getan habe, antworten werden."

Was geschähe, wenn es uns öfter so ginge, daß wir eine Rechnung machen und sie als richtig finden; dann rechnen wir sie nach und finden, sie stimmt nicht: wir glauben, wir hätten früher etwas übersehen —wenn wir sie wieder nachrechnen, scheint uns unsre zweite Rechnung nicht zu stimmen, u.s.f.?

Sollte ich das nun ein Rechnen nennen oder nicht?—Er kann jedenfalls nicht die Voraussage auf seine Rechnung bauen, daß er das nächste Mal wieder dort landen wird.—Könnte ich aber sagen, er habe diesmal *falsch* gerechnet, weil er das nächste Mal nicht wieder so gerechnet hat? Ich könnte sagen: wo *diese* Unsicherheit bestünde, gäbe es kein Rechnen.

Aber ich sage doch anderseits wieder: "Wie man rechnet—so ist es richtig." Es *kann* kein Rechenfehler in '$12 \times 12 = 144$' bestehen. Warum? Dieser Satz ist unter die Regeln aufgenommen.

Ist aber '$12 \times 12 = 144$' die Aussage, es sei allen Menschen natürlich, 12×12 so zu rechnen, daß 144 herauskommt?

74. Wenn ich eine Rechnung mehrmals nachrechne, um sicher zu sein, daß ich richtig gerechnet habe, und wenn ich sie dann als richtig anerkenne,—habe ich da nicht ein Experiment wiederholt um sicher zu sein, daß ich das nächste Mal wieder gleich ablaufen werde?—Aber

their calculations, or that they agree in what they call "agreeing"? And so on and so on.

It could be said: that science would not function if we did not agree regarding the idea of agreement.

It is clear that we can make use of a mathematical work for a study in anthropology. But then one thing is not clear:—whether we ought to say: "This writing shews us how operating with signs was done among these people", or: "This writing shews us what parts of mathematics these people had mastered".

73. Can I say, on reaching the end of a multiplication: "So *this* is what I agree with!—"?—But can I say it at a single *step* of the multiplication? E.g. at the step '$2 \times 3 = 6$'? Any more than I can say: "So this is what I call '*white*'!", looking at this paper?

It seems to me it would be a similar case if someone were to say: "When I call to mind what I have done to-day, I am making an experiment (starting myself off), and the memory that then comes serves to shew me what other people, who saw me, will reply to the question what I did".

What would happen if we rather often had this: we do a calculation and find it correct; then we do it again and find it isn't right; we believe we overlooked something before—then when we go over it again our second calculation doesn't seem right, and so on.

Now should I call this calculating or not?—At any rate he cannot use this calculation to predict that he will land there again next time.—But could I say that he calculated *wrong* this time, because the next time he did not calculate again the same way? I might say: where *this* uncertainty existed there would be no calculating.

But on the other hand I say again: 'Calculating is right—as it is done'. There *can* be no mistake of calculation in '$12 \times 12 = 144$'. Why? This proposition has assumed a place among the rules.

But is '$12 \times 12 = 144$' the assertion that it is natural to all men to work out 12×12 in such a way that the answer is 144?

74. If I go over a calculation several times so as to be sure of having done it right, and if I then accept it as correct,—haven't I repeated an experiment so as to be sure that I shall tick the same way the next time?—But why should going over the calculation three times

warum sollte mich dreimaliges Nachrechnen davon überzeugen, daß ich das vierte Mal ebenso ablaufen werde?—Ich würde sagen: ich habe nachgerechnet, um sicher zu sein, 'daß ich nichts übersehen habe'.

Die Gefahr ist hier, glaube ich, eine Rechtfertigung unsres Vorgehens zu geben, wo es eine Rechtfertigung nicht gibt und wir einfach sagen sollten: *so machen wir's*.

Wenn Einer wiederholt ein Experiment anstellt, 'immer wieder mit dem gleichen Resultat', hat er dann zugleich ein Experiment gemacht, das ihn lehrt, *was* er 'das gleiche Resultat' nennt, wie er also das Wort "gleich" gebraucht? Mißt der, der den Tisch mit dem Zollstock mißt, auch den Zollstock? Mißt er den Zollstock, so kann er dabei den Tisch nicht messen.

Wie, wenn ich sagte: "Wenn Einer den Tisch mit dem Zollstock mißt, so macht er dabei ein Experiment, welches ihn lehrt, was bei der Messung dieses Tisches mit *allen andern* Zollstäben herauskäme"? Es ist doch gar kein Zweifel, daß man aus der Messung mit *einem* Zollstab voraussagen kann, was die Messung mit andern Zollstäben ergeben wird. Und ferner, könnte man es nicht tun—daß dann unser ganzes System des Messens zusammenfiele.

Kein Zollstab, könnte man sagen, wäre richtig, wenn sie nicht allgemein übereinstimmten.—Aber wenn ich das sage, so meine ich nicht, daß sie dann alle *falsch* wären.

75. Das Rechnen verlöre seinen Witz, wenn *Verwirrung* einträte. Wie der Gebrauch der Worte "grün" und "blau" seinen Witz verlöre. Und doch scheint es Unsinn zu sein zu sagen—daß ein Rechensatz *sage*: es werde keine Verwirrung eintreten.—Ist die Lösung einfach die, daß der Rechensatz nicht *falsch* werde sondern nutzlos, wenn Verwirrung einträte?

Sowie der Satz, dies Zimmer ist 16 Fuß lang, dadurch nicht *falsch* würde, daß Verwirrung in den Maßstäben und im Messen einträte. Sein Sinn, nicht seine Wahrheit, basiert auf dem ordnungsgemäßen Ablauf der Messungen. (Sei aber hier nicht dogmatisch. Es gibt Übergänge, die die Betrachtung erschweren.)

Wie, wenn ich sagte: der Rechensatz drückt die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten.—

Dann drückt der Gebrauch aller Worte die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten.

Man kann aber dennoch nicht sagen, der Gebrauch des Wortes "grün" besage, es werde keine Verwirrung eintreten—weil dann der convince me that I shall tick the same way the fourth time?—I'd say: I went over the calculation 'so as to be sure of not having overlooked anything'.

The danger here, I believe, is one of giving a justification of our procedure where there is no such thing as a justification and we ought simply to have said: *that's how we do it.*

When somebody makes an experiment repeatedly 'always with the same result', has he at the same time made an experiment which tells him *what* he will call 'the same result', i.e. how he uses the word "the same"? If you measure a table with a yardstick, are you also measuring the yardstick? If you are measuring the yardstick, then you cannot be measuring the table at the same time.

Suppose I were to say: "When someone measures the table with a yardstick he is making an experiment which tells him the results of measuring this table with *all other* yardsticks"? It is after all beyond doubt that a measurement with one yardstick can be used to predict the results of measurement with others. And, further, that if it could not—our whole system of measuring would collapse.

No yardstick, it might be said, would be correct, if in general they did not agree.—But when I say that, I do not mean that then they would all be *false*.

75. Calculating would lose its point, if *confusion* supervened. Just as the use of the words "green" and "blue" would lose its point. And yet it seems to be nonsense to say—that a proposition of arithmetic *asserts* that there will not be confusion.—Is the solution simply that the arithmetical proposition would not be *false* but useless, if confusion supervened?

Just as the proposition that this room is 16 foot long would not become *false*, if rulers and measuring fell into confusion. Its sense, not its truth, is founded on the regular working of measurements. (But don't be dogmatic here. There are transitional cases which complicate the discussion.)

Suppose I were to say: an arithmetical proposition expresses confidence that confusion will not supervene.

Then the use of all words expresses confidence that confusion will not supervene.

We cannot say, however, that use of the word "green" signifies that confusion will not supervene—because then the use of the word

Gebrauch des Wortes "Verwirrung" wieder eben dasselbe über *dieses* Wort aussagen müßte.

Wenn '25 × 25 = 625' die Zuversicht ausspricht, wir werden uns immer wieder leicht dahin einigen können, daß der Weg, der mit diesem Satz endet, zu nehmen sei—wie drückt dann dieser Satz nicht die andere Zuversicht aus, wir würden uns immer wieder über *seinen* Gebrauch einigen können?

Wir spielen mit den beiden Sätzen nicht das gleiche Sprachspiel.

Oder kann man sowohl zuversichtlich sein, man werde dort die gleiche Farbe sehen, wie hier—und auch: man werde die Farbe, wenn sie die gleiche ist, gleich zu benennen geneigt sein?

Ich will doch sagen: Die Mathematik ist als solche immer Maß und nicht Gemessenes.

76. Der Begriff des Rechnens schließt Verwirrung aus.—Wie, wenn Einer beim Rechnen einer Multiplikation zu verschiedenen Zeiten Verschiedenes herausbrächte und dies *sähe*, aber in der Ordnung fände?—Aber dann könnte er doch das Multiplizieren nicht zu den Zwecken verwenden, wie wir es tun!—Warum nicht? Und es ist auch nicht gesagt, daß er dabei übel fahren müßte.

Die Auffassung der Rechnung als Experiment kommt uns leicht als die einzige *realistische* vor.

Alles andere, meinen wir, sei Gefasel. Im Experiment haben wir etwas Greifbares. Es ist beinahe, als sagte man: "Ein Dichter, wenn er dichtet, stellt ein psychologisches Experiment an. Nur so ist es zu erklären, daß ein Gedicht einen Wert haben kann." Man verkennt das Wesen des '*Experiments*',—indem man glaubt, jeder Vorgang, auf dessen Ende wir gespannt sind, sei, was wir "Experiment" nennen.

Es scheint wie Obskurantismus, wenn man sagt, eine Rechnung sei kein Experiment. In gleicher Weise auch die Feststellung, die Mathematik *handle* nicht von Zeichen, oder Schmerz sei nicht eine Form des Benehmens. Aber nur, weil die Leute glauben, man behaupte damit die Existenz eines ungreifbaren, d.i. schattenhaften, Gegenstands neben dem uns Allen greifbaren. Während wir nur auf verschiedene Verwendungsweisen der Worte hinweisen.

Es ist beinahe als sagte man: 'blau' müsse einen blauen Gegenstand bezeichnen——der Zweck des Wortes wäre sonst nicht einzusehen.

77. Ich habe ein Spiel erfunden—komme drauf, daß, wer anfängt, immer gewinnen muß: Es ist also kein Spiel. Ich ändere es ab; nun ist es in Ordnung.

"confusion" would have in its turn to assert just the same thing about *this* word.

If '25 × 25 = 625' expresses the confidence that we shall always find it easy to agree on taking the road that ends with this proposition—then why doesn't this last clause express confidence in something different, viz. that we should always be able to agree about *its* use?

We do not play the same language-game with the two propositions.

Or can one equally well be confident that one will see the same colour over there as here—and also: that one will be inclined to call the colour the same, if it is the same?

What I want to say is: mathematics as such is always measure, not thing measured.

76. The concept of calculating excludes *confusion*.—Suppose someone were to get different results at different times when he did a multiplication, and *saw* this, but found it all right?—But then surely he could not use the multiplication for the same purposes as we!—Why not? Nor is there anything to say that he would necessarily fare ill if he did.

The conception of calculation as an experiment tends to strike us as the only *realistic* one.

Everything else, we think, is moonshine. In an experiment we have something tangible. It is almost as if one were to say: "When a poet composes he is making a psychological experiment; that is the only way of explaining how a poem can have value". We mistake the nature of '*experiment*',—believing that whenever we are keen on knowing the end of a process, it is what we call an "experiment".

It looks like obscurantism to say that a calculation is not an experiment. And in the same way so does the statement that mathematics does not *treat* of signs, or that pain is not a form of behaviour. But only because people believe that one is asserting the existence of an intangible, i.e. a shadowy, object side by side with what we all can grasp. Whereas we are only pointing to different modes of employment of words.

It is almost as if one were to say: 'Blue' has to stand for a blue object——otherwise we could not see what the word was for.

77. I have invented a game—realize that whoever begins must always win: so it isn't a game. I alter it; now it is all right.

Habe ich ein Experiment gemacht, und war das Ergebnis, daß, wer anfängt, immer gewinnt? Oder: daß wir so zu spielen geneigt sind, daß dies geschieht? Nein.——Aber das Resultat hättest du dir doch nicht erwartet! Freilich nicht; aber das macht das Spiel nicht zum Experiment.

Was heißt es aber: Nicht wissen, *woran es liegt*, daß es immer so ausgehen muß? Nun, es liegt an den Regeln.—Ich will wissen, wie ich die Regeln abändern muß, um zu einem richtigen Spiel zu gelangen.—Aber du kannst sie ja z.B. *ganz* abändern—also statt deinem ein gänzlich anderes Spiel angeben.—Aber das will ich nicht. Ich will die Regeln im großen ganzen beibehalten und nur einen Fehler ausmerzen.—Aber das ist vag. Es ist nun einfach *nicht klar*, was als dieser Fehler zu betrachten ist.

Es ist beinahe, wie wenn man sagt: Was ist der Fehler in diesem Musikstück? es klingt nicht gut in den Instrumenten.—Nun, den Fehler muß man nicht in der Instrumentation suchen; man *könnte* ihn in den Themen suchen.

Nehmen wir aber an, das Spiel sei so, daß, wer anfängt, immer durch einen bestimmten einfachen Trick gewinnen kann. Darauf aber sei man nicht gekommen;—es ist also ein Spiel. Nun macht uns jemand darauf aufmerksam;—und es hört auf, ein Spiel zu sein.

Wie kann ich das wenden, daß es mir klar wird?—Ich will nämlich sagen: "und es hört auf ein Spiel zu sein"—nicht: "und wir sehen nun, daß es kein Spiel war".

Das heißt doch, ich will sagen, man kann es auch so auffassen: daß der Andre uns nicht auf etwas *aufmerksam gemacht* hat; sondern daß er uns statt unseres ein andres Spiel gelehrt hat.——Aber wie konnte durch das neue das alte obsolet werden?—Wir sehen nun etwas anderes und können nicht mehr naiv weiterspielen.

Das Spiel bestand einerseits in unsern Handlungen (Spielhandlungen) auf dem Brett; und diese Spielhandlungen könnte ich jetzt so gut ausführen wie früher. Aber anderseits war dem Spiel doch wesentlich, daß ich blind versuchte zu gewinnen; und das kann ich jetzt nicht mehr.

78. Nehmen wir an: die Menschen haben ursprünglich die 4 Species in gewöhnlicher Weise gepflogen. Dann fingen sie an, mit Klammerausdrücken zu rechnen und auch mit solchen von der Form $(a-a)$. Sie bemerkten nun, daß z.B. Multiplikationen vieldeutig wurden. Müßte sie das in Verwirrung stürzen? Müßten sie sagen: "Nun erscheint der Grund der Arithmetik zu wanken"?

Did I make an experiment, whose result was that whoever begins must always win? Or that we are inclined to play in such a way that this happens? No.——But the result was not what you would have expected! Of course not; but that does not make the game into an experiment.

But what does it mean not to know *why* it always has to work out like that? Well, it is because of the rules.—I want to know how I must alter the rules in order to get a proper game.—But you can e.g. alter them *entirely*—and so give a quite different game in place of this one.—But that is not what I want. I want to keep the general outline of the rules and only eliminate a mistake.—But that is vague. It is now simply *not clear* what is to be considered as the mistake.

It is almost like when one says: What is the mistake in this piece of music? It doesn't sound well on the instruments.—Now the mistake is not necessarily to be looked for in the instrumentation; it *could* be looked for in the themes.

Let us suppose, however, that the game is such that whoever begins can always win by a particular simple trick. But this has not been realized;—so it is a game. Now someone draws our attention to it; —and it stops being a game.

What turn can I give this, to make it clear to myself?—For I want to say: "and it stops being a game"—not: "and we now see that it wasn't a game".

That means, I want to say, it can also be taken like this: the other man did not *draw our attention* to anything; he taught us a different game in place of our own.——But how can the new game have made the old one obsolete?—We now see something different, and can no longer naïvely go on playing.

On the one hand the game consisted in our actions (our play) on the board; and these actions I could perform as well now as before. But on the other hand it was essential to the game that I blindly tried to win; and now I can no longer do that.

78. Let us suppose that people originally practised the four kinds of calculation in the usual way. Then they began to calculate with bracketed expressions, including ones of the form $(a - a)$. Then they noticed that multiplications, for example, were becoming ambiguous. Would this have to throw them into confusion? Would they have to say: "Now the solid ground of arithmetic seems to wobble"?

Und wenn sie nun einen Beweis der Widerspruchsfreiheit fordern, weil sie sonst bei jedem Schritt in Gefahr wären, in den Sumpf zu fallen——was fordern sie da? Nun, sie fordern eine *Ordnung*. Aber war früher *keine* Ordnung?—Nun, sie fordern eine Ordnung, die sie jetzt beruhigt.—Aber sind sie wie Kinder und sollen nur eingelullt werden?

Nun, die Multiplikation würde doch durch ihre Vieldeutigkeit praktisch unbrauchbar—d.h.: für die früheren normalen Zwecke. Voraussagen, die wir auf Multiplikationen basiert hätten, träfen nicht mehr ein.—(Wenn ich voraussagen wollte, wie lang eine Reihe von Soldaten ist, die aus einem Carré von 50×50 gebildet werden kann, käme ich immer wieder zu falschen Resultaten.)

Also ist diese Rechnungsart falsch?—Nun, sie ist für *diese* Zwecke unbrauchbar. (Vielleicht für andre brauchbar.) Ist es nicht, wie wenn ich einmal statt zu multiplizieren, dividierte? (Wie dies wirklich vorkommen kann.)

Was heißt das: "Du mußt hier *multiplizieren*; nicht dividieren!"—

Ist nun die gewöhnliche Multiplikation ein *rechtes* Spiel, ist es *unmöglich* auszugleiten? Und ist die Rechnung mit $(a-a)$ kein rechtes Spiel—ist es unmöglich *nicht* auszugleiten?

(*Beschreiben*, nicht erklären, ist, was wir wollen!)

Nun, wie ist das, wenn wir uns in unserem Kalkül nicht auskennen?

Wir gingen schlafwandelnd den Weg zwischen Abgründen dahin.—Aber wenn wir auch jetzt sagen: "Jetzt sind wir wach",—können wir sicher sein, daß wir nicht eines Tages aufwachen werden? (Und dann sagen: wir haben also wieder geschlafen.)

Können wir sicher sein, daß es nicht jetzt Abgründe gibt, die wir nicht sehen?

Wie aber, wenn ich sagte: Die Abgründe in einem Kalkül sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe!

Irrt uns jetzt kein Teufelchen? Nun wenn es uns irrt,—so macht's nichts. Was ich nicht weiß, macht mich nicht heiß.

Nehmen wir an: dividierte ich manchmal so durch 3:

manchmal so:

und merkte es nicht.—Dann macht mich jemand darauf aufmerksam.

And if they now demand a proof of consistency, because otherwise they would be in danger of falling into the bog at every step——what are they demanding? Well, they are demanding a kind of *order*. But was there *no* order before?—Well, they are asking for an order which appeases them now.—But are they like small children, that merely have to be lulled asleep?

Well, multiplication would surely become unusable in practice because of its ambiguity—that is for the former normal purposes. Predictions based on multiplications would no longer hit the mark.—(If I tried to predict the length of the line of soldiers that can be formed from a square 50×50, I should keep on arriving at wrong results.)

Is this kind of calculation wrong, then?—Well, it is unusable for *these* purposes. (Perhaps usable for other ones.) Isn't it as if I were once to divide instead of multiplying? (As can actually happen.)

What is meant by: "You have to *multiply* here; not divide!"—

Now is ordinary multiplication a *proper* game; is it *impossible* to trip up? And is the calculation with $(a - a)$ not a proper game—is it impossible *not* to trip up?

(What we want is to *describe*, not to explain.)

Now, what is it for us not to know our way about in our calculus?

We went sleepwalking along the road between abysses.—But even if we now say: "Now we are awake",—can we be certain that we shall not wake up one day? (And then say:—so we were asleep again.)

Can we be certain that there are not abysses now that we do not see?

But suppose I were to say: The abysses in a calculus are not there if I don't see them!

Is no demon deceiving us at present? Well, if he is, it doesn't matter. What the eye doesn't see the heart doesn't grieve over.

Suppose I were to divide by 3 sometimes like this:

sometimes like this

without noticing it.—Then someone draws my attention to it.

Auf einen Fehler? Ist es unbedingt ein Fehler? Und unter welchen Umständen nennen wir es so?

79. $$\left.\begin{array}{l} \sim f(f) = \phi(f)\,\mathrm{Def.} \\ \quad\therefore \\ \phi(\phi) = \sim\phi(\phi) \end{array}\right\}$$

Die Sätze '$\phi(\phi)$' und '$\sim\phi(\phi)$' scheinen uns einmal das Gleiche und einmal Entgegengesetztes zu sagen. *Je nachdem wir ihn ansehen*, scheint der Satz '$\phi(\phi)$' einmal zu sagen $\sim\phi(\phi)$, einmal das Gegenteil davon. Und zwar sehen wir ihn einmal als das Substitutionsprodukt

$$\phi(f)\,\Big|\,\begin{array}{l} f \\ \phi \end{array}$$

ein andermal als

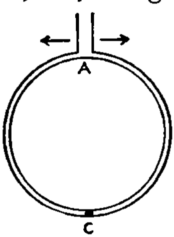
$$f(f)\,\Big|\,\begin{array}{l} f \\ \phi \end{array}$$

Wir möchten sagen: " 'heterologisch' ist nicht heterologisch; also kann man es nach der Definition 'heterologisch' nennen." Und klingt ganz richtig, geht ganz glatt, und es braucht uns der Widerspruch gar nicht auffallen. Werden wir auf den Widerspruch aufmerksam, so möchten wir zuerst sagen, daß wir mit der Aussage, ξ ist heterologisch, in den beiden Fällen nicht dasselbe meinen. Einmal sei es die unabgekürzte Aussage, das andre mal die nach der Definition abgekürzte.

Wir möchten uns dann aus der Sache ziehen, indem wir sagen: '$\sim\phi(\phi) = \phi_1(\phi)$'. Aber warum sollen wir uns so belügen? Es führen hier wirklich zwei *entgegengesetzte* Wege—zu dem *Gleichen*.

Oder auch:—*es ist ebenso natürlich*, in diesem Falle '$\sim\phi(\phi)$' zu sagen, wie '$\phi(\phi)$'.

Es ist, der Regel gemäß, ein ebenso natürlicher Ausdruck zu sagen *C* liege vom Punkte *A* rechts, wie, es liege links. Dieser Regel gemäß



—welche sagt, ein Ort liege in der Richtung des Pfeils, wenn die Straße, die in dieser Richtung beginnt, zu ihm führt.

Sehen wir's vom Standpunkt der Sprachspiele an.—

Wir haben ursprünglich das Spiel nur mit geraden Straßen gespielt.——

To a mistake? Is it necessarily a mistake? And in what circumstances do we call it one?

79. $$\left.\begin{array}{c} \sim f(f) = \phi(f)\ \text{Def.} \\ \therefore \\ \phi(\phi) = \sim\phi(\phi) \end{array}\right\}$$

The propositions '$\phi(\phi)$' and '$\sim\phi(\phi)$' sometimes seem to say the same thing and sometimes opposite things. *According as we look at it* the proposition '$\phi(\phi)$' sometimes seems to say $\sim\phi(\phi)$, sometimes the opposite. And we sometimes see it as the product of the substitution:

$$\phi(f)\,\Big|^{f}_{\phi}$$

At other times as:

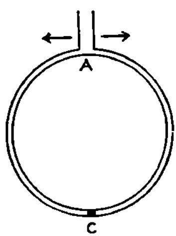
$$f(f)\,\Big|^{f}_{\phi}$$

We should like to say: " 'Heterological' is not heterological; so by definition it can be called 'heterological'." And it sounds all right, goes quite smoothly, and the contradiction need not strike us at all. If we become aware of the contradiction, we should at first like to say that we do not mean the same thing by the assertion, ξ is heterological, in the two cases. The one time it is the unabbreviated assertion, the other time the assertion abbreviated according to the definition.

We should then like to get out of the thing by saying: '$\sim\phi(\phi) = \phi_1(\phi)$'. But why should we lie to ourselves like this? Here two *contrary* routes really do lead—to the *same* thing.

Or again:—*it is equally natural* in this case to say '$\sim\phi(\phi)$' and '$\phi(\phi)$'.

According to the rule it is an equally natural expression to say that C lies to the right of the point A and that it lies to the left.



According to this rule—which says that a place lies in the direction of the arrow if the street that begins in that direction leads to it.

Let us look at it from the point of view of the language-games.—

Originally we played the game only with straight streets.———

80. Könnte man sich etwa denken, daß, wo ich *blau* sehe, das bedeutet, daß der Gegenstand, den ich sehe, *nicht* blau ist—daß die Farbe, die mir erscheint, immer als die gilt, die *ausgeschlossen* ist? Ich könnte z.B. glauben, daß Gott mir immer eine Farbe zeigt um zu sagen: Die *nicht*.

Oder geht es so: Die Farbe, die ich sehe, sage mir bloß, daß diese Farbe in der Beschreibung des Gegenstands eine Rolle spielt. Sie entspricht nicht einem Satz, sondern nur dem Wort "blau". Und die Beschreibung des Gegenstands kann also ebenso gut heißen: "er ist blau", als auch "er ist nicht blau". Man sagt dann: das Auge zeigt mir nur Bläue, aber nicht die Rolle dieser Bläue.—Wir vergleichen das Sehen der Farbe mit dem Hören des Wortes "blau", wenn wir das *Übrige* des Satzes nicht gehört haben.

Ich möchte zeigen, daß man dahin geführt werden könnte, daß etwas blau ist, mit den Worten beschreiben zu wollen, es sei blau und auch, es sei nicht blau.

Daß wir also, unter der Hand, die Projektionsmethode so verschieben könnten, daß 'p' und '$\sim p$' den gleichen Sinn erhalten. Wodurch sie ihn aber verlieren, wenn ich nicht etwas Neues als Negation einführe.

Ein Sprachspiel kann nun durch einen Widerspruch seinen *Sinn* verlieren, den Charakter des Sprachspiels.

Und hier ist es wichtig zu sagen, daß dieser Charakter nicht dadurch beschrieben ist, daß man sagt, die Laute müssen eine gewisse *Wirkung* haben. Denn das Sprachspiel (2)[1] würde den Charakter des Sprachspiels einbüßen, wenn statt der 4 Befehle immer wieder andere Laute vom Bauenden ausgestoßen würden; auch wenn etwa physiologisch gezeigt werden könnte, daß immer wieder diese Laute es seien, die den Helfer dazu bewegen, die Bausteine zu bringen, die er bringt.

Auch hier könnte man sagen, daß freilich die Betrachtung der Sprachspiele ihre Wichtigkeit darin hat, daß Sprachspiele immer wieder funktionieren. Daß also ihre Wichtigkeit darin liegt, daß die Menschen sich zu einer solchen Reaktion auf Laute abrichten lassen.

Damit hängt, scheint mir, die Frage zusammen, ob eine Rechnung ein Experiment ist zum Zweck, Rechnungsabläufe vorauszusagen. Denn wie, wenn man eine Rechnung ausführte und—richtig—voraussagte, man werde das nächste Mal anders rechnen, da ja die Umstände sich beim nächsten Mal schon dadurch geändert haben, daß man die Rechnung nun bereits *so und so* oftmal gemacht hat?

Das Rechnen ist ein Phänomen, das wir vom Rechnen her kennen. Wie die Sprache ein Phänomen ist, das wir von unsrer Sprache her kennen.

[1] "Philosophische Untersuchungen," § 2.

80. Could it perhaps be imagined that where I see *blue*, this means that the object that I see is *not* blue—that the colour that appears to me always counts as the one that is *excluded*? I might for example believe that God always shews me a colour in order to say: *not* this.

Or does this work: the colour that I see merely tells me that this colour plays a part in the description of the object. It corresponds, not to a proposition, but merely to the word "blue". And the description of the object can then equally well run: "it is blue", and "it is not blue". Then one says: the eye only shows me blue, but not the role of this blue.—We compare seeing the colour with hearing the word "blue" when we have not heard the rest of the sentence.

I should like to shew that we could be led to want to describe something's being blue, both by saying it was blue, and by saying it was not blue.

And so that it is in our hands to make such a shift in the method of projection that 'p' and '$\sim p$' get the same sense. By which, however, they lose it, if I do not introduce something new as negation.

Now a language-game can lose its sense through a contradiction, can lose the character of a language-game.

And here it is important to say that this character is not described by saying that the sounds must have a certain *effect*. For our language-game (2)[1] would lose the character of a language-game if the builders kept on uttering different sounds instead of the 4 orders; even if it could be shewn, say physiologically, that it was always these noises that moved the assistant to bring the stones that he did bring.

Even here it could be said that of course the examination of language-games gets its importance from the fact that language-games continue to function. And so that it gets its importance from the fact that human beings can be trained to such a reaction to sounds.

It seems to me that there is a connexion between this and the question whether a calculation is an experiment made with a view to predicting the course of calculations. For suppose that one did a calculation and —correctly—predicted that one would calculate differently the next time, since the circumstances have changed then precisely by one's already having done the calculation *so-and-so* many times.

Calculating is a phenomenon which we know from calculating. As language is a phenomenon which we know from our language.

[1] *Philosophical Investigations*, § 2.

Kann man sagen: "Der Widerspruch ist unschädlich, wenn er abgekapselt werden kann"? Was aber hindert uns, ihn abzukapseln? Daß wir uns im Kalkül nicht auskennen. *Das* also ist der Schaden. Und das ist es, was man meint, wenn man sagt: der Widerspruch zeige an, daß etwas in unserem Kalkül nicht in Ordnung sei. Er sei bloß das lokale *Symptom* einer Krankheit des ganzen Körpers. Aber der Körper ist nur krank, wenn wir uns nicht auskennen.

Der Kalkül hat eine heimliche Krankheit, heißt: was wir vor uns haben, ist, wie es ist, kein Kalkül, und *wir kennen uns nicht aus*—d.h., wir können keinen Kalkül angeben, der diesem Kalkül-Ähnlichen 'im Wesentlichen' entspricht und nur das Faule in ihm ausschließt.

Aber wie ist es möglich, sich in einem Kalkül nicht auszukennen; liegt er denn nicht offen vor uns?!

Denken wir uns den Fregeschen Kalkül mitsamt dem Widerspruch in ihm gelehrt. Nicht aber so, daß man diesen als etwas Krankhaftes hinstellt. Er ist vielmehr ein anerkannter Teil des Kalküls, es wird mit ihm gerechnet. (Die Rechnungen dienen nicht dem gewöhnlichen Zweck logischer Rechnungen.)—Nun wird die Aufgabe gestellt, diesen Kalkül, von dem der Widerspruch ein durchaus wohlanständiger Teil ist, in einen andern umzuwandeln, in dem es diesen Widerspruch nicht geben soll, da man den Kalkül nun zu Zwecken verwenden will, die einen Widerspruch unerwünscht machen.—Was ist das für eine Aufgabe? Und was ist das für ein Unvermögen, wenn wir sagen: "Wir haben einen Kalkül, der dieser Bedingung entspricht, noch nicht gefunden"?

Mit: "ich kenne mich in dem Kalkül nicht aus"—meine ich nicht einen seelischen Zustand, sondern ein Unvermögen, etwas zu *tun*.

Es ist oft zur Klärung eines philosophischen Problems sehr nützlich, sich die historische Entwicklung, in der Mathematik, z.B., ganz anders vorzustellen, als sie tatsächlich war. Wäre sie anders gewesen, so käme niemand auf die Idee zu sagen, was man tatsächlich sagt.

Ich möchte etwas fragen, wie: "Gehst du bei deinem Kalkül auf Nützlichkeit aus?—dann erhältst du auch keinen Widerspruch. Und wenn du nicht auf Nützlichkeit ausgehst—dann macht es schließlich nichts, wenn du einen erhälst."

81. Unsre Aufgabe ist es nicht, Kalküle zu finden, sondern den *gegenwärtigen* Zustand zu beschreiben.

Die Idee des Prädikats, das von sich selber gilt, etc., stützt sich freilich auf *Beispiele*—aber diese Beispiele waren ja *Dummheiten*, sie waren ja gar nicht ausgedacht. Aber das sagt nicht, daß solche Prädi-

Can we say: 'Contradiction is harmless if it can be sealed off'? But what prevents us from sealing it off? That we do not know our way about in the calculus. Then *that* is the harm. And this is what one means when one says: the contradiction indicates that there is something wrong about our calculus. It is merely the (local) *symptom* of a sickness of the whole body. But the body is only sick if we do not know our way about.

The calculus has a secret sickness, means: what we have got is, as it is, not a calculus, and *we do not know our way about*—i.e. cannot give a calculus which corresponds 'in essentials' to this simulacrum of a calculus, and only excludes what is wrong in it.

But how is it possible not to know one's way about in a calculus: isn't it there, open to view?!

Let us imagine having been taught Frege's calculus, contradiction and all. But the contradiction is not presented as a disease. It is, rather, an accepted part of the calculus, and we calculate with it. (The calculations do not serve the usual purpose of logical calculations.)—Now we are set the task of changing this calculus, of which the contradiction is an entirely respectable part, into another one, in which this contradiction is not to exist, as the new calculus is wanted for purposes which make a contradiction undesirable.—What sort of problem is this? And what sort of inability is it, if we say: "We have not yet found a calculus satisfying this condition"?

When I say: "I don't know my way about in the calculus"—I do not mean a mental state, but an inability to *do* something.

It is often useful, in order to help clarify a philosophical problem, to imagine the historical development, e.g. in mathematics, as quite different from what it actually was. If it had been different no one would have had the idea of saying what is actually said.

I should like to ask something like: "Is it usefulness you are out for in your calculus?—In that case you do not get any contradiction. And if you aren't out for usefulness—then it doesn't matter if you do get one."

81. Our task is, not to discover calculi, but to describe the *present* situation.

The idea of the predicate which is true of itself etc. does of course lean on *examples*—but these examples were *stupidities*, for they were not thought out at all. But that is not to say that such predicates could kate nicht verwendet werden könnten, und daß dann nicht der Widerspruch seine Verwendung hätte!

Ich meine: wenn man sein Augenmerk wirklich auf die Verwendung richtet, so kommt man gar nicht auf die Idee '$f(f)$' zu schreiben. Anderseits kann man, wenn man die Zeichen im Kalkül, sozusagen, *voraussetzungslos* gebraucht, auch '$f(f)$' schreiben, und muß dann die Konsequenzen ziehen und darf nicht vergessen, daß man von einer eventuellen praktischen Verwendung dieses Kalküls noch keine *Ahnung* hat.

Ist die Frage die: "Wo haben wir das Gebiet der Brauchbarkeit verlassen?"—

Wäre es denn nicht möglich, daß wir einen Widerspruch hervorbringen *wollten*? Daß wir—mit dem Stolz auf eine mathematische Entdeckung—sagten: "Sieh, so erzeugen wir einen Widerspruch". Wäre es nicht möglich, daß z.B. viele Leute versucht hätten, einen Widerspruch im Gebiet der Logik zu erzeugen, und daß es dann endlich *einem* gelungen wäre?

Aber warum hätten Leute *das* versuchen sollen? Nun, ich kann vielleicht jetzt nicht den plausibelsten Zweck angeben. Aber warum nicht z.B. um zu zeigen, daß alles auf dieser Welt ungewiß sei?

Dies Leute würden dann Ausdrücke von der Form '$f(f)$' zwar nie wirklich verwenden, wären aber doch froh, in der *Nachbarschaft* eines Widerspruchs zu leben.

"Sehe ich eine *Ordnung*, die mich verhindert, unversehens zu einem Widerspruch zu kommen?" Das ist so, wie wenn ich sage: Zeige mir eine Ordnung in meinem Kalkül, die mich überzeugt, daß ich auf diese Weise nicht einmal zu einer Zahl kommen kann, die. . . . Ich zeige ihm dann etwa einen Rekursionsbeweis.

Ist es aber falsch zu sagen: "Nun, ich gehe meinen Weg weiter. *Sehe* ich einen Widerspruch, so ist es Zeit, etwas zu machen."?—Heißt das: nicht wirklich Mathematik betreiben? Warum soll das *nicht* Kalkulieren sein?! Ich gehe ruhig diesen Weg weiter; sollte ich an einen Abgrund kommen, so werde ich versuchen, umzukehren. Ist das nicht 'gehen'?

Denken wir uns folgenden Fall: Die Leute eines gewissen Stammes können nur mündlich rechnen. Sie kennen die Schrift noch nicht. Sie lehren ihre Kinder im Dezimalsystem zählen. Es kommen bei ihnen sehr häufige Fehler im Zählen vor, Ziffern werden wiederholt oder ausgelassen, ohne daß sie es bemerken. Ein Reisender aber nimmt ihr Zählen phonographisch auf. Er lehrt sie die Schrift und schriftliches Rechnen und zeigt ihnen dann, wie oft sie sich beim bloß mündlichen Rechnen verrechnen.—Müssen diese Leute nun zugeben, sie hätten not be applied, and that the contradiction would not then have its application!

I mean: if one really fixes one's eye on the application, it does not occur to one at all to write '$f(f)$'. On the other hand, if one is using the signs in the calculus, *without presuppositions* so to speak, one may also write '$f(f)$', and must then draw the consequences and not forget that one has not yet an *inkling* of a possible practical application of this calculus.

Is the question this: "Where did we forsake the region of usability?"?—

For might we not possibly have *wanted* to produce a contradiction? Have said—with pride in a mathematical discovery: "Look, this is how we produce a contradiction"? Might not e.g. a lot of people possibly have tried to produce a contradiction in the domain of logic, and then at last *one* person succeeded?

But why should people have tried to do *this*? Perhaps I cannot at present suggest the most plausible purpose. But why not e.g. in order to show that everything in this world is uncertain?

These people would then never actually employ expressions of the form $f(f)$, but still would be glad to lead their lives in the *neighbourhood* of a contradiction.

"Can I see an *order* which prevents me from unwittingly arriving at a contradiction?" That is like saying: shew me an order in my calculus to convince me that I can never in this way arrive at a number which. . . . Then I shew him e.g. a recursive proof.

But is it wrong to say: "Well, I shall go on. If I *see* a contradiction, then will be the time to do something about it."?—Is that: not really doing mathematics? Why should that *not* be calculating?! I travel this road untroubled; if I should come to a precipice I shall try to turn round. Is that not 'travelling'?

Let us imagine the following case: the people of a certain tribe only know oral calculation. They have no acquaintance with writing. They teach their children to count in the decimal system. Among them mistakes in counting are very frequent, digits get repeated or left out without their noticing. Now a traveller makes a gramophone record of their counting. He teaches them writing and written calculation, and then shews them how often they make mistakes when they calculate just by word of mouth.—Would these people now have to admit that früher eigentlich nicht gerechnet? Sie wären nur herumgetappt, während sie jetzt gehen? Könnten sie nicht vielleicht sogar sagen: früher seien ihre Sachen besser gegangen, ihre Intuition sei nicht durch die toten Schreibmittel belastet gewesen. Man könne den Geist nicht mit Maschinen fassen. Sie sagen etwa: "Wenn wir damals, wie deine Maschine behauptet, eine Ziffer wiederholt haben, so wird es schon wohl so recht gewesen sein."

Wir vertrauen etwa 'mechanischen' Mitteln des Rechnens oder Zählens mehr als unserm Gedächtnisse. Warum?—Muß das so sein? Ich mag mich verzählt haben, die Maschine, von uns einmal so und so konstruiert, kann sich nicht verzählt haben. Muß ich diesen Standpunkt einnehmen?—"Nun, Erfahrung hat uns gelehrt, daß das Rechnen mit der Maschine verläßlicher ist, als das mit dem Gedächtnisse. Sie hat uns gelehrt, daß unser Leben glatter geht, wenn wir mit Maschinen rechnen." Aber muß das Glatte unbedingt unser Ideal sein (muß es unser Ideal sein, daß alles in Zellophan gewickelt sei)?

Könnte ich nicht auch dem Gedächtnis trauen und der Maschine nicht trauen? Und könnte ich nicht der *Erfahrung* mißtrauen, die mir 'vorspiegelt', die Maschine sei verläßlicher?

82. Vorher war ich nicht sicher, daß unter den Arten des Multiplizierens, die *dieser* Beschreibung entsprechen, keine ist, die ein anderes Resultat als das anerkannte liefert. Nehmen wir aber an, meine Unsicherheit sei eine solche, die erst in einer gewissen Entfernung von der normalen Art des Rechnens anfing; und nehmen wir an, wir sagten: Da schadet sie nichts; denn rechne ich auf sehr abnormale Weise, so muß ich mir eben alles noch einmal überlegen. Wäre das nicht ganz in Ordnung?

Ich will doch fragen: *Muß* ein Beweis der Widerspruchsfreiheit (oder Eindeutigkeit) mir unbedingt eine größere Sicherheit geben, als ich ohne ihn habe? Und, wenn ich wirklich auf Abenteuer ausgehe, *kann* ich dann nicht auch auf solche ausgehen, in denen dieser Beweis mir keine Sicherheit mehr bietet?

Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch und zum Beweis der Widerspruchsfreiheit zu ändern. (*Nicht* zu zeigen, daß dieser Beweis mir etwas Unwichtiges zeigt. Wie *könnte* das auch so sein!)

Wäre es mir z.B. daran gelegen, Widersprüche etwa zu ästhetischen Zwecken zu erzeugen, so würde ich nun den Induktionsbeweis der Widerspruchsfreiheit unbedenklich annehmen und sagen: es ist hoffnungslos, in diesem Kalkül einen Widerspruch erzeugen zu wollen; der Beweis zeigt dir, daß es nicht geht. (Beweis in der Harmonielehre.)———

they had not really calculated before? That they had merely been groping about, whereas now they walk? Might they not perhaps even say: our affairs went better before, our intuition was not burdened with the dead stuff of writing? You cannot lay hold of the spirit with a machine. They say perhaps: "If we repeated a digit then, as your machine asserts—well, that will have been right".

We may trust 'mechanical' means of calculating or counting more than our memories. Why?—Need it be like this? I may have miscounted, but the machine, once constructed by us in such-and-such a way, cannot have miscounted. Must I adopt this point of view?—"Well, experience has taught us that calculating by machine is more trustworthy than by memory. It has taught us that our life goes smoother when we calculate with machines." But must smoothness necessarily be our ideal (must it be our ideal to have everything wrapped in cellophane)?

Might I not even trust memory and not trust the machine? And might I not mistrust the *experience* which 'gives me the illusion' that the machine is more trustworthy?

82. Earlier I was not certain that, among the kinds of multiplication corresponding to *this* description, there was none yielding a result different from the accepted one. But say my uncertainty is such as only to arise at a certain distance from calculation of the normal kind; and suppose that we said: there it does no harm; for if I calculate in a very abnormal way, then I must just reconsider everything. Wouldn't this be all right?

I want to ask: *must* a proof of consistency (or of non-ambiguity) necessarily give me greater certainty than I have without it? And, if I am really out for adventures, *may* I not go out for ones where this proof no longer offers me any certainty?

My aim is to alter the *attitude* to contradiction and to consistency proofs. (*Not* to shew that this proof shews something unimportant. How *could* that be so?)

If for example I were anxious to produce contradictions, say for aesthetic purposes, then I should now unhesitatingly accept the inductive proof of consistency and say: it is hopeless to try and produce a contradiction in this calculus; the proof shews that it won't work. (Proof in theory of harmony.)———

83. Es ist ein guter Ausdruck zu sagen: "dieser Kalkül kennt diese Ordnung (diese Methode) nicht, dieser Kalkül kennt sie."

Wie, wenn man sagte: "ein Kalkül, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kalkül"?

(Ein Kanzleibetrieb, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kanzleibetrieb.)

Die Unordnung—möchte ich sagen—wird zu praktischen, nicht zu theoretischen Zwecken vermieden.

Eine Ordnung wird eingeführt, weil man ohne sie üble Erfahrungen gemacht hat—oder auch, sie wird eingeführt wie die Stromlinienform bei Kinderwagen und Lampen, weil sie sich etwa irgendwo anders bewährt hat und so der Stil oder die Mode geworden ist.

Der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den Widerspruch. Wie aber, wenn die Teile des Mechanismus mit einander verschmelzen, brechen oder sich biegen?

84. "Der Beweis der Widerspruchsfreiheit erst zeigt mir, daß ich mich dem Kalkül anvertrauen kann."

Was ist das für ein Satz: Du kannst dich dem Kalkül erst *dann* anvertrauen? Wenn du dich ihm aber nun *ohne* jenen Beweis anvertraust!? Welche Art von Fehler hast du begangen?

Ich mache Ordnung; ich sage: "Es sind nur *diese* Möglichkeiten: . . .". Es ist, wie wenn ich die möglichen Permutationen der Elemente *A*, *B*, *C* bestimme: ehe die Ordnung da war, hatte ich etwa nur einen nebelhaften Begriff von dieser Menge.—Bin ich jetzt ganz sicher, daß ich nichts übersehen habe? Die Ordnung ist ein Mittel, nichts zu übersehen. Aber: keine Möglichkeit im Kalkül zu übersehen, oder: keine Möglichkeit in der Wirklichkeit zu übersehen?—Ist nun sicher, daß Leute nie werden anders rechnen wollen? Daß Leute unsern Kalkül nie so ansehen werden, wie wir das Zählen der Wilden, deren Zahlen nur bis fünf reichen?—daß wir die Wirklichkeit nie *anders* werden betrachten wollen? Aber *das* ist gar nicht die Sicherheit, die uns diese Ordnung geben soll. Nicht die ewige Richtigkeit des Kalküls soll gesichert werden, sondern nur die zeitliche, sozusagen.

"Diese Möglichkeiten *meinst* du doch!—Oder meinst du andre?"

Die Ordnung überzeugt mich, daß ich mit diesen 6 Möglichkeiten keine übersehen habe. Aber überzeugt sie mich auch davon, daß nichts meine gegenwärtige Auffassung solcher Möglichkeiten wird umstoßen können?

83. It is a good way of putting things to say: "this order (this method) is unknown to this calculus, but not to that one".

What if one said: "A calculus to which this order is unknown is really not a calculus"?

(An office system to which this order is unknown is not really an office system.)

It is—I should like to say—for practical, not for theoretical purposes, that the disorder is avoided.

A kind of order is introduced because one has fared ill without it—or again, it is introduced, like streamlining in perambulators and lamps, because it has perhaps proved its value somewhere else and in this way has become the style or fashion.

The misuse of the idea of *mechanical* insurance against contradiction. But what if the parts of the mechanism fuse together, break or bend?

84. "Only the proof of consistency shews me that I can rely on the calculus."

What sort of proposition is it, that only *then* can you rely on the calculus? But what if you do rely on it *without* that proof! What sort of mistake have you made?

I introduce order; I say: "There are only *these* possibilities: . . .". It is like determining the set of possible permutations of *A*, *B*, *C*: before the order was there, I had perhaps only a foggy idea of this set.—Am I now quite certain that I have overlooked nothing? The order is a method for not overlooking anything. But—for not overlooking any possibility in the calculus, or: for not overlooking any possibility in reality?—Is it now certain that people will never want to calculate differently? That people will never look at our calculus as we look at the counting of aborigines whose numbers only go up to 5?—that we shall never want to look at reality differently? But *that* is not at all the certainty that this order is supposed to give us. It is not the eternal correctness of the calculus that is supposed to be assured, but only, so to speak, the temporal.

'But these are the possibilities that you *mean*!—Or do you mean other ones?'

The order convinces me that I have overlooked nothing when I have these 6 possibilities. But does it also convince me that nothing is going to be able to upset my present conception of such possibilities?

85. Könnte ich mir denken, daß man sich vor einer Möglichkeit der Siebenecks-Konstruktion ebenso fürchtete, wie vor der Konstruktion eines Widerspruchs, und daß der Beweis, daß die Siebenecks-Konstruktion unmöglich ist, eine beruhigende Wirkung hätte, wie der Beweis der Widerspruchsfreiheit?

Wie kommt es denn, daß wir überhaupt versucht sind (oder in der Nähe davon) in $(3-3) \times 2 = (3-3) \times 5$ durch $(3-3)$ zu kürzen? Wie kommt es, daß dieser Schritt nach den Regeln plausibel erscheint, und wie kommt es, daß er dann dennoch unbrauchbar ist?

Wenn man diese Situation beschreiben will, ist es ungeheuer leicht, in der Beschreibung einen Fehler zu machen. (Sie ist also sehr schwer zu beschreiben.) Die Beschreibungen, die uns unmittelbar in den Mund kommen, sind irreleitend—so ist, auf diesem Gebiet, unsre Sprache eingerichtet.

Man wird dabei auch immer vom Beschreiben ins Erklären fallen.

Es war oder scheint *ungefähr* so: Wir haben einen Kalkül, sagen wir, mit Kugeln einer Rechenmaschine; ersetzen den durch einen Kalkül mit Schriftzeichen; dieser Kalkül legt uns eine Ausdehnung der Rechnungsweise nahe, die der erste Kalkül uns nicht nahegelegt hat—oder vielleicht besser: der zweite Kalkül *verwischt* einen Unterschied, der im ersten nicht zu übersehen war. Wenn es nun der Witz des ersten Kalküls war, daß dieser Unterschied gemacht werde, und er im zweiten nicht gemacht wird, so hat dieser damit seine Brauchbarkeit als Äquivalent des ersten verloren. Und nun könnte das Problem entstehen—so scheint es—: *wo* haben wir uns von dem ursprünglichen Kalkül entfernt, welche Grenzen in dem neuen entsprechen den natürlichen Grenzen des alten?

Ich habe ein System von Rechenregeln, die nach denen eines andern Kalküls gemodelt waren. Ich habe mir ihn zum Vorbild genommen. Bin aber über ihn hinausgegangen. Dies war sogar ein Vorzug; aber nun wurde der neue Kalkül an gewissen Stellen (zum mindesten für die alten Zwecke) unbrauchbar. Ich suche ihn dann abzuändern: d.h., durch einen *einigermaßen* anderen zu ersetzen. Und zwar durch einen, der die Vorteile des neuen ohne die Nachteile hat. Aber ist das eine klar *bestimmte* Aufgabe?

Gibt es—könnte man auch fragen—*den richtigen* logischen Kalkül, nur ohne die Widersprüche?

Könnte man z.B. sagen, daß Russell's "Theory of Types" zwar den Widerspruch vermeidet, daß aber Russell's Kalkül doch nicht DER allgemeine logische Kalkül ist, sondern etwa ein künstlich eingeschränkter, verstümmelter? Könnte man sagen, daß der *reine, allgemeine* logische Kalkül erst gefunden werden muß??

85. Could I imagine our fearing a possibility of constructing the heptagon, like the construction of a contradiction; and that the proof that the construction of the heptagon is impossible should have a settling effect, like a consistency proof?

How does it come about that we are at all tempted (or at any rate come near it) to divide through by $(3-3)$ in $(3-3) \times 2 = (3-3) \times 5$? How does it come about that by the rules this step looks plausible, and that even so it is still unusable?

When one tries to describe this situation it is enormously easy to make a mistake in the description. (So it is very difficult to describe.) The descriptions which immediately suggest themselves are all misleading—that is how our language in this field is arranged.

And there will be constant lapses from description into explanation here.

It was, or appears to be, *roughly* like this: we have a calculus, let us say, with the beads of an abacus; we then replace it by a calculus with written signs; this calculus suggests to us an extension of the method of calculating which the first calculus did not suggest—or perhaps better: the second calculus *obliterates* a distinction which was not to be overlooked in the first one. Now if it was the point of the first calculus that this distinction was made, and it is not made in the second one then the latter thereby lost its usability as an equivalent of the former. And now—it seems—the problem might arise: *where* did we depart from the original calculus, what frontiers in the new one correspond to the natural frontiers of the old?

I formed a system of rules of calculation which were modelled on those of another calculus. I took the latter as a model. But exceeded its limits. This was even an advantage; but now the new calculus became unusable in certain parts (at least for the former purposes). I therefore seek to alter it: that is, to replace it by one that is *to some extent* different. And by one that has the advantages without the disadvantages of the new one. But is that a clearly *defined* task?

Is there such a thing—it might also be asked—as *the right* logical calculus, only without the contradictions?

Could it be said, e.g., that while Russell's Theory of Types avoids the contradiction, still Russell's calculus is not THE universal logical calculus but perhaps an artificially restricted, mutilated one? Could it be said that the *pure, universal* logical calculus has yet to be found?

Ich spielte ein Spiel und richtete mich dabei nach gewissen Regeln: aber *wie* ich mich nach ihnen richtete, das hing von Umständen ab und diese Abhängigkeit war nicht schwarz auf weiß niedergelegt. (Dies ist eine einigermaßen irreführende Darstellung.) Nun wollte ich dies Spiel so spielen, daß ich mich 'mechanisch' nach Regeln richtete und ich 'formalisierte' das Spiel. Dabei aber kam ich an Stellen, wo das Spiel *jeden* Witz verlor; diese wollte ich daher 'mechanisch' vermeiden. —Die Formalisierung der Logik war nicht zur Zufriedenheit gelungen. Aber wozu hatte man sie überhaupt versucht? (Wozu war sie nütze?) Entsprang dies Bedürfnis und die Idee, es müsse sich befriedigen lassen, nicht einer Unklarheit an anderer Stelle?

Die Frage "wozu war sie nütze?" war eine durchaus *wesentliche* Frage. Denn der Kalkül war nicht für einen praktischen Zweck erfunden worden, sondern dazu, 'die Arithmetik zu begründen'. Aber wer sagt, daß die Arithmetik Logik ist; oder was man mit der Logik tun muß, um sie in irgend einem Sinne zum Unterbau der Arithmetik zu machen? Wenn wir etwa von ästhetischen Überlegungen dazu geführt worden wären, dies zu versuchen, wer sagt, daß es uns gelingen kann? (Wer sagt, das sich dieses englische Gedicht zu unsrer Zufriedenheit ins Deutsche übersetzen läßt?!)

(*Wenn* es auch klar ist, das es zu jedem englischen Satz, in *einem* Sinne, eine Übersetzung ins Deutsche gibt.)

Die philosophische Unbefriedigung verschwindet dadurch, daß wir *mehr* sehen.

Dadurch, daß ich das Kürzen durch $(3 - 3)$ gestatte, verliert die Rechnungsart ihren Witz. Aber wie, wenn ich z.B. ein neues Gleichheitszeichen einführte, das ausdrücken sollte: 'gleich, nach *dieser* Operation'? Hätte es aber einen Sinn zu sagen: "Gewonnen in *dem* Sinne", wenn in diesem Sinne *jedes* Spiel von mir gewonnen wäre?

Der Kalkül verleitete mich an gewissen Stellen zur Aufhebung seiner selbst. Ich will nun einen Kalkül, der dies nicht tut und schließe diese Stellen aus.—Heißt das nun aber, daß jeder Kalkül, in dem eine solche Ausschließung nicht stattfindet, ein unsicherer ist? "Nun, die Entdeckung dieser Stellen war uns eine Warnung".—Aber hast du diese 'Warnung' nicht *mißverstanden*?

86. Kann man beweisen, daß man nichts übersehen hat?—Gewiß. Und muß man nicht vielleicht später zugeben: "Ja, ich habe etwas übersehen; aber nicht in dem Feld, wofür mein Beweis gegolten hat"?

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit muß uns Gründe für eine Voraussage geben; und das ist sein *praktischer Zweck*. Das heißt nicht, I was playing a game and in doing so I followed certain rules: but as for *how* I followed them, that depended on circumstances and the way it so depended was not laid down in black and white. (This is to some extent a misleading account.) Now I wanted to play this game in such a way as to follow rules 'mechanically' and I 'formalized' the game. But in doing this I reached positions where the game lost *all* point; I therefore wanted to avoid these positions 'mechanically'.—The formalization of logic did not work out satisfactorily. But what was the attempt made for at all? (What was it useful for?) Did not this need, and the idea that it must be capable of satisfaction, arise from a lack of clarity in another place?

The question "what was it useful for?" was a quite *essential* question. For the calculus was not invented for some practical purpose, but in order 'to give arithmetic a foundation'. But who says that arithmetic is logic, or what has to be done with logic to make it in some sense into a substructure for arithmetic? If we had e.g. been led to attempt this by aesthetic considerations, who says that it can succeed? (Who says that this English poem can be translated into German to our satisfaction?!)

(Even *if* it is clear that there is in *some* sense a translation of any English sentence into German.)

Philosophical dissatisfaction disappears by our seeing *more*.

By my allowing the cancelling of (3 — 3) this type of calculation loses its point. But suppose that, for example, I were to introduce a new sign of equality which was supposed to express: 'equal after *this* operation'? Would it, however, make sense to say: "Won in *this* sense", if in this sense I should win *every* game?

At certain places the calculus led me to its own abrogation. Now I want a calculus that does not do this and that excludes these places.—Does this mean, however, that any calculus in which such an exclusion does not occur is an uncertain one? "Well, the discovery of these places was a warning to us."—But did you not *misunderstand* this 'warning'?!

86. Can one prove that one has not overlooked anything?—Certainly. And must one not perhaps admit later: "Yes, I did overlook something; but not in the field for which my proof held"?

The proof of consistency must give us reasons for a prediction; and that is its *practical purpose*. That does not mean that this proof is a daß dieser Beweis ein Beweis aus der Physik unsrer Rechentechnik ist—also ein Beweis aus der angewandten Mathematik—aber es heißt, daß die uns nächstliegende Anwendung, und die, um derentwillen uns an diesem Beweis liegt, eine Voraussagung ist. Die Voraussagung ist nicht: "*auf diese Weise* wird keine Unordnung entstehen" (denn das wäre keine Voraussagung, sondern das ist der mathematische Satz) sondern: "es wird keine Unordnung entstehen".

Ich wollte sagen: Der Beweis der Widerspruchsfreiheit kann uns nur dann *beruhigen*, wenn er ein triftiger Grund für diese Voraussage ist.

87. Wo es mir genügt, daß bewiesen wird, daß ein Widerspruch oder eine Dreiteilung des Winkels auf *diese* Weise nicht konstruiert werden kann, dort leistet der induktive Beweis, was man von ihm verlangt. Wenn ich mich aber fürchten müßte, daß irgend etwas irgendwie einmal als Konstruktion eines Widerspruchs gedeutet werden könnte, so kann kein Beweis mir diese unbestimmte Furcht nehmen.

Der Zaun, den ich um den Widerspruch ziehe, ist kein Über-Zaun.

Wie konnte der Kalkül durch einen Beweis prinzipiell in Ordnung kommen?

Wie konnte es kein rechter Kalkül sein, solange man diesen Beweis nicht gefunden hatte?

"Dieser Kalkül ist rein mechanisch; eine Maschine könnte ihn ausführen." Was für eine Maschine? Eine, die aus gewöhnlichen Materialien hergestellt ist—oder eine Über-Maschine? Verwechselst du nicht die Härte einer Regel mit der Härte eines Materials?

Wir werden den Widerspruch in einem ganz andern Lichte sehen, wenn wir sein Auftreten und seine Folgen gleichsam anthropologisch betrachten—als wenn wir ihn mit der Entrüstung des Mathematikers anblicken. D.h., wir werden ihn anders sehen, wenn wir nur zu *beschreiben* versuchen, wie der Widerspruch Sprachspiele beeinflußt; als wenn wir ihn vom Standpunkt des mathematischen Gesetzgebers ansehen.

88. Aber halt! Ist es nicht klar, daß niemand zu einem Widerspruch gelangen will? Daß also der, dem du die Möglichkeit eines Widerspruchs vor Augen stellst, alles tun wird, um einen solchen unmöglich zu machen? (Daß also, wer das nicht tut, eine Schlafmütze ist.)

Wie aber, wenn er antwortete: "Ich kann mir einen Widerspruch in meinem Kalkül nicht vorstellen.—Du hast mir zwar einen Widerspruch in einem andern gezeigt, aber nicht in *diesem*. In diesem *ist keiner*, und ich sehe auch nicht die Möglichkeit."

"Sollte sich einmal meine Auffassung von dem Kalkül ändern; sollte, durch eine Umgebung, die ich jetzt nicht sehe, sich sein Aspekt ändern —dann wollen wir weiter reden."

proof from the physics of our technique of calculation—and so a proof from applied mathematics—but it does mean that that prediction is the application that first suggests itself to us, and the one for whose sake we have this proof at heart. The prediction is not: "No disorder will arise *in this way*" (for that would not be a prediction: it is the mathematical proposition) but: "no disorder will arise".

I wanted to say: the consistency-proof can only set our minds at rest, if it is a cogent reason for this prediction.

87. Where it is enough for me to get a proof that a contradiction or a trisection of the angle cannot be constructed in *this* way, the recursive proof achieves what is required of it. But if I had to fear that something somehow might at some time be interpreted as the construction of a contradiction, then no proof can take this indefinite fear from me.

The fence that I put round contradiction is not a super-fence.

How can a proof have put the calculus right in principle?

How can it have failed to be a proper calculus until this proof was found?

"This calculus is purely mechanical; a machine could carry it out." What sort of machine? One constructed of the usual materials—or a super-machine? Are you not confusing the hardness of a rule with the hardness of a material?

We shall see contradiction in a quite different light if we look at its occurrence and its consequences as it were anthropologically—and when we look at it with a mathematician's exasperation. That is to say, we shall look at it differently, if we try merely to *describe* how the contradiction influences language-games, and if we look at it from the point of view of the mathematical law-giver.

88. But wait—isn't it clear that no one wants to reach a contradiction? And so that if you shew someone the possibility of a contradiction, he will do everything to make such a thing impossible? (And so that if someone does not do this, he is a sleepyhead.)

But suppose he replied: "I can't imagine a contradiction in my calculus.—You have indeed shewn me a contradiction in another, but not in *this* one. In this *there is none*, nor can I see the possibility of one."

"If my conception of the calculus should sometime alter; if its aspect should alter because of some context that I cannot see now—then we'll talk some more about it."

"Ich sehe die Möglichkeit eines Widerspruches *nicht*. So wenig, wie du—scheint es—die Möglichkeit, daß in deinem Beweis der Widerspruchsfreiheit einer ist."

Weiß ich denn, ob, wenn ich je einen Widerspruch dort sehen sollte, wo ich jetzt die Möglichkeit eines solchen nicht sehe, er mir dann gefährlich erscheinen wird?

89. "Was lehrt mich ein Beweis, abgesehen von seinem Resultat?" —Was lehrt mich eine neue Melodie? Bin ich nicht in Versuchung zu sagen, sie *lehre* mich etwas?—

90. Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: "Ich muß mich verrechnet haben". Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verständnis der 'Grundlagen' der Mathematik.

"I do *not* see the possibility of a contradiction. Any more than you—as it seems—see the possibility of there being one in your consistency-proof."

Do I know whether, if I ever should see a contradiction where at present I can see no possibility of such a thing, it will then look dangerous to me?

89. "What does a proof teach me, apart from its result?"—What does a new tune teach me? Am I not under a temptation to say it teaches me something?—

90. I have not yet made the role of miscalculating clear. The role of the proposition: "I must have miscalculated". It is really the key to an understanding of the 'foundations' of mathematics.

III

1942

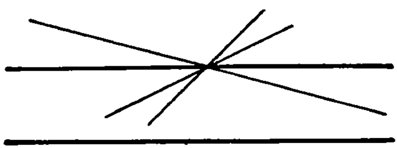
1. "Die Axiome eines mathematischen Axiomsystems sollen einleuchtend sein." Wie leuchten sie denn ein?

Wie wenn ich sagte: *So* kann ich mir's am leichtesten vorstellen.

Und hier ist vorstellen nicht ein bestimmter seelischer Vorgang bei dem man zumeist die Augen schließt, oder mit den Händen bedeckt.

2. Was sagen wir, wenn uns so ein Axiom dargeboten wird, z.B. das Parallelenaxiom? Hat Erfahrung uns gezeigt, daß es sich so verhält? Nun vielleicht; aber *welche* Erfahrung? Ich meine: Erfahrung spielt eine Rolle; aber nicht die, die man *unmittelbar erwarten* würde. Denn man hat ja doch nicht Versuche gemacht und gefunden, daß wirklich durch den Punkt nur *eine* Gerade die andre Gerade nicht schneidet. Und doch leuchtet der Satz ein.—Wenn ich nun sagte: es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug: wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen.

Der Satz beschreibt ein Bild. Nämlich dieses:



Dies Bild ist uns annehmbar. Wie es uns annehmbar ist, die beiläufige Kenntnis einer Zahl durch Abrunden auf ein Vielfaches von 10 anzudeuten.

'Wir nehmen diesen Satz an.' Aber als *was* nehmen wir ihn an?

3. Ich will sagen: Wenn der Wortlaut des Parallelen-Axioms, z.B., gegeben ist (und wir die Sprache verstehen) so ist die Art der Verwendung dieses Satzes und also sein Sinn, noch gar nicht bestimmt. Und wenn wir sagen, er leuchtet uns ein, so haben wir damit, ohne es zu wissen, schon eine bestimmte Art der Verwendung des Satzes gewählt. Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade *dazu* verwenden.

Daß wir nämlich hier nicht Versuche machen, sondern das Einleuchten anerkennen, legt schon die Verwendung fest. Denn wir sind ja nicht so naïf, das Einleuchten statt des Versuchs gelten zu lassen.

III

1942

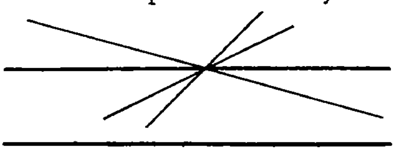
1. "The axioms of a mathematical axiom-system ought to be self-evident." How are they self-evident, then?

What if I were to say: *this* is how I find it easiest to imagine.

And here imagining is not a particular mental process during which one usually shuts one's eyes or covers them with one's hands.

2. What do we say when we are presented with such an axiom, e.g. the parallel axiom? Has experience shewn us that this is how it is? Well perhaps; but *what* experience? I mean: experience plays a part; but not the one that one would *immediately expect*. For we haven't made experiments and found that in reality only *one* straight line through a given point fails to cut another. And yet the proposition is evident.—Suppose I now say: it is quite indifferent why it is evident. It is enough that we accept it. All that is important is how we use it.

The proposition describes a picture. Namely:



We find this picture acceptable. As we find it acceptable to indicate our rough knowledge of a number by rounding it off at a multiple of 10.

'We accept this proposition.' But as *what* do we accept it?

3. I want to say: when the words of e.g. the parallel-axiom are given (and we understand the language) the kind of use this proposition has and hence its sense are as yet quite undetermined. And when we say that it is evident, this means that we have already chosen a definite kind of employment for the proposition without realizing it. The proposition is not a mathematical axiom if we do not employ it precisely *for this purpose*.

The fact, that is, that here we do not make experiments, but accept the self-evidence, is enough to fix the employment. For we are not so naïf as to make the self-evidence count in place of experiment.

Nicht, daß er uns als wahr einleuchtet, sondern daß wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn zum mathematischen Satz.

4. Lehrt uns die Erfahrung, daß zwischen je 2 Punkten eine Gerade möglich ist? Oder, daß zwei verschiedene Farben nicht an einem Orte sein können?

Man könnte sagen: die *Vorstellung* lehrt es uns. Und darin liegt die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen.

Vor dem Satz ist der Begriff noch geschmeidig.

Aber könnten nicht Erfahrungen uns bestimmen, das Axiom zu verwerfen?! Ja. Und dennoch spielt es nicht die Rolle des Erfahrungssatzes.

Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz wohl vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte. Aber—will ich sagen—dies weist jenen Sätzen nur eine gewisse Rolle im Gegensatz zu einer anderen zu. D.h.: von einem Satz zu sagen: 'man könnte sich das auch anders vorstellen' oder 'man kann sich auch das Gegenteil davon vorstellen', schreibt ihm die Rolle des Erfahrungssatzes zu.

Der Satz, den man sich nicht anders als wahr soll vorstellen können, hat eine andere *Funktion* als der für den es sich nicht so verhält.

5. Die mathematischen Axiome funktionieren dergestalt, daß, wenn Erfahrung uns dazu bewegte, ein Axiom aufzugeben, sein Gegenteil damit nicht zum Axiom würde.

'$2 \times 2 \neq 5$' heißt nicht,
'$2 \times 2 = 5$' habe sich nicht bewährt.

Man könnte den Axiomen, sozusagen, ein spezielles Behauptungszeichen vorsetzen.

Axiom ist etwas nicht *dadurch*, daß wir es als äußerst wahrscheinlich, ja als gewiß, anerkennen, sondern dadurch, daß wir ihm eine bestimmte Funktion zuerkennen und eine, die der des Erfahrungssatzes widerstreitet.

Wir geben dem Axiom eine andere Art der Anerkennung als dem Erfahrungssatz. Und damit meine ich nicht, daß der 'seelische Akt des Anerkennens' ein andrer ist.

Das Axiom ist, möchte ich sagen, ein andrer Redeteil.

6. Man nimmt, wenn man das mathematische Axiom, das und das sei möglich, hört, ohne weiters an, man wisse, was hier 'möglich sein' bedeutet; weil diese Satzform uns natürlich geläufig ist.

It is not our finding the proposition self-evidently true, but our making the self-evidence count, that makes it into a mathematical proposition.

4. Does experience tell us that a straight line is possible between any two points? Or that two different colours cannot be at the same place?

It might be said: *imagination* tells us it. And the germ of truth is here; only one must understand it right.

Before the proposition the concept is still pliable.

But might not experience determine us to reject the axiom?! Yes. And nevertheless it does not play the part of an empirical proposition.

Why are the Newtonian laws not axioms of mathematics? Because we could quite well imagine things being otherwise. But—I want to say—this only assigns a certain role to those propositions in contrast to another one. I.e.: to say of a proposition: 'This could be imagined otherwise' or 'We can imagine the opposite too', ascribes the role of an empirical proposition to it.

A proposition which it is supposed to be impossible to imagine as other than true has a different *function* from one for which this does not hold.

5. The functioning of the axioms of mathematics is such that, if experience moved us to give up an axiom, that would not make its opposite into an axiom.

'$2 \times 2 \neq 5$' does not mean:
'$2 \times 2 = 5$' has not worked.

One might, so to speak, preface axioms with a special assertion sign.

Something is an axiom, *not* because we accept it as extremely probable, nay certain, but because we assign it a particular function, and one that conflicts with that of an empirical proposition.

We give an axiom a different kind of acknowledgment from an empirical proposition. And by this I do not mean that the 'mental act of acknowledgment' is a different one.

An axiom, I should like to say, is a different part of speech.

6. When one hears the mathematical axiom that such and such is possible, one assumes offhand that one knows what 'being possible' means here; because this form of sentence is naturally familiar to us.

Man wird nicht gewahr, wie verschiedenerlei die Verwendung der Aussage, "... ist möglich", ist! und kommt darum nicht auf den Gedanken, nach der besonderen Verwendung in diesem Fall, zu fragen.

Ohne die Verwendung im Geringsten zu übersehen, können wir hier gar nicht zweifeln, daß wir den Satz verstehen.

Ist der Satz, daß es keine Wirkung in die Ferne gibt, von dem Geschlecht der mathematischen Sätze? Man möchte da auch sagen: der Satz ist nicht dazu bestimmt eine Erfahrung auszudrücken, sondern daß man sich etwas nicht anders vorstellen könne.

Zu sagen, zwischen zwei Punkten sei—geometrisch—immer eine Gerade möglich, heißt: der Satz "die Punkte ... liegen auf einer Geraden" ist eine Aussage über die Lage von Punkten nur, wenn er von mehr als 2 Punkten handelt.

So wie man sich auch nicht fragt, was ein Satz der Form "Es gibt kein ..." (z.B. "Es gibt keinen Beweis dieses Satzes") im besonderen Fall bedeutet. Auf die Frage was er bedeutet, antwortet man dem Anderen und sich selbst mit einem Beispiel des Nichtexistierens.

7. Der mathematische Satz steht auf vier Füßen, nicht auf dreien; er ist überbestimmt.

8. Wenn wir das Tun eines Menschen, z.B., durch eine Regel beschreiben, so wollen wir, daß der, dem wir die Beschreibung geben, durch Anwendung der Regel wisse, was im besonderen Fall geschieht. Gebe ich ihm nun durch die Regel eine *indirekte* Beschreibung?

Es gibt natürlich einen Satz, der sagt: wenn einer die Zahlen ... nach den und den Regeln zu multiplizieren trachtet, so erhält er. ...

Eine Anwendung des mathematischen Satzes muß immer das Rechnen selber sein. Das bestimmt das Verhältnis der Rechentätigkeit zum Sinn der mathematischen Sätze.

Wir beurteilen Gleichheit und Übereinstimmung nach den Resultaten unseres Rechnens, darum können wir nicht das Rechnen mit Hilfe der Übereinstimmung erklären.

Wir beschreiben mit Hilfe der Regel. Wozu? Warum? das ist eine andere Frage.

'Die Regel, auf diese Zahlen angewandt, gibt jene' könnte heißen:

We are not made aware how various the employment of the assertion "... is possible" is! And that is why it does not occur to us to ask about the special employment in this case.

Lacking the slightest survey of the whole use, we are here quite unable to doubt that we understand the proposition.

Does the proposition that there is no such thing as action at a distance belong to the family of mathematical propositions? Here again one would like to say: the proposition is not designed to express any experience, but rather to express the impossibility of imagining anything different.

To say that between two points a straight line is—geometrically—always possible means: the proposition "The points ... lie on a straight line" is an assertion about the position of the points only if more than 2 points are involved.

Just as one does not ask oneself, either, what is the meaning of a proposition of the form "There is no ..." (e.g. "there is no proof of this proposition") in a particular case. Asked what it means, one replies both to someone else and to oneself with an example of non-existence.

7. A mathematical proposition stands on four feet, not on three; it is over-determined.

8. When we describe what a man does, e.g., by means of a rule, we want the person to whom we give the description to know, by applying the rule, what happens in the particular case. Now do I give him an *indirect* description by means of the rule?

There is of course such a thing as a proposition saying: if anyone tries to multiply the numbers ... according to such and such rules, he gets....

One application of a mathematical proposition must always be the calculating itself. That determines the relation of the activity of calculating to the sense of mathematical propositions.

We judge identity and agreement by the results of our calculating; that is why we cannot use agreement to explain calculating.

We describe by means of the rule. What for? Why? That is another question.

'The rule, applied to these numbers, yields those' might mean: the der Regelausdruck auf den Menschen angewendet läßt ihn aus diesen Zahlen jene erzeugen.

Man fühlt ganz richtig, daß dies *kein* mathematischer Satz wäre. Der mathematische Satz bestimmt einen Weg; legt für uns einen Weg fest.

Es ist kein Widerspruch, daß er eine Regel ist und nicht einfach festgesetzt, sondern nach Regeln erzeugt wird.

Wer mit einer Regel beschreibt, weiß selbst auch nicht mehr als er sagt. D.h., er sieht auch nicht die Anwendung voraus, die er im besonderen Fall von der Regel machen wird. Wer "u.s.w." sagt, weiß selbst auch nicht mehr als "u.s.w.".

9. Wie könnte man einem erklären, was der zu tun hat, der einer Regel folgen soll?

Man ist versucht, zu erklären: vor allem tu das *Einfachste* (wenn die Regel z.B. ist immer das gleiche zu wiederholen). Und daran ist natürlich etwas. Es ist von Bedeutung, daß wir sagen können, es sei einfacher eine Zahlenreihe anzuschreiben, in der jede Zahl gleich der vorhergehenden ist, als eine Reihe, in der jede Zahl um 1 größer ist als die vorhergehende, und wieder, daß dies ein einfacheres Gesetz ist als das, abwechselnd 1 und 2 zu addieren.

10. Ist es denn nicht übereilt, einen Satz, den man an Stäbchen und Bohnen erprobt hat, auf Wellenlängen des Lichts anzuwenden? Ich meine: daß $2 \times 5000 = 10000$ ist.

Rechnet man wirklich damit, daß, was sich in soviel Fällen bewahrheitet hat, auch für diese stimmen muß? Oder ist es nicht vielmehr, daß wir uns mit der arithmetischen Annahme noch *gar* nicht binden?

11. Die Arithmetik als die Naturgeschichte (Mineralogie) der Zahlen. *Wer* spricht aber so von ihr? Unser ganzes Denken ist von dieser Idee durchsetzt.

Die Zahlen sind Gestalten (ich meine nicht die Zahlzeichen) und die Arithmetik teilt uns die Eigenschaften dieser Gestalten mit. Aber die Schwierigkeit ist da, daß diese Eigenschaften der Gestalten *Möglichkeiten* sind; nicht die gestaltlichen Eigenschaften der Dinge solcher Gestalt. Und diese Möglichkeiten wieder entpuppen sich als physikalische, oder psychologische, Möglichkeiten (der Zerlegung, Zusammensetzung, etc.). Die Gestalten aber spielen nur die Rolle der Bilder, die man so und so verwendet. Nicht Eigenschaften von Gestalten ist es, was wir geben, sondern Transformationen von Gestalten, als irgendwelche Paradigmen aufgestellt.

expression of the rule, applied to a human being, makes him produce those numbers from these.

One feels, quite rightly, that that would *not* be a mathematical proposition. The mathematical proposition determines a path, lays down a path for us.

It is no contradiction of this that it is a rule, and not simply laid down, but produced according to rules.

If you use a rule to give a description, you yourself do not know more than you say. I.e. you yourself do not foresee the application that you will make of the rule in a particular case. If you say "and so on", you yourself do not know more than "and so on".

9. How could one explain to anybody what you have to do if you are to follow a rule?

One is tempted to explain: first and foremost do the *simplest* thing (if the rule e.g. is always to repeat the same thing). And there is of course something in this. It is significant that we can say that it is simpler to write down a sequence of numbers in which each number is the same as its predecessor than a sequence in which each number is greater by 1 than its predecessor. And again that this is a simpler law than that of alternately adding 1 and 2.

10. Isn't it over-hasty to apply a proposition that one has tested on sticks and stones, to wavelengths of light? I mean: that $2 \times 5000 = 10{,}000$.

Does one actually count on it that what has proved true in so many cases must hold for these too? Or is it not rather that with the arithmetical assumption we have not committed ourselves *at all*?

11. Arithmetic as the natural history (mineralogy) of numbers. But *who* talks like this about it? Our whole thinking is penetrated with this idea.

The numbers (I don't mean the numerals) are shapes, and arithmetic tells us the properties of these shapes. But the difficulty here is that these properties of the shapes are *possibilities*, not the properties in respect to shape of the things of this shape. And these possibilities in turn emerge as physical, or psychological possibilities (of separation, arrangement, etc.). But the role of the shapes is merely that of pictures which are used in such-and-such a way. What we give is not properties of shapes, but transformations of shapes, set up as paradigms of some kind or other.

12. Wir beurteilen nicht die Bilder, sondern mittels der Bilder. Wir erforschen sie nicht, sondern mittels ihrer etwas anderes.

Du bringst ihn zur Entscheidung dies Bild anzunehmen. Und zwar durch Beweis, d.i. durch Vorführung einer Bilderreihe, oder einfach dadurch, daß du ihm das Bild zeigst. Was zu dieser Entscheidung bewegt ist hierbei gleichgültig. Die Hauptsache ist, daß es sich um das Annehmen eines Bildes handelt.

Das Bild des Zusammensetzens ist kein Zusammensetzen; das Bild des Zerlegens kein Zerlegen; das Bild eines Passens kein Passen. Und doch sind diese Bilder von der größten Bedeutung. *So sieht es aus*, wenn zusammengesetzt wird; wenn zerlegt wird; u.s.w. .

13. Wie wäre es, wenn Tiere oder Krystalle so schöne Eigenschaften hätten wie die Zahlen? Es gäbe also z.B. eine Reihe von Gestalten, eine immer um eine Einheit größer als die andere.

Ich möchte darstellen können, wie es kommt, daß die Mathematik jetzt uns als Naturgeschichte des Zahlenreiches, jetzt wieder als eine Sammlung von Regeln erscheint.

Könnte man aber nicht Transformationen von Tiergestalten (z.B.) studieren? Aber *wie* 'studieren'? Ich meine: könnte es nicht nützlich sein, sich Transformationen von Tiergestalten vorzuführen? Und doch wäre dies kein Zweig der Zoologie.—

Ein mathematischer Satz wäre es dann (z.B.), daß *diese* Transformation *diese* Gestalt in *diese* überleitet. (Die Gestalten und die Transformation wiedererkennbar.)

14. Wir müssen uns aber dessen erinnern, daß der mathematische Beweis durch seine Umformungen nicht nur zeichengeometrische Sätze, sondern Sätze des verschiedenartigsten *Inhalts* beweist.

So beweist die Umformung eines Russellschen Beweises, daß dieser logische Satz mit Hilfe dieser Regeln sich aus den Grundgesetzen bilden lasse. Aber der Beweis wird als Beweis der Wahrheit des Schlußsatzes angesehen, oder als Beweis dafür, daß der Schlußsatz *nichts* sagt.

Das ist nun nur durch eine Beziehung des Satzes nach außen möglich; d.h. durch seine Beziehung zu andern Sätzen, z.B., und deren Anwendung.

"Die Tautologie ('$p \vee \sim p$', z.B.) sagt nichts" ist ein Satz, der sich auf das Sprachspiel bezieht, worin der Satz p angewendet wird. (Z.B.:

12. We do not judge the pictures, we judge by means of the pictures.

We do not investigate them, we use them to investigate something else.

You get him to decide on accepting this picture. And you do so by means of the proof, i.e. by exhibiting a series of pictures, or simply by shewing him the picture. What moves him to decide does not matter here. The main thing is that it is a question of accepting a picture.

The picture of an arrangement is not an arrangement; the picture of a separation is not a separation; the picture of something's fitting not a case of fitting. And yet these pictures are of the greatest significance. *That is what it is like*, if an arrangement is made; if a separation; and so on.

13. What would it be for animals or crystals to have as beautiful properties as numbers? There would then be e.g. a series of forms, each bigger than another by a unit.

I should like to be able to describe how it comes about that mathematics appears to us now as the natural history of the domain of numbers, now again as a collection of rules.

But could one not study transformations of (e.g.) the forms of animals? But *how* 'study'? I mean: might it not be useful to pass transformations of animal shapes in review? And yet this would not be a branch of zoology.

It would then be a mathematical proposition (e.g.), that this shape is derived from *this* one by way of *this* transformation. (The shapes and transformations being recognizable.)

14. We must remember, however, that by its transformations a mathematical proof proves not only propositions of sign-geometry, but propositions of the most various *content*.

In this way the transformation in a Russellian proof proves that this logical proposition can be formed from the fundamental laws by the use of these rules. But the proof is looked at as a proof of the truth of the conclusion, or as a proof that the conclusion says *nothing*.

Now this is possible only through a relation of the proposition to something outside itself; I mean, e.g., through its relation to other propositions and to their application.

"A tautology (e.g. '$p \vee \sim p$') says nothing" is a proposition referring to the language-game in which the proposition p has application.

"Es regnet, oder regnet nicht" ist keine Mitteilung über das Wetter.)

Die Russellsche Logik sagt nichts darüber, welcher Art und Verwendung *Sätze*, ich meine nicht *logische* Sätze, sind: Und doch enthält die Logik ihren ganzen Sinn nur von der supponierten Anwendung auf die Sätze.

15. Man kann sich denken, daß Leute eine angewandte Mathematik haben ohne eine reine Mathematik. Sie können z.B.—nehmen wir an—die Bahn berechnen, welche gewisse sich bewegende Körper beschreiben und deren Ort zu einer gegebenen Zeit vorhersagen. Dazu benützen sie ein Koordinatensystem, die Gleichungen von Kurven (*eine Form der Beschreibung wirklicher Bewegung*) und die Technik des Rechnens im Dezimalsystem. Die Idee eines Satzes der reinen Mathematik kann ihnen ganz fremd sein.

Diese Leute haben also Regeln, denen gemäß sie die betreffenden Zeichen (insbesondere z.B. Zahlzeichen) transformieren zum Zweck der Voraussage des Eintreffens gewisser Ereignisse.

Aber wenn sie nun z.B. multiplizieren, werden sie da nicht einen Satz gewinnen, des Inhalts, daß das Resultat der Multiplikation dasselbe ist, wenn man die Faktoren vertauscht? Das wird keine primäre Zeichenregel sein, aber auch kein Satz ihrer Physik.

Nun, sie *brauchen* so einen Satz nicht zu erhalten—selbst wenn sie das Vertauschen der Faktoren erlauben.

Ich denke mir die Sache so, daß diese Mathematik ganz in Form von *Geboten* betrieben wird. "Du mußt *das und das* tun"—um nämlich die Antwort darauf zu erhalten, 'wo wird sich dieser Körper zu der und der Zeit befinden?' (Wie diese Menschen zu dieser Methode der Vorhersagung gekommen sind, ist ganz gleichgültig.)

Der Schwerpunkt ihrer Mathematik liegt für diese Menschen *ganz* im *Tun*.

16. Ist das aber möglich? Ist es möglich, daß sie das kommutative Gesetz (z.B.) nicht als *Satz* ansprechen?

Ich will doch sagen: Diese Leute sollen nicht zu der Auffassung kommen, daß sie mathematische Entdeckungen machen,—sondern *nur* physikalische Entdeckungen.

Frage: Müssen sie mathematische Entdeckungen als Entdeckungen machen? Was geht ihnen ab, wenn sie keine machen? Könnten sie (z.B.) den Beweis des kommutativen Gesetzes gebrauchen, aber ohne die Auffassung, er gipfle in einem *Satz*, er habe also ein Resultat, das ihren physikalischen Sätzen irgendwie vergleichbar sei?

(E.g. "It is raining or it is not raining" tells us nothing about the weather.)

Russellian logic says nothing about kinds of *propositions*—I don't mean *logical* propositions—and their employment: and yet logic gets its whole sense simply from its presumed application to propositions.

15. People can be imagined to have an applied mathematics without any pure mathematics. They can e.g.—let us suppose—calculate the path described by certain moving bodies and predict their place at a given time. For this purpose they make use of a system of co-ordinates, of the equations of curves (*a form of description of actual movement*) and of the technique of calculating in the decimal system. The idea of a proposition of pure mathematics may be quite foreign to them.

Thus these people have rules in accordance with which they transform the appropriate signs (in particular, e.g., numerals) with a view to predicting the occurrence of certain events.

But when they now multiply, for example, will they not arrive at a proposition saying that the result of the multiplication is the same, however the factors are shifted round? That will not be a primary rule of notation, nor yet a proposition of their physics.

They do not *need* to obtain any such proposition—even if they allow the shift of factors.

I am imagining the matter as if this mathematics were done entirely in the form of orders. "You must do *such-and-such*"—so as to get the answer, that is, to the question 'where will this body be at such-and-such a time?' (It does not matter at all how these people have arrived at this method of prediction.)

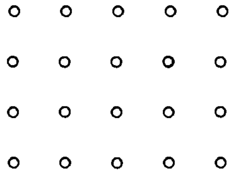
For these people the centre of gravity of mathematics is found ***wholly*** in *doing*.

16. But is this possible? Is it possible that they should not pronounce the commutative law (e.g.) to be a *proposition*?

But I want to say: these people are not supposed to arrive at the conception of making mathematical discoveries—but *only* of making physical discoveries.

Question: Must they make mathematical discoveries as discoveries? What do they miss if they make none? Could they (for example) use the proof of the commutative law, but without the conception of its culminating in a *proposition*, and so having a result which is in some way comparable with their physical propositions?

17. Das bloße Bild



einmal als 4 Reihen zu 5 Punkten, einmal als 5 Kolumnen zu 4 Punkten betrachtet, könnte jemand vom kommutativen Gesetz überzeugen. Und er könnte daraufhin Multiplikationen einmal in der einen, einmal in der anderen Richtung ausführen.

Ein Blick auf die Vorlage und die Steine überzeugt ihn, daß er mit ihnen die Figur wird legen können, d.h. er *unternimmt* daraufhin, sie zu legen.

"Ja, aber nur, wenn die Steine sich nicht ändern."—Wenn sie sich nicht ändern und wenn wir keinen unbegreiflichen Fehler machen, oder Steine unbemerkt verschwinden oder dazukommen.

"Aber es ist doch wesentlich, daß sich die Figur tatsächlich allemal aus den Steinen legen läßt! Was geschähe wenn sie sich nicht legen ließe?"—Vielleicht würden wir uns dann für irgendwie gestört halten. Aber—was weiter?—Vielleicht würden wir die Sache auch hinnehmen, wie sie ist. Und Frege könnte dann sagen: "Hier haben wir eine neue Art der Verrücktheit!"

18. Es ist klar, daß die Mathematik als Technik des Umwandelns von Zeichen zum Zweck des Vorhersagens mit Grammatik nichts zu tun hat.

19. Jene Leute, deren Mathematik nur eine solche Technik ist, sollen nun auch Beweise anerkennen, die sie von der Ersetzbarkeit einer Zeichentechnik durch eine andere überzeugen. D.h., sie finden Transformationen, Bilderreihen, auf welche hin sie es wagen können, statt einer Technik eine andere zu verwenden.

20. Wenn uns das Rechnen als maschinelle Tätigkeit erscheint, so ist *der Mensch*, der die Rechnung ausführt, die Maschine.

Die Rechnung wäre dann gleichsam ein Diagramm, das ein Teil der Maschine aufzeichnet.

21. Und das bringt mich darauf, daß ein Bild uns sehr wohl davon überzeugen kann, ein bestimmter Teil eines Mechanismus sich so und so bewegen werde, wenn man den Mechanismus in Gang setzt.

17. The mere picture

o o o o o

o o o o o

o o o o o

o o o o o

regarded now as four rows of five dots, now as five columns of four dots, might convince someone of the commutative law. And he might thereupon carry out multiplications, now in the one direction, now in the other.

One look at the pattern and pieces convinces him that he will be able to make them into that shape, i.e. he thereupon *undertakes* to do so.

"Yes, but only if the pieces don't change."—If they don't change, and we don't make some unintelligible mistake, or pieces disappear or get added without our noticing it.

"But it is surely essential that the pieces can as a matter of fact always be made into that shape! What would happen if they could not?"—Perhaps we should think that something had put us out. But—what then?—Perhaps we should even accept the thing as it was. And then Frege might say: "Here we have a new kind of insanity!"

18. It is clear that mathematics as a technique for transforming signs for the purpose of prediction has nothing to do with grammar.

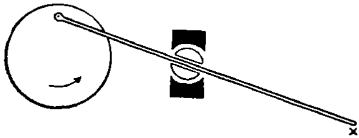
19. The people whose mathematics was only such a technique, are now also supposed to accept proofs convincing them of the replaceability of one sign-technique by another. That is to say, they find transformations, series of pictures, on the strength of which they can venture to use one technique in place of another.

20. If calculating looks to us like the action of a machine, it is *the human being* doing the calculation that is the machine.

In that case the calculation would be as it were a diagram drawn by a part of the machine.

21. And that brings me to the fact that a picture may very well convince us that a particular part of a mechanism will move in such-and-such a way when the mechanism is set in motion.

So ein Bild (oder eine Bilderreihe) wirkt wie ein Beweis. So könnte ich z.B. konstruieren, wie der Punkt X des Mechanismus



sich bewegen werde.

Ist es nicht *seltsam*, daß es nicht augenblicklich klar ist, *wie* uns das Bild der Periode beim Dividieren von der Wiederkehr der Ziffernreihe überzeugt?

(Es ist so schwer für mich, die innere Beziehung von der äußeren zu scheiden—und das Bild von der Vorhersage.)

Der Doppelcharakter des mathematischen Satzes—als *Gesetz* und als *Regel*.

22. Wie, wenn man statt "Intuition" sagen würde "richtiges Erraten"? Das würde den Wert einer Intuition in einem ganz anderen Lichte zeigen. Denn das Phänomen des Ratens ist ein psychologisches, aber nicht das des richtig Ratens.

23. Daß wir die Technik gelernt haben, macht, daß wir sie nun, auf den Anblick dieses Bildes hin, so und so abändern.

'Wir entschließen uns zu einem neuen Sprachspiel.'

'Wir entschließen uns *spontan*' (möchte ich sagen) 'zu einem neuen Sprachspiel.'

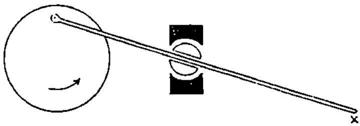
24. Ja;—es scheint: wenn unser Gedächtnis anders funktionierte, daß wir dann nicht so wie wir's tun, rechnen könnten. Könnten wir aber dann Definitionen geben, wie wir es tun; so reden und schreiben, wie wir es tun?

Wie aber können wir die Grundlage unserer Sprache durch Erfahrungssätze beschreiben?!

25. Angenommen, eine Division, wenn wir sie ganz ausführen, würde nicht zu demselben Resultat führen wie das Kopieren der Periode. Das könnte z.B. daherkommen, daß wir die Rechengesetzchen, ohne uns dessen bewußt zu sein, veränderten. (Es könnte aber auch daher kommen, daß wir anders kopieren.)

26. Was ist der Unterschied zwischen *nicht* rechnen und *falsch* rechnen?—Oder: ist eine scharfe Grenze zwischen dem, die Zeit *nicht* zu messen und sie *falsch* messen? Keine Zeitmessung zu kennen und eine falsche?

The effect of such a picture (or series of pictures) is like that of a proof. In this way I might e.g. make a construction for how the point *X* of the mechanism



will move.

Is it not *queer* that it is not instantly clear *how* the picture of the period in division convinces us of the recurrence of that row of digits?

(I find it so difficult to separate the inner from the outer—and the picture from the prediction.)

The twofold character of the mathematical proposition—as *law* and as *rule*.

22. Suppose that one were to say "guessing right" instead of "intuition"? This would shew the value of an intuition in a quite different light. For the phenomenon of guessing is a psychological one, but not that of guessing right.

23. Our having learned a technique brings it about that we now alter it in such and such a way after seeing this picture.

'We decide on a new language-game.'

'We decide *spontaneously*' (I should like to say) 'on a new language-game.'

24. True;—it looks as though, if our memory functioned differently, we could not calculate as we do. But in that case could we give definitions as we do; talk and write as we do?

But how can we describe the foundation of our language by means of empirical propositions?!

25. Suppose that when we worked out a division it did not lead to the same result as the copying of its period. That might arise e.g. from our altering our tables, without being aware of it. (Though it might also arise from our copying in a different way.)

26. What is the difference between *not* calculating and calculating *wrong*?—Or: is there a sharp dividing line between *not* measuring time and measuring it *wrong*? Not knowing any measurement of time and knowing a wrong one?

27. Gib auf das Geschwätz acht, wodurch wir jemand von der Wahrheit eines mathematischen Satzes überzeugen. Es gibt einen Aufschluß über die Funktion dieser Überzeugung. Ich meine das Geschwätz, womit die Intuition geweckt wird.

Womit also die Maschine einer Rechentechnik in Gang gesetzt wird.

28. Kann man sagen, daß, wer eine Technik lernt, sich dadurch von der Gleichheit der Resultate überzeugt??

29. Die Grenze der Empirie—ist die *Begriffsbildung*.

Welchen Übergang mache ich von "es wird so sein" zu "es *muß* so sein"? Ich bilde einen andern Begriff. Einen, in dem inbegriffen ist was es früher nicht war. Wenn ich sage: "Wenn diese Ableitungen gleich sind, dann *muß* . . .", dann mache ich etwas zu einem Kriterium der Gleichheit. Bilde also meinen Begriff der Gleichheit um.

Wie aber, wenn Einer nun sagt: "Ich bin mir nicht dieser *zwei* Vorgänge bewußt, ich bin nur der Empirie bewußt, nicht einer von ihr unabhängigen Begriffsbildung und Begriffsumbildung; alles scheint mir im Dienste der Empirie zu stehen"?

Mit andern Worten: Wir scheinen nicht bald mehr, bald weniger rational zu werden, oder die Form unseres Denkens zu verändern, so daß damit sich *das* ändert, *was wir "Denken" nennen*. Wir scheinen nur immer unser Denken der Erfahrung anzupassen.

Das ist klar: daß wenn Einer sagt: "Wenn du der *Regel* folgst, so *muß* es so sein," er keinen *klaren* Begriff von Erfahrungen hat, die dem Gegenteil entsprächen.

Oder auch so: Er hat keinen klaren Begriff davon, wie es aussähe, wenn es anders wäre. Und das ist sehr wichtig.

30. Was zwingt uns den Begriff der Gleichheit *so* zu formen, daß wir etwa sagen: "Wenn du beidemale wirklich das Gleiche tust, muß auch dasselbe herauskommen"?—Was zwingt uns, nach einer Regel vorzugehen, etwas als Regel aufzufassen? Was zwingt uns, mit uns selbst in den Formen der von uns gelernten Sprache zu reden?

Denn das Wort "muß" drückt doch aus, daß wir von *diesem* Begriff nicht abgehen können. (Oder soll ich sagen "wollen"?)

Ja, auch wenn ich von einer Begriffsbildung zu einer andern übergegangen bin, so bleibt der alte Begriff noch im Hintergrund.

27. Pay attention to the patter by means of which we convince someone of the truth of a mathematical proposition. It tells us something about the function of this conviction. I mean the patter by which intuition is awakened.

By which, that is, the machine of a calculating technique is set in motion.

28. Can it be said that if you learn a technique that convinces you of the uniformity of its results??

29. The limit of the empirical—is *concept-formation.*

What is the transition that I make from "It will be like this" to "it *must* be like this"? I form a different concept. One involving something that was not there before. When I say: "If these derivations are the same, then it *must* be that . . .", I am making something into a criterion of identity. So I am recasting my concept of identity.

But what if someone now says: "I am not aware of these *two* processes, I am only aware of the empirical, not of a formation and transformation of concepts which is independent of it; everything seems to me to be in the service of the empirical"?

In other words: we do not seem to become now more, now less, rational, or to alter the form of our thinking, so as to alter *what we call "thinking"*. We only seem always to be fitting our thinking to experience.

So much is clear: when someone says: "If you follow the *rule*, it *must* be like this", he has not any *clear* concept of what experience would correspond to the opposite.

Or again: he has not any clear concept of what it would be like for it to be otherwise. And this is very important.

30. What compels us *so* to form the concept of identity as to say, e.g., "If you really do the same thing both times, then the result must be the same too"?—What compels us to proceed according to a rule, to conceive something as a rule? What compels us to talk to ourselves in the forms of the languages we have learnt?

For the word "must" surely expresses our inability to depart from *this* concept. (Or ought I to say "refusal"?)

And even if I have made the transition from one concept-formation to another, the old concept is still there in the background.

Kann ich sagen: "Ein Beweis bringt uns zu einer gewissen Entscheidung, und zwar zu der, eine bestimmte Begriffsbildung anzunehmen"??

Sieh den Beweis nicht als einen Vorgang an, der dich *zwingt*, sondern der dich *führt*.—Und zwar führt er deine *Auffassung* eines (gewissen) Sachverhalts.

Aber wie kommt es, daß er *jeden* von uns so führt, daß wir übereinstimmend von ihm beeinflußt werden? Nun, wie kommt es, daß wir übereinstimmend *zählen*? "Wir sind eben so abgerichtet", kann man sagen "und die Übereinstimmung, die so erzeugt wird, setzt sich durch die Beweise fort".

Während dieses Beweises haben wir eine Anschauungsweise von der 3-Teilung des Winkels gebildet, die eine Konstruktion mit Lineal und Zirkel ausschließt.

Dadurch daß wir einen Satz als selbstverständlich anerkennen, sprechen wir ihn auch von jeder Verantwortung gegenüber der Erfahrung frei.

Während des Beweises wird unsere Anschauung geändert—und daß das mit Erfahrungen zusammenhängt, tut dem keinen Eintrag.

Unsere Anschauung wird umgemodelt.

31. Es muß so sein, heißt nicht, es wird so sein. Im Gegenteil: 'Es wird so sein' wählt eine aus anderen Möglichkeiten. 'Es muß so sein' sieht nur *eine* Möglichkeit.

Der Beweis leitet unsere Erfahrungen sozusagen in bestimmte Kanäle. Wer das und das immer wieder versucht hat, gibt den Versuch nach dem Beweis auf.

Es versucht Einer ein gewisses Bild aus Steinen zusammenzulegen. Er sieht nun eine Vorlage, in welcher ein *Teil* jenes Bildes aus allen seinen Steinen zusammengelegt erscheint, und gibt nun seinen Versuch auf. Die Vorlage war der *Beweis* dafür, daß sein Vorhaben unmöglich ist.

Auch die Vorlage, sowie die, die ihm zeigt, daß er wird ein Bild aus diesen Steinen zusammensetzen können, ändert seinen *Begriff*. Denn er hat, könnte man sagen, die Aufgabe des Zusammensetzens des Bildes aus den Steinen noch nie so angesehen.

Ist es gesagt, daß Einer, der sieht, daß man mit diesen Steinen einen Teil des Bildes legen kann, einsieht, daß man also auf keine Weise das ganze Bild aus ihnen wird legen können? Ist es nicht möglich, daß er versucht und versucht, ob nicht doch eine Stellung der Steine dies Ziel erreicht? und ist es nicht möglich, daß er sein Ziel erreicht? (Doppelte Verwendung eines Steins z.B.)

Can I say: "A proof induces us to make a certain decision, namely that of accepting a particular concept-formation"?

Do not look at the proof as a procedure that *compels* you, but as one that *guides* you.—And what it guides is your *conception* of a (particular) situation.

But how does it come about that it guides *each one* of us in such a way that we agree in the influence it has on us? Well, how does it come about that we agree in *counting*? "That is just how we are trained" one may say, "and the agreement produced in this way is carried further by the proofs."

In the course of this proof we formed our way of looking at the trisection of the angle, which excludes a construction with ruler and compass.

By accepting a proposition as a matter of course, we also release it from all responsibility in face of experience.

In the course of the proof our way of seeing is changed—and it does not detract from this that it is connected with experience.

Our way of seeing is remodelled.

31. It must be like this, does not mean: it will be like this. On the contrary: 'it will be like this' chooses between one possibility and another. 'It must be like this' sees only *one* possibility.

The proof as it were guides our experience into definite channels. Someone who has tried again and again to do such-and-such gives the attempt up after the proof.

Someone tries to arrange pieces to make a particular pattern. Now he sees a model in which one *part* of that pattern is seen to be composed of all his pieces, and he gives up his attempt. The model was the *proof* that his proposal is impossible.

That model too, like the one that shews that he will be able to make a pattern of these pieces, changes his *concept*. For, one might say, he never looked at the task of making the pattern of these pieces in this way before.

Is it obvious that if anyone sees that part of the pattern can be made with these pieces, he realizes that there is no way of making the whole pattern with them? May it not be that he goes on trying and trying whether after all some arrangement of the pieces does not achieve this end? And may he not achieve it? (Use of one piece twice over, e.g.)

Muß man hier nicht zwischen Denken und dem praktischen Erfolg des Denkens unterscheiden?

32. "... die nicht, wie wir, gewisse Wahrheiten unmittelbar einsehen, sondern vielleicht auf den langwierigeren Weg der Induktion angewiesen sind", so sagt Frege. Aber was mich interessiert ist das unmittelbare Einsehen, ob es nun das einer Wahrheit ist, oder einer Falschheit. Ich frage: was ist das charakteristische Gebahren von Menschen, die etwas 'unmittelbar einsehen'—was immer der praktische Erfolg dieses Einsehens ist?

Mich interessiert nicht das unmittelbare Einsehen einer Wahrheit, sondern das Phänomen des unmittelbaren Einsehens. Nicht (zwar) als einer besonderen seelischen Erscheinung sondern als einer Erscheinung im Handeln der Menschen.

33. Ja; es ist, als ob die Begriffsbildung unsere Erfahrung in bestimmte Kanäle leitete, so daß man nun die eine Erfahrung mit der anderen auf neue Weise zusammensieht. (Wie ein optisches Instrument Licht von verschiedenen Quellen auf bestimmte Art in einem Bild zusammenkommen läßt.)

Denke dir, der Beweis wäre eine Dichtung, ja ein Theaterstück. Kann mich das Ansehen eines solchen nicht zu etwas bringen?

Ich wußte nicht wie es gehen werde,—aber ich sah ein Bild, und nun wurde ich überzeugt, daß es so gehen werde, wie im Bilde.

Das Bild verhalf mir zur Vorhersage. Nicht als ein Experiment——es war nur der Geburtshelfer der Vorhersage.

Denn, was immer meine Erfahrungen sind, oder waren, ich muß doch noch die Vorhersage *machen*. (Die Erfahrungen machen sie nicht für mich.)

Dann ist es ja kein großes Wunder, daß der Beweis uns zur *Vorhersage* hilft. Ohne dieses Bild hätte ich nicht sagen können, wie es werden wird, aber wenn ich es sehe, so ergreife ich es zur Vorhersage.

Welche Farbe eine chemische Verbindung haben wird kann ich nicht mit Hilfe eines Bildes vorhersagen, das mir die Substanzen in der Proberöhre und die Reaktion veranschaulicht. Zeigt das Bild ein Aufschäumen und am Ende rote Krystalle, so könnte ich nicht sagen: "Ja, *so* muß es sein", oder "Nein, so kann es nicht sein". Anders aber ist es wenn ich das Bild eines Mechanismus in Bewegung sehe; dieses kann mich lehren, wie ein Teil sich wirklich bewegen wird. Stellte aber das Bild einen Mechanismus dar, dessen Teile aus einem sehr weichen Material (etwa Teig) bestünden, und sich daher im Bild auf verschiedene Art verbögen, so würde mir das Bild vielleicht wieder nicht zu einer Vorhersage verhelfen.

Must we not distinguish here between thinking and the practical success of the thinking?

32. "... who do not realize certain truths immediately, as we do, but perhaps are reduced to the roundabout path of induction", says Frege. But what interests me is this immediate realization, whether it is of a truth or of a falsehood. I am asking: what is the characteristic demeanour of human beings who 'realize' something 'immediately', whatever the practical result of this realizing is?

What interests me is not the immediate realization of a truth, but the phenomenon of immediate realization. Not indeed as a special mental phenomenon, but as one of human action.

33. Yes: it is as if the formation of a concept guided our experience into particular channels, so that one experience is now seen together with another one in a new way. (As an optical instrument makes light come from various sources in a particular way to form a pattern.)

Imagine that a proof was a work of fiction, a stage play. Cannot watching a play lead me to something?

I did not know how it would go,—but I saw a picture and became convinced that it would go as it does in the picture.

The picture helped me to make a prediction. Not as an experiment ——it was only midwife to the prediction.

For, whatever my experience is or has been, I surely still have to *make* the prediction. (Experience does not make it for me.)

No great wonder, then, that proof helps us to *predict*. Without this picture I should not have been able to say how it will be, but when I see it I seize on it with a view to prediction.

I cannot predict the colour of a chemical compound by means of a picture exhibiting the substances in the test-tube and the reaction. If the picture shewed frothing, and finally red crystals, I should not be able to say: "Yes, *that* is how it has to be" or "No, it cannot be like that". It is otherwise, however, when I see the picture of a mechanism in motion; that can tell me how a part actually will move. Though if the picture represented a mechanism whose parts were composed of a very soft material (dough, say), and hence bent about in various ways in the picture, then the picture would perhaps again not help in making a prediction.

Kann man sagen: ein Begriff werde so geformt, daß er einer gewissen Vorhersage angepaßt ist, d.h., sie in den einfachsten Terminis ermöglicht—?

34. Das philosophische Problem ist: Wie können wir die Wahrheit sagen, und dabei diese starken Vorurteile *beruhigen*?

Es ist ein Unterschied: ob ich etwas als eine Täuschung meiner Sinne oder als ein äußeres Ereignis denke, ob ich diesen Gegenstand zum Maß jenes nehme oder umgekehrt, ob ich mich entschließe, zwei Kriterien entscheiden zu lassen, oder nur eins.

35. Wenn richtig gerechnet wurde, so muß das herauskommen. Muß es dann *immer so* herauskommen? Natürlich.

Indem wir zu einer Technik erzogen sind, sind wir es auch zu einer Betrachtungsweise, die *ebenso fest* sitzt als jene Technik.

Der mathematische Satz scheint weder von den Zeichen, noch von den Menschen zu handeln, und er *tut* es daher auch nicht.

Er zeigt *die* Verbindungen die wir als starr betrachten. Wir schauen aber gewissermaßen von diesen Verbindungen weg und auf etwas anderes. Wir drehen ihnen sozusagen den Rücken. Oder: wir lehnen uns an sie oder fußen auf ihnen.

Nochmals: Wir sehen den mathematischen Satz nicht als einen Satz, der von Zeichen handelt an, er *ist* es daher auch nicht.

Wir erkennen ihn an, *indem* wir ihm den Rücken drehen.

Wie ist es, z.B. mit den Grundgesetzen der Mechanik? Wer sie versteht, muß wissen, auf welche Erfahrungen sie sich stützen. Anders verhält es sich mit den Sätzen der reinen Mathematik.

36. Ein Satz kann ein Bild beschreiben und dieses Bild mannigfach in unserer Betrachtungsweise der Dinge, also in unserer Lebens- und Handlungsweise verankert sein.

Ist nicht der Beweis ein *zu dünner* Grund, die Suche nach einer Konstruktion der 3Teilung ganz aufzugeben? Du bist nur ein oder zweimal die Zeichenreihe durchgegangen und daraufhin willst du dich entschliessen? Nur weil du diese eine Transformation gesehen hast, willst du die Suche aufgeben?

Der Effekt des Beweises sei, so meine ich, daß der Mensch sich in die neue Regel hineinstürzt.

Er hatte bisher nach der und der Regel gerechnet; nun zeigt ihm einer den Beweis, man könne auch anders rechnen, und er schaltet nun

Can we say that a concept is so formed as to be adapted to a certain prediction, i.e. it enables it to be made in the simplest terms—?

34. The philosophical problem is: how can we tell the truth and *pacify* these strong prejudices in doing so?

It makes a difference whether I think of something as a deception of my senses or an external event, whether I take this object as a measure of that or the other way round, whether I resolve to make two criteria decide or only one.

35. If the calculation has been done right, then this must be the result. Must *this always* be the result, in that case? Of course.

By being educated in a technique, we are also educated to have a way of looking at the matter which is just as firmly rooted as that technique.

Mathematical propositions seem to treat neither of signs nor of human beings, and therefore they *do* not.

They shew *those* connexions that we regard as rigid. But to a certain extent we look away from these connexions and at something else. We turn our back upon them, so to speak. Or: we rest, or lean, on them.

Once more: we do not look at the mathematical proposition as a proposition dealing with signs, and hence it *is* not that.

We acknowledge it *by* turning our back on it.

What about e.g. the fundamental laws of mechanics? If you understand them you must know how experience supports them. It is otherwise with the propositions of pure mathematics.

36. A proposition may describe a picture and this picture be variously anchored in our way of looking at things, and so in our way of living and acting.

Is not the proof too flimsy a reason for entirely giving up the search for a construction of the trisection? You have only gone through the sequence of signs once or twice; will you decide on the strength of that? Just because you have seen this one transformation, will you give up the search?

The effect of proof is, I believe, that we plunge into the new rule.

Hitherto we have calculated according to such and such a rule; now someone shews us the proof that it can also be done in another way, (auf die andere Technik) um—nicht weil er sich sagt, es werde so auch gehen, sondern weil er die neue Technik mit der alten als identisch empfindet, weil er ihr denselben Sinn geben muß, weil er sie als gleich anerkennt wie er diese Farbe als grün anerkennt.

D.h.: Das Einsehen der mathematischen Relationen spielt eine ähnliche Rolle wie das Einsehen *der Identität*. Man könnte beinahe sagen, es ist eine kompliziertere Art von Identität.

Man könnte sagen: Die Gründe warum er nun auf eine andere Technik umschaltet, sind von gleicher Art wie die, die ihn eine neue Multiplikation so ausführen lassen, wie er sie ausführt; indem er die Technik als die *gleiche* anerkennt, wie die, die er bei andern Multiplikationen angewandt hatte.

37. Ein Mensch ist in einem Zimmer *gefangen*, wenn die Tür unversperrt ist, sich nach innen öffnet; er aber nicht auf die Idee kommt zu *ziehen*, statt gegen sie zu drücken.

38. Wenn Weiß zu Schwarz wird, sagen manche Menschen "Es ist im Wesentlichen noch immer dasselbe". Und andere, wenn die Farbe um einen Grad dunkler wurde, sagen "Es hat sich *ganz* verändert".

39. Die Sätze '$a = a$', '$p \supset p$', "Das Wort 'Bismarck' hat 8 Buchstaben", "Es gibt kein rötlichgrün", sind alle einleuchtend und Sätze über das Wesen: was haben sie gemeinsam? Sie sind offenbar jeder von andrer Art und anderem Gebrauch. Der vorletzte ist einem Erfahrungssatz am ähnlichsten. Und es ist verständlich, daß man ihn einen synthetischen Satz *a priori* nennen kann.

Man kann sagen: wenn einer die Zahlenreihe mit der Buchstabenreihe nicht *zusammenhält*, kann er nicht wissen, wieviel Buchstaben das Wort hat.

40. Eine Figur aus der andern nach einer Regel abgeleitet. (Etwa die Umkehrung vom Thema.)

Dann das Resultat als Äquivalent der Operation gesetzt.

41. Wenn ich schrieb "der Beweis muß übersichtlich sein" so hieß das: *Kausalität* spielt im Beweis keine Rolle.

Oder auch: der Beweis muß sich durch bloßes Kopieren reproduzieren lassen.

42. Man könnte vielleicht sagen, daß der synthetische Charakter der mathematischen Sätze sich am augenfälligsten im unvorhersehbaren Auftreten der Primzahlen zeigt.

and we switch to the other technique—not because we tell ourselves that it will work this way too, but because we feel the new technique as identical with the old one, because we have to give it the same sense, because we recognize it as the same just as we recognize this colour as green.

That is to say: realizing mathematical relations has a role similar to that of realizing identity. It might almost be said to be a more complicated kind of identity.

It might be said: the reasons why we now shift to a different technique are of the same kind as those which make us carry out a new multiplication as we do; we accept the technique as the *same* as we have applied in doing other multiplications.

37. A human being is *imprisoned* in a room, if the door is unlocked but opens inwards; he, however, never gets the idea of *pulling* instead of pushing against it.

38. When white turns black some people say "Essentially it is still the same"; and others, when the colour turns a shade darker: "It is *completely* different".

39. The proposition '$a = a$', '$p \supset p$', "The word 'Bismarck' has 8 letters", "There is no such thing as reddish-green", are all obvious and are propositions about essence: what have they in common? They are evidently each of a different kind and differently used. The last but one is the most like an empirical proposition. And it can understandably be called a synthetic *a priori* proposition.

It can be said: unless you put the series of numbers and the series of letters side by side, you cannot know how many letters the word has.

40. One pattern derived from another according to a rule. (Say the reversal of a theme.)

Then the result put as equivalent to the operation.

41. When I wrote "proof must be perspicuous" that meant: *causality* plays no part in the proof.

Or again: a proof must be capable of being reproduced by mere copying.

42. It might perhaps be said that the synthetic character of the propositions of mathematics appears most obviously in the unpredictable occurrence of the prime numbers.

Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht weniger *a priori*. Man könnte sagen, will ich sagen, daß sie nicht aus ihren Begriffen durch eine Art von Analyse erhalten werden können, wohl aber einen Begriff durch Synthese bestimmen, etwa wie man durch die Durchdringung von Prismen einen Körper bestimmen kann.

Die Verteilung der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das was man synthetisch *a priori* nennen könnte, denn man kann sagen, daß sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist.

43. Daß bei der Fortsetzung der Division von 1 : 3 immer wieder 3 herauskommen muß, wird ebenso wenig durch Intuition erkannt, wie, daß die Multiplikation 25 × 25, wenn man sie wiederholt, immer wieder dasselbe Produkt liefert.

44. Könnte man nicht wirklich von Intuition in der Mathematik reden? Nicht so aber, daß eine *mathematische* Wahrheit intuitiv erfaßt würde, wohl aber eine physikalische oder psychologische. So weiß ich mit *großer* Sicherheit, daß ich jedesmal 625 errechnen werde, wenn ich zehnmal 25 mit 25 multipliziere. D.h. ich weiß die psychologische Tatsache, daß mir immer wieder diese Rechnung als richtig erscheinen wird; so wie ich weiß, wenn ich die Zahlenreihe von 1 bis 20 zehnmal nacheinander aus dem Gedächtnis aufschreibe, die Aufschreibungen sich beim Kollationieren als gleich erweisen werden.—Ist das nun eine Erfahrungstatsache? Freilich—und doch wäre es schwer Experimente anzugeben, die mich von ihr überzeugen würden. Man könnte so etwas eine intuitiv erkannte *Erfahrungstatsache* nennen.

45. Du willst sagen, daß jeder neue Beweis in einer oder der anderen Weise den Begriff des Beweises ändert.

Aber nach welchem Prinzip wird denn etwas als neuer Beweis anerkannt? Oder vielmehr gibt es da gewiß kein 'Prinzip'.

46. Soll ich nun sagen: "wir sind überzeugt, daß immer wieder dasselbe Resultat herauskommen wird"? Nein, das ist nicht genug. Wir sind überzeugt, daß immer dieselbe Rechnung herauskommen, gerechnet werden, wird. Ist *das* nun eine mathematische Überzeugung? Nein—denn würde nicht immer dasselbe gerechnet, so könnten wir nicht folgern, daß die Rechnung einmal ein Resultat das andre mal ein anderes ergibt.

Wir sind *freilich* auch überzeugt, daß wir beim wiederholten Rechnen das Bild der Rechnung wiederholen werden.—

47. Könnte ich nicht sagen: wer die Multiplikation macht, findet jedenfalls nicht das mathematische Faktum, aber den mathematischen Satz? Denn, was er *findet*, ist das nicht-mathematische Faktum, und so

But their being synthetic (in this sense) does not make them any the less *a priori*. They could be said, I want to say, not to be got out of their concepts by means of some kind of analysis, but really to determine a concept by synthesis, e.g. as crossing prisms can be made to determine a body.

The distribution of primes would be an ideal example of what could be called synthetic *a priori*, for one can say that it is at any rate not discoverable by an analysis of the concept of a prime number.

43. That, if you go on dividing 1 : 3, you must keep on getting 3 in the result is not known by intuition, any more than that the multiplication 25 × 25 yields the same product every time it is repeated.

44. Might one not really talk of intuition in mathematics? Though it would not be a *mathematical* truth that was grasped intuitively, but a physical or psychological one. In this way I know with *great* certainty that if I multiply 25 by 25 ten times I shall get 625 every time. That is to say I know the psychological fact that this calculation will keep on seeming correct to me; as I know that if I write down the series of numbers from 1 to 20 ten times my lists will prove identical on collation.—Now is that an empirical fact? Of course—and yet it would be difficult to mention experiments that would convince me of it. Such a thing might be called an intuitively known *empirical* fact.

45. You want to say that every new proof alters the concept of proof in one way or another.

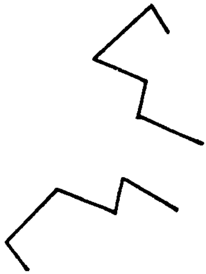
But then by what principle is something recognized as a new proof? Or rather there is certainly no 'principle' here.

46. Now ought I to say: "we are convinced that the same result will always come out"? No, that is not enough. We are convinced that the same *calculation* will always come out, be calculated. Now is *that* a mathematical conviction? No—for if it were not always the same that was calculated, we could not conclude that the calculation yields at one time one result and at another time another.

We are *of course* also convinced that when we repeat a calculation we shall repeat the pattern of the calculation.—

47. Might I not say: if you do a multiplication, in any case you do not find the mathematical fact, but you do find the mathematical proposition? For what you *find* is the non-mathematical fact, and in

den mathematischen Satz. Denn der mathematische Satz ist eine Begriffsbestimmung, die auf eine Entdeckung folgt.



Du *findest* eine neue Physiognomie. Du kannst dir sie z.B. jetzt *merken* oder sie kopieren.

Es ist eine *neue* Form gefunden, konstruiert worden. Aber sie wird dazu benützt, mit der alten einen neuen Begriff zu geben.

Man ändert den Begriff so, daß das hat herauskommen *müssen.*

Ich finde nicht das Resultat; sondern ich finde, daß ich dahin gelange.

Und nicht das ist eine Erfahrungstatsache, daß dieser Weg da anfängt und da endet, sondern, daß ich diesen Weg, oder einen Weg zu diesem Ende, gegangen bin.

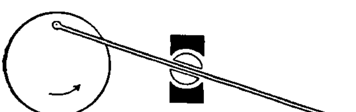
48. Aber könnte man nicht sagen, daß die *Regeln* diesen Weg führen, auch wenn niemand ihn ginge?

Denn das ist es ja, was man sagen möchte—und hier sehen wir die mathematische Maschine, die, von den Regeln selbst getrieben, nur mathematischen Gesetzen gehorcht und nicht physikalischen.

Ich will sagen: das Arbeiten der mathematischen Maschine ist nur das *Bild* des Arbeitens einer Maschine.

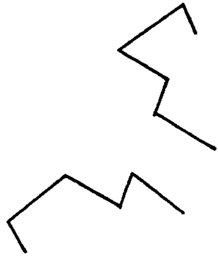
Die Regel arbeitet nicht, denn, was immer der Regel nach geschieht, ist eine Deutung der Regel.

49. Nehmen wir an, ich habe die Stadien der Bewegung von



im Bilde vor mir, so verhilft mir das zu einem Satz, den ich von diesem Bild gleichsam ablese. Der Satz enthält das Wort "ungefähr" und ist ein Satz der Geometrie.

this way the mathematical proposition. For a mathematical proposition is the determination of a concept following upon a discovery.



You *find* a new physiognomy. Now you can e.g. memorize or copy it.

A *new* form has been found, constructed. But it is used to give a new concept together with the old one.

The concept is altered so that this *had* to be the result.

I find, not the result, but that I reach it.

And it is not this route's beginning here and ending here that is an empirical fact, but my having gone this road, or some road to this end.

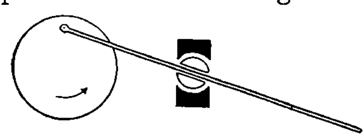
48. But might it not be said that the *rules* lead this way, even if no one went it?

For that is what one would like to say—and here we see the mathematical machine, which, driven by the rules themselves, obeys only mathematical laws and not physical ones.

I want to say: the working of the mathematical machine is only the *picture* of the working of a machine.

The rule does not do work, for whatever happens according to the rule is an interpretation of the rule.

49. Let us suppose that I have the stages of the movement of



in a picture in front of me; then this enables me to form a proposition, which I as it were read off from this picture. The proposition contains the word "roughly" and is a proposition of geometry.

Es ist seltsam, daß ich einen Satz von einem *Bild* soll ablesen können.

Der Satz aber handelt nicht von dem Bild das ich sehe. Er sagt nicht, daß auf diesem Bild das und das zu sehen ist. Er sagt aber auch nicht, was der wirkliche Mechanismus tun wird, obwohl er dies andeutet.

Aber könnte ich von der Bewegung des Mechanismus, wenn ihre Teile sich nicht ändern, auch andere Zeichnungen anfertigen? D.h., bin ich nicht *gezwungen* eben dies als Bild der Bewegung, *unter diesen Bedingungen*, anzunehmen?

Denken wir uns die Konstruktion der Stadien des Mechanismus mit Strichen von wechselnder Farbe ausgeführt. Die Striche seien zum Teil schwarz auf weißem Grund, zum Teil weiß auf schwarzem Grund. Denke dir die Konstruktionen im Euklid so ausgeführt; sie werden allen Augenschein verlieren.

50. Das umgekehrte Wort hat ein *neues* Gesicht.

Wie, wenn man sagte: Wer die Folge 123 umgekehrt hat, *lernt* über sie, daß sie umgekehrt 321 ergibt? Und zwar ist, was er lernt, nicht eine Eigenschaft dieser Tintenstriche, sondern der Folge von *Formen*. Er lernt eine *formale* Eigenschaft von Formen. Der Satz, welcher diese formale Eigenschaft aussagt, wird durch die Erfahrung bewiesen, die ihm die Entstehung der einen Form auf diese Weise aus der andern zeigt.

Hat nun, wer das lernt, *zwei* Eindrücke? Einen davon, daß die Reihenfolge *umgekehrt* wird, den andern davon, daß 321 entsteht? Und könnte er die Erfahrung, den Eindruck, daß 123 umgekehrt wird, nicht haben und doch nicht den, daß 321 entsteht? Vielleicht wird man sagen: "nur durch eine seltsame Täuschung".—

Warum man eigentlich nicht sagen kann, daß man jenen formalen Satz aus der Erfahrung lernt—weil man es erst dann diese Erfahrung nennt, wenn dieser Prozess zu diesem Resultat führt. Die Erfahrung, die man meint, besteht schon aus diesem Prozess mit diesem Resultat.

Darum ist sie mehr wie die Erfahrung: Ein Bild zu sehen.

Kann eine Buchstabenreihe zwei Umkehrungen haben?

Etwa eine akustische und eine andere optische Umkehrung. Angenommen, ich erkläre jemandem was die Umkehrung eines Wortes auf dem Papier ist, was man so nennt. Und nun stellt sich heraus, daß er eine akustische Umkehrung des Wortes hat, d.h., etwas was er so nennen möchte, was aber nicht ganz mit dem geschriebenen übereinstimmt. So daß man sagen kann: er hört *das* als Umkehrung des Wortes. Gleichsam als verzerrte sich ihm das Wort beim Umkehren.

It is queer that I should be able to read off a proposition from a *picture*.

The proposition, however, does not treat of the picture that I see. It does not say that such-and-such can be seen in this picture. But nor does it say what the actual mechanism will do, although it suggests it.

But could I draw the movement of the mechanism in other ways too, if its parts do not alter? That is to say, am I not *compelled, under these conditions*, to accept just this as the picture of the movement?

Let us imagine the construction of the phases of the mechanism carried out with lines of changing colour. Let the lines be partly black on a white ground, partly white on a black ground. Imagine the constructions in Euclid carried out in this way; they will lose all obviousness.

50. A word in reverse has a *new* face.

What if it were said: If you reverse the sequence 123, you *learn* about it that it yields 321 when reversed? And what you learn is not a property of these ink-marks, but of the sequence of *forms*. You learn a *formal* property of forms. The proposition asserting this formal property is proved by experience, which shews you the one form arising in this way out of the other.

Now, if you learn this, do you have *two* impressions? One of the fact that the sequence is *reversed*, the other of the fact that 321 arises? And could you not have the experience, the impression, of 123's being reversed and yet not of 321's arising? Perhaps it will be said: "Only by a queer illusion".—

The reason why one really cannot say that one learns that formal proposition from experience is—that one only calls it this experience when this process leads to this result. The experience meant consists as such of this process with this result.

That is why it is more than the experience: seeing a pattern.

Can one row of letters have two reverses?

Say one acoustic, and another, optical, reverse. Suppose I explain to someone what the reverse of a word on paper is, what we call that. And now it turns out that he has an acoustic reverse of the word, i.e., something that he would like to call that, but it does not quite agree with the written reverse. So that one can say: he hears *this* as the reverse of the word. As if, as it were, the word got distorted for him

Und dies könnte etwa eintreten, wenn er das Wort und die Umkehrung fließend ausspricht im Gegensatz zu dem Fall, wenn er es buchstabiert. Oder die Umkehrung könnte anders scheinen, wenn er das Wort in *einem* Zuge vor- und rückwärts spricht.

Es wäre möglich, daß man das genaue Spiegelbild eines Profils sogleich nach diesem gesehen nie für das gleiche und nur in die andere Richtung gedrehte erklärte, sondern daß, um den Eindruck der genauen Umkehrung zu machen, das Profil in den Maßen ein wenig geändert werden mußte.

Ich will doch sagen, man habe kein Recht zu sagen: wir mögen zwar über die korrekte Umkehrung, eines langen Wortes z.B., im Zweifel sein, aber wir *wissen*, daß das Wort nur eine Umkehrung hat.

"Ja, aber wenn es eine Umkehrung in *diesem* Sinne sein soll, dann kann es nur *eine* geben." Heißt hier 'in diesem Sinne': nach diesen Regeln, oder: mit dieser Physiognomie? Im ersten Falle wäre der Satz tautologisch, im zweiten muß er nicht wahr sein.

51. Denk dir eine Maschine, die 'so konstruiert ist', daß sie eine Buchstabenreihe umkehrt. Und nun den Satz, daß das Resultat im Falle A B E R
R E B A ist.—

Die Regel, wie sie wirklich gemeint ist, scheint eine treibende Kraft zu sein, die eine ideale Reihe *so* umkehrt,—was immer ein Mensch mit einer wirklichen Reihe tun mag.

Dieser ist also der Mechanismus, der für den wirklichen der Maßstab, das Ideal ist.

Und das ist verständlich. Denn wird das Resultat der Umkehrung zum Kriterium dafür daß die Reihe wirklich umgekehrt wurde, und drücken wir dies so aus, daß wir es einer idealen Maschine nachtun, so muß diese Maschine *unfehlbar* dies Resultat erzeugen.

52. Kann man nun sagen: daß die Begriffe, die die Mathematik schafft, eine Bequemlichkeit sind, daß es wesentlich auch ohne sie ginge?

Zuvörderst drückt die Annahme dieser Begriffe die *sichere* Erwartung gewisser Erfahrungen aus.

Wir nehmen es z.B. nicht hin, daß eine Multiplikation nicht jedesmal immer das gleiche Resultat ergibt.

Und was wir mit Sicherheit erwarten, ist für unser ganzes Leben wesentlich.

53. Warum soll ich aber dann nicht sagen, daß die mathematischen Sätze eben jene bestimmten Erwartungen, d.h. also Erfahrungen,

in being turned round. And this might perhaps occur if he pronounced the word and its reverse fluently, as opposed to the case of spelling it out. Or the reverse might seem different when he spoke the word forwards and backwards in a single utterance.

It might be that the exact mirror-image of a profile, seen immediately after it, was never pronounced to be the same thing, merely turned in the other direction; but that in order to give the impression of exact reversal, the profile had to be altered a little in its measurements.

But I want to say that we have no right to say: though we may indeed be in doubt about the correct reverse of, for example, a long word, still we *know* that the word has only *one* reverse.

"Yes, but if it is supposed to be a reverse in *this* sense there can be only one." Does 'in this sense' here mean: by these rules, or: with this physiognomy? In the first case the proposition would be tautological, in the second it need not be true.

51. Think of a machine which 'is so constructed' that it reverses a row of letters. And now of the proposition that in the case of

O V E R

the result is R E V O.—

The rule, as it is actually meant, seems to be a driving power which reverses an ideal sequence like *this*,—whatever a human being may do with an actual sequence.

This is the mechanism which is the yardstick, the ideal, for the actual mechanism.

And that is *intelligible*. For if the result of the reversal becomes the criterion for the row's really having been reversed, and if we express this as our imitating an ideal machine, then this machine must produce this result *infallibly*.

52. Now can it be said that the concepts which mathematics produces are a convenience, that essentially we could do without them?

First and foremost the adoption of these concepts expresses the *sure* expectation of certain experiences.

We do not accept e.g. a multiplication's not yielding the same result every time.

And what we expect with certainty is essential to our whole life.

53. Why, then, should I not say that mathematical propositions just express those special expectations, i.e., therefore, that they express

ausdrücken? Nur weil sie es eben nicht tun. Die Annahme eines Begriffes ist eine Maßregel, die ich vielleicht nicht ergreifen würde, wenn ich nicht das Eintreten gewisser Tatsachen mit Bestimmtheit erwartete; aber darum ist die Festsetzung dieses Maßes nicht äquivalent mit dem Aussprechen der Erwartungen.

54. Es ist schwer, den Tatsachenkörper auf die richtige Fläche zu stellen: das Gegebene als gegeben zu betrachten. Es ist schwer den Körper anders aufzustellen als man gewöhnt ist, ihn zu sehen. Ein Tisch in einer Rumpelkammer mag immer auf der Tischplatte liegen, aus Gründen der Raumersparnis, z.B. So habe ich den Tatsachenkörper immer *so* aufgestellt gesehen, aus mancherlei Gründen; und nun soll ich etwas anderes als seinen Anfang und etwas anderes als sein Ende ansehen. Das ist schwer. Er will gleichsam nicht so stehen, es sei denn daß man ihn in dieser Lage durch andere Vorrichtungen unterstützt.

55. Es ist *eines* eine mathematische Technik zu gebrauchen, die darin besteht, den Widerspruch zu vermeiden, und ein anderes gegen den Widerspruch in der Mathematik überhaupt zu philosophieren.

56. Der Widerspruch. Warum grad dieses *eine* Gespenst? Das ist doch sehr verdächtig.

Warum sollte eine Rechnung, zu einem praktischen Zweck angestellt, die einen Widerspruch ergibt, nur nicht sagen: "Tu wie dir's beliebt, ich, die Rechnung, entscheide darüber nicht"?

Der Widerspruch könnte als Wink der Götter aufgefaßt werden, daß ich handeln soll und *nicht* überlegen.

57. "Warum soll es in der Mathematik keinen Widerspruch geben dürfen?"—Nun, warum darf es in unsern einfachen Sprachspielen keinen geben? (Da besteht doch gewiß ein Zusammenhang.) Ist das also ein Grundgesetz, daß alle denkbaren Sprachspiele beherrscht?

Angenommen ein Widerspruch in einem Befehl z.B. bewirkt Staunen und Unentschlossenheit—und nun sagen wir: das eben ist der Zweck des Widerspruchs in diesem Sprachspiel.

58. Einer kommt zu Leuten und sagt: "Ich lüge immer". Sie antworten: "Nun, dann können wir dir trauen!"—Aber könnte *er* meinen, was er sagte? Gibt es nicht ein Gefühl: man sei unfähig, etwas wirklich Wahres zu sagen; sei es was immer?

"Ich lüge immer!"—Nun, und wie war's mit *diesem* Satz?—"Der war auch gelogen!"—Aber dann lügst du also nicht immer!—"Doch, alles ist gelogen!"

Wir würden vielleicht von diesem Menschen sagen, er meint mit "wahr" und mit "lügen" nicht dasselbe, was wir meinen. Er meine matters of experience? Only because they just do not. Perhaps I should not take the measure of adopting a certain concept if I did not quite definitely expect the occurrence of certain facts; but for that reason laying down this measure and expressing the expectations are not equivalent.

54. It is difficult to put the body of fact right side up: to regard the given as given. It is difficult to place the body differently from the way one is accustomed to see it. A table in a lumber room may always lie upside down, in order to save space perhaps. Thus I have always seen the body of fact placed like *this*, for reasons of various kinds; and now I am supposed to see something else as its beginning and something else as its end. That is difficult. It as it were will not stand like that, unless one supports it in this position by means of other contrivances.

55. It is one thing to use a mathematical technique consisting in the avoidance of contradiction, and another to philosophize against contradiction in mathematics.

56. Contradiction. Why just this *one* bogy? That is surely very suspicious.

Why should not a calculation made for a practical purpose, with a contradictory result, tell me: "Do as you please, I, the calculation, do not decide the matter"?

The contradiction might be conceived as a hint from the gods that I am to act and *not* consider.

57. "Why should contradiction be disallowed in mathematics?" Well, why is it not allowed in our simple language-games? (There is certainly a connexion here.) Is this then a fundamental law governing all thinkable language-games?

Let us suppose that a contradiction in an order, e.g. produces astonishment and indecision—and now we say: that is just the purpose of contradiction in this language-game.

58. Someone comes to people and says: "I always lie". They answer: "Well, in that case we can trust you!"—But could *he* mean what he said? Is there not a feeling of being incapable of saying something really true; let it be what it may?—

"I always lie!"—Well, and what about *that*?—"It was a lie too!"—But in that case you don't always lie!—"No, it's all lies!"

Perhaps we should say of this man that he doesn't mean the same vielleicht, so etwas wie: was er sage, flimmere; oder nichts komme wirklich vom Herzen.

Man könnte auch sagen: sein "ich lüge immer" war eigentlich keine *Behauptung*. Eher war es ein Ausruf.

Man kann also sagen: "Wenn er jenen Satz nicht ohne Gedanken aussprach,—so mußte er die Worte so und so meinen, er *konnte* sie nicht auf die gewöhnliche Weise meinen"?

59. Warum sollte man den Russellschen Widerspruch nicht als etwas Über-propositionales auffassen, etwas das über den Sätzen thront und noch nach beiden Seiten, wie ein Januskopf, zugleich schaut? N.B. Der Satz $F(F)$—in welchem $F(\xi) = \sim\xi(\xi)$—enthält keine Variablen und könnte also als etwas Über-logisches, als etwas Unangreifbares, dessen Verneinung es nur wieder selber *aussagt*, gelten. Ja, könnte man nicht sogar die Logik mit diesem Widerspruch anfangen? Und von ihm gleichsam zu den Sätzen niedersteigen.

Der sich selbst widersprechende Satz stünde wie ein Denkmal (mit einem Januskopf) über den Sätzen der Logik.

60. Nicht dies ist perniziös: einen Widerspruch zu erzeugen in der Region, in der weder der widerspruchsfreie noch der widerspruchsvolle Satz irgend welche Arbeit zu leisten hat; wohl aber das: nicht zu wissen, wie man dorthin gekommen ist, wo der Widerspruch nicht mehr schadet.

thing as we do by "true" and by "lying". He means perhaps something like: What he says flickers; or nothing really comes from his heart.

It might also be said: his "I always lie" was not really an *assertion*. It was rather an exclamation.

And so it can be said: "If he was saying that sentence, not thoughtlessly—then he must have meant the words in such-and-such a way, he *cannot* have meant them in the usual way"?

59. Why should Russell's contradiction not be conceived as something supra-propositional, something that towers above the propositions and looks in both directions like a Janus head? N.B. the proposition $F(F)$—in which $F(\xi) = \sim\xi(\xi)$—contains no variables and so might hold as something supra-logical, as something unassailable, whose negation itself in turn only *asserts* it. Might one not even begin logic with this contradiction? And as it were descend from it to propositions.

The proposition that contradicts itself would stand like a monument (with a Janus head) over the propositions of logic.

60. The pernicious thing is not, to produce a contradiction in the region in which neither the consistent nor the contradictory proposition has any kind of work to accomplish; no, what *is* pernicious is: not to know how one reached the place where contradiction no longer does any harm.

IV

1942–1943

1. Es ist natürlich klar, daß der Mathematiker, insofern er wirklich 'ein Spiel spielt' *keine Schlüsse zieht*. Denn 'Spielen' muß hier heißen: in Übereinstimmung mit gewissen Regeln *handeln*. Und schon das wäre ein Heraustreten aus dem bloßen Spiel: wenn er den Schluß zöge, daß er hier der allgemeinen Regel gemäß so handeln dürfe.

2. *Rechnet* die Rechenmaschine?

Denk dir, eine Rechenmaschine wäre durch Zufall entstanden; nun druckt Einer durch Zufall auf ihre Knöpfe (oder ein Tier läuft über sie) und sie rechnet das Produkt 25 × 20.—

Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, daß ihre Zeichen auch im *Zivil* gebraucht werden.

Es ist der Gebrauch außerhalb der Mathematik, also die *Bedeutung* der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht.

So, wie es ja auch kein logischer Schluß ist, wenn ich ein Gebilde in ein anderes transformiere (eine Anordnung von Stühlen etwa in eine andere), wenn diese Anordnungen nicht außerhalb dieser Transformation einen sprachlichen Gebrauch haben.

3. Aber ist nicht das wahr, daß Einer, der keine Ahnung von der Bedeutung der Russellschen Zeichen hätte, Russell's Beweise *nachrechnen* könnte? Und also in einem wichtigen Sinne prüfen könnte, ob sie richtig seien oder falsch?

Man könnte eine menschliche Rechenmaschine so abrichten, daß sie, wenn ihr die Schlußregeln gezeigt und etwa an Beispielen vorgeführt wurden, die Beweise eines mathematischen Systems (etwa des Russellschen) durchliest und nach jedem richtig gezogenen Schluß mit dem Kopf nickt, bei einem Fehler aber den Kopf schüttelt und zu rechnen aufhört. Dieses Wesen könnte man sich im übrigen vollkommen idiotisch vorstellen.

Einen Beweis nennen wir etwas, was sich nachrechnen, aber auch kopieren läßt.

4. Wenn die Mathematik ein Spiel ist, dann ist ein Spiel spielen Mathematik treiben, und warum dann nicht auch: Tanzen?

IV

1942–3

1. It is of course clear that the mathematician, in so far as he really is 'playing a game' *does not infer*. For here 'playing' must mean: *acting* in accordance with certain rules. And it would already be something outside the mere game for him to infer that he could act in this way according to the general rule.

2. Does a calculating machine *calculate*?

Imagine that a calculating machine had come into existence by accident; now someone accidentally presses its knobs (or an animal walks over it) and it calculates the product 25×20.

I want to say: it is essential to mathematics that its signs are also employed in *mufti*.

It is the use outside mathematics, and so the *meaning* of the signs, that makes the sign-game into mathematics.

Just as it is not logical inference either, for me to make a change from one formation to another (say from one arrangement of chairs to another) if these arrangements have not a linguistic function apart from this transformation.

3. But is it not true that someone with no idea of the meaning of Russell's symbols could *work over* Russell's proofs? And so could in an important sense test whether they were right or wrong?

A human calculating machine might be trained so that when the rules of inference were shewn it and perhaps exemplified, it read through the proofs of a mathematical system (say that of Russell), and nodded its head after every correctly drawn conclusion, but shook its head at a mistake and stopped calculating. One could imagine this creature as otherwise perfectly imbecile.

We call a proof something that can be worked over, but can also be copied.

4. If mathematics is a game, then playing some game is doing mathematics, and in that case why isn't dancing mathematics too?

Denke dir, daß Rechenmaschinen in der Natur vorkämen, ihre Gehäuse aber für die Menschen undurchdringlich wären. Und diese Menschen benützten nun diese Vorrichtungen etwa wie wir das Rechnen, wovon sie aber gar nichts wissen. Sie machen also etwa Vorhersagungen mit Hilfe der Rechenmaschinen, aber für sie ist das Handhaben dieser seltsamen Gegenstände ein Experimentieren.

Diesen Leuten fehlen Begriffe, die wir haben; aber wodurch sind diese bei ihnen ersetzt?—

Denke an den Mechanismus, dessen Bewegung wir als geometrischen (kinematischen) Beweis ansahen: Das ist klar, daß normalerweise von einem, der das Rad umtreibt, nicht gesagt würde, er beweist etwas. Ist es nicht ebenso mit dem, der zum Spiel Zeichen aneinander reiht und diese Reihen verändert; auch wenn, was er hervorbringt, als Beweis angesehen werden könnte?

Zu sagen, die Mathematik sei ein Spiel, soll heißen: wir brauchen beim Beweisen nirgends an die Bedeutung der Zeichen appellieren, also an ihre außermathematische Anwendung. Aber was heißt es denn überhaupt: an diese appellieren? Wie kann so ein Appell etwas fruchten?

Heißt das, aus der Mathematik heraustreten und wieder in sie zurückkehren, oder heißt es aus *einer* mathematischen Schlußweise in eine andre treten?

Was heißt es, einen neuen Begriff von der Oberfläche einer Kugel gewinnen? In wiefern ist das dann ein Begriff von der Oberfläche einer *Kugel*? Doch nur insofern er sich auf wirkliche Kugeln anwenden läßt.

Wieweit muß man einen Begriff vom 'Satz' haben, um die Russellsche mathematische Logik zu verstehen?

5. Wenn die intendierte Anwendung der Mathematik wesentlich ist, wie steht es da mit Teilen der Mathematik, deren Anwendung— oder doch *das*, was Mathematiker für die Anwendung halten,— gänzlich phantastisch ist? So daß man, wie in der Mengenlehre, einen Zweig der Mathematik treibt, von dessen Anwendung man sich einen ganz falschen Begriff macht. Treibt man nun nicht *doch* Mathematik?

Wenn die arithmetischen Operationen lediglich zur Konstruktion einer Chiffre dienten, wäre ihre Anwendung natürlich grundlegend von der unsern verschieden. Wären diese Operationen dann aber überhaupt mathematische Operationen?

Kann man von dem, der eine Regel des Entzifferns anwendet, sagen, er vollziehe mathematische Operationen? Und doch lassen sich seine

Imagine that calculating machines occurred in nature, but that people could not pierce their cases. And now suppose that these people use these appliances, say as we use calculation, though of that they know nothing. Thus e.g. they make predictions with the aid of calculating machines, but for them manipulating these queer objects is experimenting.

These people lack concepts which we have; but what takes their place?

Think of the mechanism whose movement we saw as a geometrical (kinematic) proof: clearly it would not normally be said of someone turning the wheel that he was proving something. Isn't it the same with someone who makes and changes arrangements of signs as a game; even when what he produces could be seen as a proof?

To say mathematics is a game is supposed to mean: in proving, we need never appeal to the meaning of the signs, that is to their extra-mathematical application. But then what does appealing to this mean at all? How can such an appeal be of any avail?

Does it mean passing out of mathematics and returning to it again, or does it mean passing from *one* method of mathematical inference to another?

What does it mean to obtain a new concept of the surface of a sphere? How is it then a concept of the surface of a *sphere*? Only in so far as it can be applied to real spheres.

How far does one need to have a concept of 'proposition', in order to understand Russellian mathematical logic?

5. If the intended application of mathematics is essential, how about parts of mathematics whose application—or at least *what* mathematicians take for their application—is quite fantastic? So that, as in set theory, one is doing a branch of mathematics of whose application one forms an entirely false idea. Now, isn't one doing mathematics *none the less*?

If the operations of arithmetic only served to construct a cipher, its application would of course be fundamentally different from that of our arithmetic. But would these operations then be mathematical operations at all?

Can someone who is applying a decoding rule be said to be performing mathematical operations? And yet his transformations can be

Umformungen so auffassen. Denn er könnte doch sagen, er berechne, was bei der Entzifferung des Zeichens ... gemäß dem und dem Schlüssel herauskommen müsse. Und der Satz: daß die Zeichen ... dieser Regel gemäß entziffert ... ergeben, ist ein mathematischer. Sowie auch der Satz: daß man beim Schachspiel von *dieser* Stellung zu jener kommen kann.

Denke dir die Geometrie des vierdimensionalen Raums zu dem Zweck betrieben, die Lebensbedingungen der Geister kennen zu lernen. Ist sie darum nicht Mathematik? Und kann ich nun sagen, sie bestimme Begriffe?

Würde es nicht seltsam klingen, von einem Kinde zu sagen, es könne bereits tausende und tausende von Multiplikationen machen—womit nämlich gemeint sein soll, es könne bereits im unbegrenzten Zahlenraum rechnen. Und zwar könnte das noch als eine äußerst bescheidene Ausdrucksweise gelten, da er nur 'tausende und tausende' statt 'unendlich viele' sagt.

Könnte man sich Menschen denken, die im gewöhnlichen Leben etwa nur bis 1000 rechnen und die Rechnungen mit höheren Zahlen zu mathematischen Untersuchungen über die Geisterwelt vorbehalten haben?

"Ob das nun von einer *wirklichen* Kugelfläche gilt—von der mathematischen gilt es"—das erweckt den Anschein, als unterschiede sich der mathematische Satz von einem Erfahrungssatz insbesondere darin, daß wo die Wahrheit des Erfahrungssatzes schwankend und ungefähr ist, der mathematische Satz *sein* Objekt exact und unbedingt wahr beschreibt. Als wäre eben die 'mathematische Kugel' eine Kugel. Und man könnte sich etwa fragen ob es nur *eine* solche Kugel, oder ob es mehrere gebe (eine Fregesche Fragestellung).

Tut ein Mißverständnis, die mögliche Anwendung betreffend, der Rechnung als einem Teil der Mathematik Eintrag?

Und abgesehen von einem Mißverständnis,—wie ist es mit der bloßen Unklarheit?

Wer glaubt, die Mathematiker haben ein seltsames Wesen, die $\sqrt{-1}$, entdeckt, die quadriert nun doch -1 ergebe, kann der nicht doch ganz gut mit komplexen Zahlen rechnen und solche Rechnungen in der Physik anwenden? Und sind's darum weniger *Rechnungen*?

In *einer* Beziehung steht freilich sein Verständnis auf schwachen Füßen; aber er wird mit Sicherheit seine Schlüße ziehen, und sein Kalkül wird auf *festen* Füßen stehen.

Wäre es nun nicht lächerlich, zu sagen, dieser triebe nicht Mathematik?

so conceived. For he could surely say that he was calculating what had to come out in decoding the symbols . . . with such-and-such a key. And the proposition: the signs . . ., decoded according to this rule, yield . . . is a mathematical one. As is the proposition that you can get to this position from *that* one in chess.

Imagine the geometry of four-dimensional space done with a view to learning about the living conditions of spirits. Does that mean that it is not mathematics? And can I now say that it determines concepts?

Would it not sound queer to say that a child could already do thousands and thousands of multiplications—by which is supposed to be meant that it can already calculate in the unlimited number domain. And indeed this might be reckoned an extremely modest way of putting it, as it says only 'thousands and thousands' instead of 'infinitely many'.

Could people be imagined, who in their ordinary lives only calculated up to 1000 and kept calculations with higher numbers for mathematical investigations about the world of spirits?

"Whether or not this holds of the surface of a *real* sphere—it does hold for the mathematical one"—this makes it look as if the special difference between the mathematical and an empirical proposition was that, while the truth of the empirical proposition is rough and oscillating, the mathematical proposition describes *its* object precisely and absolutely. As if, in fact, the 'mathematical sphere' were a sphere. And it might e.g. be asked whether there was only *one* such sphere, or several (a Fregean question).

Does a misunderstanding about the possible application constitute an objection to the calculation as a part of mathematics?

And apart from misunderstanding,—what about mere lack of clarity?

Imagine someone who believes that mathematicians have discovered a queer thing, $\sqrt{-1}$, which when squared does yield -1, can't he nevertheless calculate quite well with complex numbers, and apply such calculations in physics? And does this make them any the less *calculations*?

In *one* respect of course his understanding has a weak foundation; but he will draw his conclusions with certainty, and his calculus will have a *solid* foundation.

Now would it not be ridiculous to say this man wasn't doing mathematics?

Es erweitert Einer die Mathematik, gibt neue Definitionen und findet neue Lehrsätze——und in *gewisser* Beziehung kann man sagen, er wisse nicht was er tut.—Er hat eine vage Vorstellung, etwas *entdeckt* zu haben wie einen Raum (wobei er an ein Zimmer denkt), ein Reich erschlossen zu haben, und würde, darüber gefragt, viel Unsinn reden.

Denken wir uns den primitiven Fall, daß Einer ungeheure Multiplikationen ausführte um, wie er sagt: dadurch neue riesige Provinzen des Zahlenreichs zu gewinnen.

Denk dir das Rechnen mit der $\sqrt{-1}$ wäre von einem Narren erfunden worden, der, bloß vom Paradoxen der Idee angezogen, die Rechnung als eine Art Gottes- oder Tempeldienst des Absurden treibt. Er bildet sich ein, das Unmögliche aufzuschreiben und mit ihm zu operieren.

Mit andern Worten: Wer an die mathematischen *Gegenstände* glaubt, und ihre seltsamen Eigenschaften,—kann der nicht doch Mathematik betreiben? Oder:—treibt der nicht auch Mathematik?

'Idealer Gegenstand.' "Das Zeichen '*a*' bezeichnet einen idealen Gegenstand" soll offenbar etwas über die Bedeutung, also den Gebrauch von '*a*' aussagen. Und es heißt natürlich, daß dieser Gebrauch in gewisser Beziehung ähnlich ist dem eines Zeichens, das einen Gegenstand hat, und daß es keinen Gegenstand bezeichnet. Es ist aber interessant, was der Ausdruck 'idealer Gegenstand' aus diesem Faktum macht.

6. Man könnte unter Umständen von einer endlosen Kugelreihe reden.—Denken wir uns eine solche gerade, endlose Reihe von Kugeln in gleichen Abständen und wir berechnen die Kraft, die alle diese Kugeln nach einem bestimmten Attraktionsgesetz auf einen bestimmten Körper ausüben. Die Zahl, die diese Rechnung liefert, betrachten wir als das Ideal der Genauigkeit für gewisse Messungen.

Das Gefühl des *Seltsamen* kommt hier von einem Mißverständnis. Der Art von Mißverständnis, die ein Daumenfangen des Verstandes erzeugt—und dem ich Einhalt gebieten will.

Der Einwand, daß 'das Endliche nicht das Unendliche erfassen kann' richtet sich *eigentlich* gegen die Idee eines psychologischen Aktes des Erfassens oder Verstehens.

Oder denke dir, wir sagen einfach: "Diese Kraft entspricht der Anziehung einer endlosen Kugelreihe, die so und so angeordnet sind und den Körper nach diesem Attraktionsgesetz anziehen". Oder wieder: "Berechne die Kraft, die eine endlose Kugelreihe, von der und

Someone makes an addition to mathematics, gives new definitions and discovers new theorems——and in a *certain* respect he can be said not to know what he is doing.—He has a vague imagination of having *discovered* something like a space (at which point he thinks of a room), of having opened up a kingdom, and when asked about it he would talk a great deal of nonsense.

Let us imagine the primitive case of someone carrying out enormous multiplications in order, as he says, to conquer gigantic new provinces of the domain of numbers.

Imagine calculating with $\sqrt{-1}$ invented by a madman, who, attracted merely by the paradox of the idea, does the calculation as a kind of service, or temple ritual, of the absurd. He imagines that he is writing down the impossible and operating with it.

In other words: if someone believes in mathematical *objects* and their queer properties—can't he nevertheless do mathematics? Or—isn't he also doing mathematics?

'Ideal object.' "The symbol '*a*' stands for an ideal object" is evidently supposed to assert something about the meaning, and so about the use, of '*a*'. And it means of course that this use is in a certain respect similar to that of a sign that has an object, and that it does not stand for any object. But it is interesting what the expression 'ideal object' makes of this fact.

6. In certain circumstances we might speak of an endless row of marbles.—Let us imagine such an endless straight row of marbles at equal distances from one another; we calculate the force exerted by all these marbles on a certain body according to a certain law of attraction. We regard the number yielded by this calculation as the ideal of exactness for certain measurements.

The feeling of something *queer* here comes from a misunderstanding. The kind of misunderstanding that is produced by a thumb-catching of the intellect—to which I want to call a halt.

The objection that 'the finite cannot grasp the infinite' is *really* directed against the idea of a psychological act of grasping or understanding.

Or imagine that we simply say: "This force corresponds to the attraction of an endless row of marbles which we have arranged in such-and-such a way and which attract the body according to such-and-such a law of attraction". Or again: "Calculate the force which der Beschaffenheit, auf einen Körper ausübt!"—Dieser Befehl hat doch gewiss Sinn. Eine bestimmte Rechnung ist beschrieben.

Wie wäre es mit dieser Aufgabe: "Berechne das Gewicht einer Säule von so vielen aufeinanderliegenden Platten, als es Kardinalzahlen gibt; die unterste Platte wiegt 1 kg, jede höhere immer die Hälfte der vorhergehenden."

Die Schwierigkeit ist *nicht* die, daß wir uns keine Vorstellung machen können. Es ist leicht genug sich irgend eine Vorstellung einer unendlichen Reihe, z.B., zu machen. Es fragt sich: was nützt uns die Vorstellung.

Denke dir unendliche Zahlen in einem Märchen gebraucht. Die Zwerge haben soviele Goldstücke aufeinander getürmt als es Kardinalzahlen gibt—etc. Was in diesem Märchen vorkommen kann, muß doch Sinn haben.—

7. Denke dir die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie auf die Mathematik von einem Satiriker erfunden worden.—Später hätte man dann einen vernünftigen Sinn gesehen und sie in die Mathematik einbezogen. (Denn wenn der eine sie als das Paradies der Mathematiker ansehen kann, warum nicht ein andrer als einen Scherz?)

Die Frage ist: ist sie nun als Scherz nicht auch offenbar Mathematik?—

Und warum ist sie offenbar Mathematik?—Weil sie ein Zeichenspiel nach Regeln ist?

Werden hier nicht doch offenbar Begriffe gebildet—auch wenn man sich über deren Anwendung nicht im Klaren ist?

Aber wie kann man einen Begriff haben und sich über seine Anwendung nicht klar sein?

8. Nimm die Konstruktion des Kräftepolygons: ist das nicht ein Stück angewandte Mathematik? und wo ist der Satz der *reinen* Mathematik der bei dieser graphischen Berechnung zu Hülfe genommen wird? Ist dies nicht ein Fall wie der des Stammes, welcher eine rechnerische Technik zum Zweck gewisser Vorhersagungen hat, aber keine Sätze der reinen Mathematik?

Die Rechnung, die zur Ausführung einer Zeremonie dient. Es werde z.B. nach einer bestimmten Technik aus dem Alter des Vaters und der Mutter und der Anzahl ihrer Kinder die Anzahl der Worte einer Segensformel abgeleitet, die auf das Haus der Familie anzuwenden ist. In einem Gesetz wie dem Mosaischen könnte man sich Rechenvorgänge beschrieben denken. Und könnte man sich nicht denken, daß das Volk, das diese zeremoniellen Rechenvorschriften besitzt, im praktischen Leben nie rechnet?

an endless row of marbles of such-and-such a kind exerts on the body". —It certainly makes sense to give such an order. It describes a particular calculation.

What about the following question: "Calculate the weight of a pillar composed of as many slabs lying on top of one another as there are cardinal numbers; the undermost slab weighs 1 kg., and every higher one weighs half of the one just below it".

The difficulty is *not* that we can't form an image. It is easy enough to form some kind of image of an endless row, for example. The question is what use the image is to us.

Imagine infinite numbers used in a fairy tale. The dwarves have piled up as many gold pieces as there are cardinal numbers—etc. What can occur in this fairy tale must surely make sense.—

7. Imagine set theory's having been invented by a satirist as a kind of parody on mathematics.—Later a reasonable meaning was seen in it and it was incorporated into mathematics. (For if one person can see it as a paradise of mathematicians, why should not another see it as a joke?)

The question is: even as a joke isn't it evidently mathematics?—

And why is it evidently mathematics?—Because it is a game with signs according to rules?

But isn't it evident that there are concepts formed here—even if we are not clear about their application?

But how is it possible to have a concept and not be clear about its application?

8. Take the construction of the polygon of forces: isn't that a bit of applied mathematics? And where is the proposition of *pure* mathematics which is invoked in connexion with this graphical calculation? Is this case not like that of the tribe which has a technique of calculating in order to make certain predictions, but no propositions of pure mathematics?

Calculation that belongs to the performance of a ceremony. For example, let the number of words in a form of blessing that is to be applied to a home be derived by a particular technique from the ages of the father and mother and the number of their children. We could imagine procedures of calculating described in such a law as the Mosaic law. And couldn't we imagine that the nation with these ceremonial prescriptions for calculating never calculated in practical life?

Dies wäre zwar ein *angewandtes* Rechnen, aber es würde nicht dem Zwecke einer Vorhersage dienen.

Wäre es ein Wunder, wenn die Technik des Rechnens eine Familie von Anwendungen hätte?!

9. Wie seltsam die Frage ist, ob in der unendlichen Entwicklung von π die Figur ϕ (eine gewisse Anordnung von Ziffern, z.B. '770') vorkommen wird, sieht man erst, wenn man die Frage in einer ganz hausbackenen Weise zu stellen versucht: Menschen sind darauf abgerichtet worden, nach gewissen Regeln Zeichen zu setzen. Sie verfahren nun dieser Abrichtung gemäß und wir sagen es sei ein Problem, ob sie der gegebenen Regel folgend *jemals* die Figur ϕ anschreiben werden.

Was aber sagt der, der sagt, eines sei klar: man werde oder werde nicht, in der endlosen Entwicklung auf ϕ kommen?

Mir scheint, wer dies sagt, stellt schon selbst eine Regel, oder ein Postulat auf.

Wie, wenn man auf eine Frage hin erwiderte: 'Auf diese Frage gibt es bis jetzt noch keine Antwort'?

So könnte etwa der Dichter antworten, der gefragt wird, ob der Held einer Dichtung eine Schwester hat oder nicht—wenn er nämlich noch nicht darüber entschieden hat.

Die Frage—will ich sagen—verändert ihren Status, wenn sie entscheidbar wird. Denn ein Zusammenhang wird dann gemacht, der früher nicht *da war*.

Man kann von dem Abgerichteten fragen: 'Wie *wird* er die Regel für diesen Fall deuten?', oder auch 'wie *soll* er die Regel für diesen Fall deuten?' Wie aber, wenn über diese Frage keine Entscheidung getroffen wurde?—Nun, dann ist die Antwort nicht: 'er soll sie so deuten, daß ϕ in der Entwicklung vorkommt' oder: 'er soll sie so deuten, daß es nicht vorkommt', sondern: 'darüber ist noch nichts entschieden'.

So seltsam es klingt, die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl ist eine Weiterentwicklung der Mathematik.

Wir mathematisieren mit den Begriffen.—Und mit gewissen Begriffen mehr als mit andern.

Ich will sagen: Es *scheint*, als ob ein Entscheidungsgrund bereits vorläge; und er muß erst erfunden werden.

Käme das darauf hinaus, zu sagen: Man benutzt beim Denken über die gelernte Technik des Entwickelns das falsche Bild einer vollendeten

This would indeed be a case of *applied* calculation, but it would not serve the purpose of a prediction.

Would it be any wonder if the technique of calculating had a family of applications?

9. We only see how queer the question is whether the pattern ϕ (a particular arrangement of digits e.g. '770') will occur in the infinite expansion of π, when we try to formulate the question in a quite common or garden way: men have been trained to put down signs according to certain rules. Now they proceed according to this training and we say that it is a problem whether they will *ever* write down the pattern ϕ in following the given rule.

But what are you saying if you say that one thing is clear: either one will come on ϕ in the infinite expansion, or one will not?

It seems to me that in saying this you are yourself setting up a rule or postulate.

What if someone were to reply to a question: 'So far there is no such thing as an answer to this question'?

So, e.g., the poet might reply when asked whether the hero of his poem has a sister or not—when, that is, he has not yet decided anything about it.

The question—I want to say—changes its status, when it becomes decidable. For a connexion is made then, which formerly *was not there*.

Of someone who is trained we can ask 'How *will* he interpret the rule for this case?', or again 'How *ought* he to interpret the rule for this case?'—but what if no decision about this question has been made?—Well, then the answer is, not: 'he ought to interpret it in such a way that ϕ occurs in the expansion' or: 'he ought to interpret it in such a way that it does not occur', but: 'nothing has so far been decided about this'.

However queer it sounds, the further expansion of an irrational number is a further expansion of mathematics.

We do mathematics with concepts.—And with certain concepts more than with other ones.

I want to say: it *looks* as if a ground for the decision were already there; and it has yet to be invented.

Would this come to the same thing as saying: in thinking about the technique of expansion, which we have learnt, we use the false picture

Entwicklung (dessen, was man für gewöhnlich "Reihe" nennt) und wird dadurch gezwungen unbeantwortbare Fragen zu stellen?

Denn schließlich müßte sich doch jede Frage über die Entwicklung von $\sqrt{2}$ auf eine praktische Frage, die Technik des Entwickelns betreffend, bringen lassen.

Und es handelt sich hier natürlich nicht nur um den Fall der Entwicklung einer reellen Zahl oder überhaupt die Erzeugung mathematischer Zeichen, sondern um jeden analogen Vorgang, er sei ein Spiel, ein Tanz, etc., etc..

10. Wenn Einer uns den Satz vom ausgeschlossenen Dritten einhämmert, dem nicht zu entgehen sei,—so ist klar, daß mit seiner Frage etwas nicht in Ordnung ist.

Wenn einer den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aufstellt, so legt er uns gleichsam zwei Bilder zur Auswahl vor und sagt, eins müsse der Tatsache entsprechen. Wie aber wenn es fraglich ist, ob sich die Bilder hier anwenden lassen?

Und wer da von der endlosen Entwicklung sagt, sie müsse die Figur ϕ enthalten oder sie nicht enthalten, zeigt uns sozusagen das Bild einer in die Ferne verlaufenden unübersehbaren Reihe.

Wie aber, wenn das Bild in weiter Ferne zu flimmern anfinge?

11. Von einer unendlichen Reihe zu sagen, sie enthielte eine bestimmte Figur *nicht*, hat nur unter ganz speziellen Bedingungen Sinn.

Das heißt: Man hat diesem Satz für gewisse Fälle Sinn gegeben.

Ungefähr den: Es ist im *Gesetz* dieser Reihe, keine Figur . . . zu enthalten.

Ferner: So wie ich die Entwicklung weiterrechne, leite ich neue Gesetze ab, denen die Reihe folgt.

"Nun gut,—so können wir sagen: 'Es muß entweder im Gesetz der Reihe liegen, daß die Figur vorkommt, oder das Gegenteil'." Aber ist das so?—"Nun, *determiniert* das Entwicklungsgesetz die Reihe denn nicht vollkommen? Und wenn es das tut, keine Zweideutigkeiten läßt, dann muß es, implizite *alle* Fragen die Struktur der Reihe betreffend entscheiden."—Du denkst da an die endlichen Reihen.

"Aber es sind doch alle Glieder der Reihe vom 1sten bis zum 1000sten, bis zum 10^{10}-ten und so fort, bestimmt; also sind doch *alle* Glieder bestimmt." Das ist richtig, wenn es heißen soll, es sei nicht of a completed expansion (of what is ordinarily called a "row") and this forces us to ask unanswerable questions?

For after all in the end every question about the expansion of $\sqrt{2}$ must be capable of formulation as a practical question concerning the technique of expansion.

And what is in question here is of course not merely the case of the expansion of a real number, or in general the production of mathematical signs, but every analogous process, whether it is a game, a dance, etc., etc..

10. When someone hammers away at us with the law of excluded middle as something which cannot be gainsaid, it is clear that there is something wrong with his question.

When someone sets up the law of excluded middle, he is as it were putting two pictures before us to choose from, and saying that one must correspond to the fact. But what if it is questionable whether the pictures can be applied here?

And if you say that the infinite expansion must contain the pattern ϕ or not contain it, you are so to speak shewing us the picture of an unsurveyable series reaching into the distance.

But what if the picture began to flicker in the far distance?

11. To say of an unending series that it does *not* contain a particular pattern makes sense only under quite special conditions.

That is to say: this proposition has been given a sense for certain cases.

Roughly, for those where it is in the *rule* for this series, not to contain the pattern. . . .

Further: when I calculate the expansion further, I am deriving new rules which the series obeys.

"Good,—then we can say: 'It must either reside in the rule for this series that the pattern occurs, or the opposite'." But is it like that?—"Well, doesn't the rule of expansion *determine* the series completely? And if it does so, if it allows of no ambiguity, then it must implicitly determine *all* questions about the structure of the series."—Here you are thinking of finite series.

"But surely all members of the series from the 1st up to 1,000th, up to the 10^{10}-th and so on, are determined; so surely *all* the members are determined." That is correct if it is supposed to mean that it is not etwa das so-und-so-vielte *nicht* bestimmt. Aber du siehst ja, daß *das* dir keinen Aufschluß darüber gibt, ob eine Figur in der Reihe erscheinen wird (wenn sie soweit nicht erschienen ist). *Wir sehen also*, daß wir ein irreführendes *Bild* gebrauchen.

Willst du mehr über die Reihe wissen, so mußt du, sozusagen in eine andere Dimension (gleichsam wie aus der Linie in eine sie umgebende Ebene) gehen.—Aber ist die Ebene nicht eben *da*, so wie die Linie, und nur zu *erforschen*, wenn man wissen will, wie es sich verhält?

Nein, die Mathematik dieser weitern Dimension muß so gut erfunden werden, wie jede Mathematik.

In einer Arithmetik, in der man nicht weiter als 5 zählt, hat die Frage, wieviel $4 + 3$ ist, noch keinen Sinn. Wohl aber kann das Problem existieren, dieser Frage einen Sinn zu geben. Das heißt: die Frage hat *so wenig* Sinn, wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, auf sie angewendet.

12. Man meint in dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten schon etwas Festes zu haben, was jedenfalls nicht in Zweifel zu ziehen ist. Während in Wahrheit diese Tautologie einen ebenso schwankenden Sinn (wenn ich so sagen darf) hat, wie die Frage, ob p oder $\sim p$ der Fall ist.

Denke, ich fragte: Was meint man damit "die Figur . . . kommt in dieser Entwicklung vor"? So wird man antworten: "Du *weißt* doch was das heißt. Sie kommt vor, wie die Figur . . . in der Entwicklung tatsächlich vorkommt"—Also *so* kommt sie vor?—Aber *wie* ist das?

Denke dir, man sagte: "Entweder sie kommt so vor, oder sie kommt nicht so vor"!

"Aber verstehst du denn wirklich nicht, was gemeint ist?!"—Aber kann ich nicht glauben, ich verstehe es, und mich irren?—

Wie weiß ich denn, was es heißt: die Figur . . . komme in der Entwicklung vor? Doch durch Beispiele—die mir zeigen, wie das ist, wenn. . . . Diese Beispiele zeigen mir aber nicht, wie es ist, wenn die Figur in der Entwicklung vorkommt!

Könnte man nicht sagen: Wenn ich wirklich ein Recht hätte zu sagen, diese Beispiele lehren mich, wie es ist, wenn die Figur in der Entwicklung vorkommt, so müßten sie mir auch zeigen, was das Gegenteil des Satzes bedeutet.

13. Der allgemeine Satz, die Figur kommt in der Entwicklung nicht vor, kann nur ein *Gebot* sein.

Wie wenn man die mathematischen Sätze als Gebote ansieht und sie auch als solche ausspricht? "25^2 gebe 625".

the case that e.g. the so-and-so-many'th is *not* determined. But you can see that *that* gives you no information about whether a particular pattern is going to appear in the series (if it has not appeared so far). *And so we can see* that we are using a misleading *picture*.

If you want to know more about the series, you have, so to speak, to get into another dimension (as it were from the line into a surrounding plane).—But then isn't the plane *there*, just like the line, and merely something to be *explored*, if one wants to know what the facts are?

No, the mathematics of this further dimension has to be invented just as much as any mathematics.

In an arithmetic in which one does not count further than 5 the question what $4 + 3$ makes doesn't yet make sense. On the other hand the problem may very well exist of giving this question a sense. That is to say: the question makes *no more* sense than does the law of excluded middle in application to it.

12. In the law of excluded middle we think that we have already got something solid, something that at any rate cannot be called in doubt. Whereas in truth this tautology has just as shaky a sense (if I may put it like that), as the question whether p or $\sim p$ is the case.

Suppose I were to ask: what is meant by saying "the pattern . . . occurs in this expansion"? The reply would be: "you surely *know* what it means. It occurs as the pattern . . . in fact occurs in the expansion."—So *that* is the way it occurs?—But *what way* is that?

Imagine it were said: "Either it occurs in that way, or it does not occur in that way"!

"But don't you really understand what is meant?"—But may I not believe I understand it, and be wrong?—

For how do I know what it means to say: the pattern . . . occurs in the expansion? Surely by way of examples—which shew me what it is like for. . . . But these examples do not shew me what it is like for this pattern to occur in the expansion!

Might one not say: if I really had a right to say that these examples tell me what it is like for the pattern to occur in the expansion, then they would also have to shew me what the opposite means.

13. The general proposition that that pattern does not occur in the expansion can only be a *commandment*.

Suppose we look at mathematical propositions as commandments, and even utter them as such? "Let 25^2 be 625."

Nun—ein Gebot hat eine innere und eine äußere Verneinung.

Die Symbole "$(x).\phi x$" und "$(\exists x).\phi x$" sind wohl nützlich in der Mathematik, wenn man im übrigen die Technik der Beweise der Existenz oder Nicht-Existenz kennt, auf den sich die Russellschen Zeichen *hier* beziehen. Wird dies aber offen gelassen, so sind diese Begriffe der alten Logik äußerst irreführend.

Wenn Einer sagt: "Aber du weißt doch was 'die Figur kommt in der Entwicklung vor' bedeutet, nämlich *das*"—und zeigt auf einen Fall des Vorkommens,—so kann ich nur erwidern, daß was er mir zeigt, *verschiedene* Fakten illustrieren kann. Man kann daher nicht sagen, ich wisse was der Satz heißt, weil ich weiß, daß er ihn in diesem Fall gewiß anwenden wird.

Das Gegenteil von "es besteht ein Gesetz, daß p" ist nicht: "es besteht ein Gesetz, daß $\sim p$". Drückt man aber das erste durch P, das andere durch $\sim P$ aus, so wird man in Schwierigkeiten geraten.

14. Wie, wenn den Kindern beigebracht wird, die Erde sei eine unendliche Ebene; oder Gott habe eine unendliche Reihe von Sternen geschaffen; oder ein Stern fliege in einer geraden Linie gleichförmig immer weiter und weiter ohne je aufzuhören.

Seltsam: wenn man so etwas als selbstverständlich, gleichsam ganz ruhig, aufnimmt, so verliert es alles Paradoxe. Es ist als sagte mir jemand: Beruhige dich, diese Reihe oder Bewegung läuft fort ohne je aufzuhören. Wir sind sozusagen der Mühe überhoben an ein Ende zu denken.

'Wir werden ein Ende nicht in Betracht ziehen' (we won't bother about an end).

Man könnte auch sagen: 'für uns ist die Reihe endlos'.

'Wir werden uns um ein Ende der Reihe nicht bekümmern; für uns ist es immer unabsehbar.'

15. Man kann die rationalen Zahlen nicht *abzählen*, weil man sie nicht zählen kann, aber man kann mittels der rationalen Zahlen zählen—so nämlich wie mit den Kardinalzahlen. Die schielende Ausdrucksweise gehört mit zu dem ganzen System der Vorspiegelung, daß wir mit dem neuen Apparat die unendlichen Mengen mit der gleichen Sicherheit behandeln, wie bis dahin nur die endlichen.

'Abzählbar' dürfte es nicht heißen, dagegen hätte es Sinn zu sagen 'numerierbar.' Und dieser Ausdruck läßt auch eine Anwendung des Begriffs erkennen. Denn man kann zwar die rationalen Zahlen nicht abzählen wollen, wohl aber kann man ihnen Nummern zulegen wollen.

Now—a commandment has an internal and an external negation.

The symbols "$(x).\phi x$" and "$(\exists x).\phi x$" are certainly useful in mathematics so long as one is acquainted with the technique of the proofs of the existence or non-existence to which the Russellian signs *here* refer. If however this is left open, then these concepts of the old logic are extremely misleading.

If someone says: "But you surely know what 'this pattern occurs in the expansion' means, namely *this*"—and points to a case of occurring, —then I can only reply that what he shews me is capable of illustrating a *variety* of facts. For that reason I can't be said to know what the proposition means just from knowing that he will certainly use it in this case.

The opposite of "there exists a law that p" is not: "there exists a law that $\sim p$". But if one expresses the first by means of P, and the second by means of $\sim P$, one will get into difficulties.

14. Suppose children are taught that the earth is an infinite flat surface; or that God created an infinite number of stars; or that a star keeps on moving uniformly in a straight line, without ever stopping.

Queer: when one takes something of this sort as a matter of course, as it were in one's stride, it loses its whole paradoxical aspect. It is as if I were to be told: Don't worry, this series, or movement, goes on without ever stopping. We are as it were excused the labour of thinking of an end.

'We won't bother about an end.'

It might also be said: 'for us the series is infinite'.

'We won't worry about an end to this series; for us it is always beyond our ken.'

15. The rational numbers cannot be *enumerated*, because they cannot be counted—but one can count with them, as with the cardinal numbers. That squint-eyed way of putting things goes with the whole system of pretence, namely that by using the new apparatus we deal with infinite sets with the same certainty as hitherto we had in dealing with finite ones.

It should not have been called 'denumerable', but on the other hand it would have made sense to say 'numberable'. And this expression also informs us of an application of the concept. For one cannot set out to enumerate the rational numbers, but one can perfectly well set out to assign numbers to them.

16. Der Vergleich mit der Alchemie liegt nahe. Man könnte von einer Alchemie in der Mathematik reden.

Charakterisiert schon das die mathematische Alchemie, daß die mathematischen Sätze als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden,—also die Mathematik als die Erforschung dieser Gegenstände?

In einem gewissen Sinn kann man in der Mathematik darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Mathematik ihnen erst die Bedeutung gibt.

Es ist das Typische der Erscheinung von welcher ich rede, daß das *Mysteriöse* an irgendeinem mathematischen Begriff nicht *sofort* als irrige Auffassung, als Fehlbegriff gedeutet wird; sondern als etwas, was jedenfalls nicht zu verachten, vielleicht sogar eher zu respektieren ist.

Alles was ich machen kann, ist einen leichten Weg aus dieser Unklarheit und dem Glitzern der Begriffe zeigen.

Man kann seltsamerweise sagen, daß an allen diesen glänzenden Begriffsbildungen ein sozusagen solider Kern ist. Und ich möchte sagen, daß der es ist, der sie zu mathematischen Produkten macht.

Man könnte sagen: Was du siehst schaut freilich mehr wie eine glänzende Lufterscheinung aus; aber sieh sie von einer anderen Seite an und du siehst den soliden Körper, der nur von jener Richtung wie ein Glanz ohne körperliches Substrat aussieht.

17. 'Die Figur ist in der Reihe oder sie ist nicht in der Reihe' heißt: entweder schaut die Sache so aus oder sie schaut nicht so aus.

Wie weiß man, was das Gegenteil des Satzes "ϕ kommt in der Reihe vor", oder auch des Satzes "ϕ kommt nicht in der Reihe vor" bedeutet? Diese Frage klingt unsinning, hat aber doch einen Sinn.

Nämlich: wie weiß ich, daß ich den Satz, "ϕ kommt in der Reihe vor", verstehe?

Es ist wahr, ich kann Beispiele geben für den Gebrauch solcher Aussagen, und auch der gegenteiligen. Und sie sind Beispiele dafür, daß es eine Regel gibt, die das Vorkommen in einer bestimmten Zone, oder einer Reihe von Zonen, vorschreibt; oder bestimmt, daß dies Vorkommen ausgeschlossen ist.

Wenn "du tust es" heißt: du mußt es tun, und "du tust es nicht" heißt: du darfst es nicht tun—dann ist "du tust es, oder du tust es nicht" nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

16. The comparison with alchemy suggests itself. We might speak of a kind of alchemy in mathematics.

Is it the earmark of this mathematical alchemy that mathematical propositions are regarded as statements about mathematical objects,—and so mathematics as the exploration of these objects?

In a certain sense it is not possible to appeal to the meaning of the signs in mathematics, just because it is only mathematics that gives them their meaning.

What is typical of the phenomenon I am talking about is that a *mysteriousness* about some mathematical concept is not *straight away* interpreted as an erroneous conception, as a mistake of ideas; but rather as something that is at any rate not to be despised, is perhaps even rather to be respected.

All that I can do, is to shew an easy escape from this obscurity and this glitter of the concepts.

Strangely, it can be said that there is so to speak a solid core to all these glistening concept-formations. And I should like to say that that is what makes them into mathematical productions.

It might be said: what you see does of course look more like a gleaming Fata Morgana; but look at it from another quarter and you can see the solid body, which only looks like a gleam without a corporeal substrate when seen from that other direction.

17. 'The pattern is in the series or it is not in the series' means: either the thing looks like *this* or it does not look like this.

How does one know what is meant by the opposite of the proposition "ϕ occurs in the series", or even of the proposition "ϕ does not occur in the series"? This question sounds like nonsense, but does make sense all the same.

Namely: how do I know that I understand the proposition "ϕ occurs in this series"?

True, I can give examples illustrating the use of such statements, and also of the opposite ones. And they are examples of there being a rule prescribing the occurrence in a definite region or series of regions, or determining that such an occurrence is excluded.

If "you do it" means: you must do it, and "you do not do it" means: you must not do it—then "Either you do it, or you do not" is not the law of excluded middle.

Jeder fühlt sich ungemütlich bei dem Gedanken, ein Satz könne aussagen, in der endlosen Reihe komme das und das nicht vor—dagegen hat es gar nichts befremdliches, ein Befehl sage: in dieser Reihe dürfe, so weit sie auch fortgesetzt werde, das nicht vorkommen.

Woher aber dieser Unterschied zwischen: "soweit du auch gehst, wirst du das nie finden"—und "soweit du auch gehst, darfst du das nie tun"?

Auf jenen Satz kann man fragen: "wie kann man so etwas wissen?", aber nichts analoges gilt vom Befehl.

Die Aussage scheint sich zu übernehmen, der Befehl aber gar nicht.

Kann man sich denken, daß alle mathematischen Sätze im Imperativ ausgesprochen würden? Zum Beispiel: "10×10 sei 100!".

Und wer nun sagt: "Es sei so, oder es sei nicht so", der spricht nicht den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus—wohl aber eine *Regel*. (Wie ich es schon weiter oben einmal gesagt habe.)

18. Aber ist das wirklich ein Ausweg aus der Schwierigkeit? Denn wie verhält es sich dann mit allen andern mathematischen Sätzen, sagen wir '$25^2 = 625$'; gilt für diese nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten *innerhalb* der Mathematik?

Wie wendet man den Satz vom ausgeschlossenen Dritten an?

"Es gibt entweder eine Regel, die es verbietet, oder eine, die es gebietet."

Angenommen, es gibt keine Regel, die das Vorkommen verbietet,—warum soll es dann eine geben, die es gebietet?

Hat es Sinn zu sagen: "Es gibt zwar keine Regel die das Vorkommen verbietet, die Figur kommt aber tatsächlich doch nicht vor"?—Und wenn das nun keinen Sinn hat, wie kann das Gegenteil davon Sinn haben, nämlich, die Figur komme vor?

Nun, wenn ich sage, sie kommt vor, schwebt mir das Bild der Reihe vor, von ihrem Anfang bis zu jener Figur—wenn ich aber sage, die Figur komme *nicht* vor, so nützt mir kein solches Bild, und die Bilder gehen mir aus.

Wie, wenn die Regel sich beim Gebrauch unmerklich biegen würde? Ich meine so, daß ich von verschiedenen Räumen sprechen könnte, in denen ich sie gebrauche.

Das Gegenteil von "es darf nicht vorkommen" heißt "es darf vorkommen". Für ein endliches Stück der Reihe aber scheint das Gegenteil von "es darf in ihm nicht vorkommen" zu sein: "es muß darin vorkommen".

Das Seltsame in der Alternative "ϕ kommt in der unendlichen Reihe vor, oder es kommt nicht vor" ist, daß wir uns die beiden Möglich-

Everyone feels uncomfortable at the thought that a proposition can state that such-and-such does not occur in an infinite series—while on the other hand there is nothing startling about a command's saying that this must not occur in this series however far it is continued.

But what is the source of this distinction between: "however far you go you will never find this"—and "however far you go you must never do this"?

On hearing the proposition one can ask: "how can we know anything like that?" but nothing analogous holds for the command.

The statement seems to overreach itself, the command not at all.

Can we imagine all mathematical propositions expressed in the imperative? For example: "Let 10 × 10 be 100".

And if you now say: "Let it be like this, or let it not be like this", you are not pronouncing the law of excluded middle—but you are pronouncing a *rule*. (As I have already said above.)

18. But is this really a way out of the difficulty? For how about all the other mathematical propositions, say '$25^2 = 625$'; isn't the law of excluded middle valid for these *inside* mathematics?

How is the law of excluded middle applied?

"Either there is a rule that prescribes it, or one that forbids it."

Assuming that there is no rule forbidding the occurrence,—why is there then supposed to be one that prescribes it?

Does it make sense to say: "While there isn't any rule forbidding the occurrence, as a matter of fact the pattern does not occur"?—And if this does not make sense, how can the opposite make sense, namely, that the pattern does occur?

Well, when I say it occurs, a picture of the series from its beginning up to the pattern floats before my mind—but if I say that the pattern does *not* occur, then no such picture is of any use to me, and my supply of pictures gives out.

What if the rule should bend in use without my noticing it? What I mean is, that I might speak of different spaces in which I use it.

The opposite of "it must not occur" is "it can occur". For a finite segment of the series, however, the opposite of "it must not occur in it" seems to be: "it must occur in it".

The queer thing about the alternative "ϕ occurs in the infinite series or it does not", is that we have to imagine the two possibilities indivikeiten einzeln vorstellen müssen, daß wir nach einer Vorstellung für jedes besonders suchen, und daß nicht wie sonst *eine* für den negativen und für den positiven Fall zureicht.

19. Wie weiß ich, daß der allgemeine Satz "Es gibt . . ." hier Sinn hat? Nun, wenn er zu einer Mitteilung über die Technik des Entwickelns in einem Sprachspiel verwendet werden kann.

Eine Mitteilung heißt: "es darf nicht vorkommen"—d.h.: wenn es vorkommt, hast du falsch gerechnet.

Eine heißt: "es darf vorkommen", d.h., es existiert so ein Verbot nicht. Eine: "es muß in der und der Region (an dieser Stelle immer in diesen Regionen) vorkommen". Das Gegenteil davon aber scheint zu sein: "es darf dort und dort nicht vorkommen"—statt "es *muß* dort nicht vorkommen".

Wie aber, wenn man die Regel gäbe, daß, z.B., überall, wo die Bildungsregel von π 4 ergibt, statt der 4 auch eine beliebige andere Ziffer gesetzt werden kann?

Zieh auch die Regel in Betracht, die an gewissen Stellen eine Ziffer verbietet, aber im übrigen die Wahl offen läßt.

Ist es nicht so: Die Begriffe in den mathematischen Sätzen von den unendlichen Dezimalbrüchen sind nicht Begriffe von Reihen, sondern von der unbegrenzten Technik des Entwickelns von Reihen?

Wir lernen eine endlose Technik: D.h., es wird uns etwas vorgemacht, wir machen es nach; es werden uns Regeln gesagt und wir machen Übungen in ihrer Befolgung; es wird dabei vielleicht auch ein Ausdruck wie "u.s.f. ad inf." gebraucht, aber es ist damit von keiner riesenhaften Ausdehnung die Rede.

Das sind die Fakten. Und was heißt es nun: "ϕ kommt entweder in der Entwicklung vor, oder es kommt nicht vor"?

20. Aber heißt das nun, daß es kein Problem gibt: "Kommt die Figur ϕ in dieser Entwicklung vor?"?—Wer das fragt, fragt nach einer Regel, das Vorkommen von ϕ betreffend. Und die Alternative des Existierens oder Nichtexistierens so einer Regel ist jedenfalls keine mathematische.

Erst innerhalb einem erst zu errichtenden mathematischen Gebäude läßt die Frage eine *mathematische* Entscheidung zu, und wird somit zur Forderung einer solchen Entscheidung.

21. Ist denn das Unendliche nicht wirklich—kann ich nicht sagen: "diese zwei Kanten der Platte schneiden sich im Unendlichen"?

Nicht "der Kreis hat diese Eigenschaft weil, er durch die beiden unendlich fernen Punkte . . . geht"; sondern: "die Eigenschaften des Kreises lassen sich aus dieser (merkwürdigen) Perspektive betrachten".

dually, that we look for a distinct idea of each, and that *one* is not adequate for the negative and for the positive case, as it is elsewhere.

19. How do I know that the general proposition "There is . . ." makes sense here? Well, if it can be used to tell something about the technique of expansion in a language game.

In *one* case what we are told is: "it must not occur"—i.e.: if it occurs you calculated wrong.

In one case what we are told is: "it can occur", i.e., no such interdict exists. In another: "it must occur in such-and-such a region (always in this place in these regions)". But the opposite of this seems to be: "it must not occur in such-and-such places"—instead of "it *need* not occur there".

But what if the rule were given that, e.g., everywhere where the formation rule for π yields 4, any arbitrary digit other than 4 can be put in its place?

Consider also the rule which forbids one digit in certain places, but otherwise leaves the choice open.

Isn't it like this? The concepts of infinite decimals in mathematical propositions are not concepts of series, but of the unlimited technique of expansion of series.

We learn an endless technique: that is to say, something is done for us first, and then we do it; we are told rules and we do exercises in following them; perhaps some expression like "and so on *ad inf.*" is also used, but what is in question here is not some gigantic extension.

These are the facts. And now what does it mean to say: "ϕ either occurs in the expansion, or does not occur"?

20. But does this mean that there is no such problem as: "Does the pattern ϕ occur in this expansion?"?—To ask this is to ask for a rule regarding the occurrence of ϕ. And the alternative of the existence or non-existence of such a rule is at any rate not a mathematical one.

Only within a mathematical structure which has yet to be erected does the question allow of a *mathematical* decision, and at the same time become a demand for such a decision.

21. Then is infinity not actual—can I not say: "these two edges of the slab meet at infinity"?

Say, not: "the circle has this property because it passes through the two points at infinity . . ."; but: "the properties of the circle can be regarded in this (extraordinary) perspective".

Es ist wesentlich eine Perspektive, und eine weit hergeholte. (Womit kein Tadel ausgesprochen ist.) Aber es muß immer ganz klar sein, *wie weit* hergeholt diese Anschauungsart ist. Denn sonst ist ihre eigentliche *Bedeutung* im Dunkeln.

22. Was heißt das: "der Mathematiker weiß nicht was er tut", oder "er weiß was er tut"?

23. Kann man unendliche Vorhersagungen machen?—Nun, warum soll man nicht z.B. das Trägheitsgesetz eine solche nennen? Oder den Satz, daß ein Komet eine Parabel beschreibt?

In gewissem Sinne wird freilich ihre Unendlichkeit nicht sehr ernst genommen.

Wie ist es nun mit einer *Vorhersagung*: daß, wer π entwickelt, so weit er auch gehen mag, nie auf die Figur ϕ stoßen wird?—Nun, man könnte sagen, daß dies entweder eine *unmathematische* Vorhersagung ist, oder aber eine mathematische Regel.

Jemand, der $\sqrt{2}$ entwickeln gelernt hat, geht zu einer Wahrsagerin, und sie weissagt ihm, daß, soweit er auch die $\sqrt{2}$ entwickeln mag, er nie zu einer Figur . . . gelangen wird.—Ist ihre Weissagung ein mathematischer Satz? Nein.—Außer sie sagt: "Wenn du immer richtig entwickeln wirst, kommst du nie . . . ". Aber ist das noch eine Vorhersage?

Es scheint nun, daß so eine *Vorhersage* des richtig Entwickelten denkbar wäre und sich von einem mathematischen Gesetz, daß es sich so und so verhalten *muß*, unterschiede. So daß es in der mathematischen Entwicklung einen Unterschied gäbe zwischen dem, was tatsächlich so herauskommt—gleichsam zufällig—und dem, was herauskommen muß.

Wie soll man es entscheiden, ob eine unendliche Voraussage Sinn hat?

So jedenfalls nicht, indem man sagt: "ich bin sicher, ich *meine* etwas, wenn ich sage . . . ".

Auch ist wohl nicht so sehr die Frage, ob die Voraussage irgendeinen Sinn hat, als: was für eine Art von Sinn sie hat. (Also, in welchen Sprachspielen sie vorkommt.)

24. "Der unheilvolle Einbruch" der Logik in die Mathematik.

In dem so vorbereiteten Feld ist *das* ein Existenzbeweis.

Das Verderbliche der logischen Technik ist, daß sie uns die spezielle mathematische Technik vergessen läßt. Während die logische Technik

It is essentially a perspective, and a far-fetched one. (Which does not express any reproach.) But it must always be quite clear *how far*-fetched this way of looking at it is. For otherwise its real *significance* is dark.

22. What does it mean to say: "the mathematician does not know what he is doing", or: "he knows what he is doing"?

23. Can one make infinite predictions?—Well, why should one not for example call the law of inertia one? Or the proposition that a comet describes a parabola?

In a certain sense of course the infinity of the prediction is not taken very seriously.

Now what about a *prediction* that if you expand π, however far you go, you will never come across the pattern ϕ?—Well, we could say that this is either a *non-mathematical* prediction, or alternatively a mathematical rule.

Someone who has learned to expand $\sqrt{2}$ goes to a fortune-teller, and she tells him that however far he may expand $\sqrt{2}$ he will never arrive at the pattern. . . .—Is her soothsaying a mathematical proposition? No.—Unless she says: "If you always expand correctly you will never reach it". But is that still a prediction?

Now it looks as if such a *prediction* of the correct expansion were imaginable and were distinct from a mathematical law that it *must* be thus and thus. So that in the mathematical expansion there would be a distinction between what as a matter of fact comes out like this—as it were accidentally—and what must come out.

How is it to be decided whether an infinite prediction makes sense?

At any rate not by one's saying: "I am certain I *mean* something when I say . . .".

Besides, the question is not so much whether the prediction makes some kind of sense, as: what kind of sense it makes. (That is, in what language games it occurs.)

24. "The disastrous invasion" of mathematics by logic.

In a field that has been prepared in this way *this* is a proof of existence.

The harmful thing about logical technique is that it makes us forget the special mathematical technique. Whereas logical technique is only nur eine Hilfstechnik in der Mathematik ist. Z.B. gewisse Verbindungen zwischen anderen Techniken herstellt.

Es ist beinahe als wollte man sagen, daß das Tischlern im Leimen besteht.

25. Der Beweis überzeugt dich davon, daß es eine Wurzel der Gleichung gibt (ohne dir eine Ahnung zu geben *wo*)——wie weißt du, daß du den Satz verstehst, es gebe eine Wurzel? Wie weißt du daß du wirklich von etwas überzeugt bist? Du magst davon überzeugt sein, daß sich die Anwendung des bewiesenen Satzes finden lassen wird. Aber du verstehst ihn nicht, solange du sie nicht gefunden hast.

Wenn ein Beweis allgemein beweist, *es gebe* eine Wurzel, so kommt alles darauf an, in welcher Form er das beweist. Was es ist, das hier zu diesem Wortausdruck führt, der ein bloßer Schemen ist und die *Hauptsache* verschweigt. Während er den Logikern nur die Nebensache zu verschweigen scheint.

Das mathematisch Allgemeine steht zum mathematisch Besonderen nicht in dem Verhältnis wie sonst das Allgemeine zum Besondern.

Alles was ich sage, kommt eigentlich darauf hinaus, daß man einen Beweis genau kennen und ihm Schritt für Schritt folgen kann, und dabei doch, was bewiesen wurde, nicht *versteht*.

Und das hängt wieder damit zusammen, daß man einen mathematischen Satz grammatisch richtig bilden kann ohne seinen Sinn zu verstehen.

Wann versteht man ihn nun?—Ich glaube: wenn man ihn anwenden kann.

Man könnte vielleicht sagen: wenn man ein klares Bild von seiner Anwendung hat. Dazu aber genügt es nicht, daß man ein klares Bild mit ihm verbindet. Vielmehr wäre besser gewesen, zu sagen: wenn man eine klare Übersicht von seiner Anwendung hat. Und auch das ist schlecht, denn es handelt sich nur darum, daß man die Anwendung nicht dort vermutet, wo sie nicht ist; daß man sich von der Wortform des Satzes nicht täuschen läßt.

Wie kommt es aber nun, daß man einen Satz, oder Beweis, auf diese Weise nicht verstehen, oder mißverstehen kann? Und was ist dann nötig um das Verständnis herbeizuführen?

Es gibt da, glaube ich, Fälle in denen Einer den Satz (oder Beweis) zwar anwenden kann, über die Art der Anwendung aber nicht klar Rechenschaft zu geben im Stande ist. Und der Fall, daß er den Satz auch nicht anzuwenden weiß. (Multiplikativ-Axiom.)

an auxiliary technique in mathematics. For example it sets up certain connexions between different techniques.

It is almost as if one tried to say that cabinet-making consisted in glueing.

25. A proof convinces you that there is a root of an equation (without giving you any idea *where*)——how do you know that you understand the proposition that there is a root? How do you know that you are really convinced of anything? You may be convinced that the application of the proved proposition will turn up. But you do not understand the proposition so long as you have not found the application.

When a proof proves in a general way that *there is* a root, then everything depends on the form in which it proves this. On what it is that here leads to this verbal expression, which is a mere shadow, and keeps mum about *essentials*. Whereas to logicians it seems to keep mum only about incidentals.

The mathematical general does not stand in the same relation to the mathematical particular as elsewhere the general to the particular.

Everything that I say really amounts to this, that one can know a proof thoroughly and follow it step by step, and yet at the same time not *understand* what it was that was proved.

And this in turn is connected with the fact that one can form a mathematical proposition in a grammatically correct way without understanding its meaning.

Now when does one understand it?—I believe: when one can apply it.

It might perhaps be said: when one has a clear picture of its application. For this, however, it is not enough to connect a clear picture with it. It would rather have been better to say: when one commands a clear view of its application. And even that is bad, for the matter is simply one of not imagining that the application is where it is not; of not being deceived by the verbal form of the proposition.

But how does it come about that one can fail to understand, or can misunderstand, a proposition or proof in this way? And what is then necessary in order to produce understanding?

There are here, I believe, cases in which someone can indeed apply the proposition (or proof), but is unable to give a clear account of the kind of application. And the case in which he is even unable to apply the proposition. (Multiplicative axiom.)

Wie ist es in der Beziehung mit $0 \times 0 = 0$?

Man möchte sagen, das Verständnis eines mathematischen Satzes sei nicht durch seine Wortform guarantiert, wie im Fall der meisten nicht-mathematischen Sätze. Das heißt—so scheint es—daß der Wortlaut das *Sprachspiel* nicht bestimmt, in welchem der Satz funktioniert.

Die logische Notation verschluckt die Struktur.

26. Um zu sehen, wie man etwas 'Existenzbeweis' nennen kann was keine Konstruktion des Existierenden zuläßt, denke an die verschiedenartigen Bedeutungen des Wortes "wo". (Z.B. des topologischen und des metrischen.)

Es kann ja der Existenzbeweis nicht nur den Ort des 'Existierenden' unbestimmt lassen, sondern es braucht auf einen solchen Ort gar nicht anzukommen.

D.h.: Wenn der bewiesene Satz lautet "es gibt eine Zahl, für die . . ." so muß es keinen Sinn haben zu fragen, "und welches ist diese Zahl?", oder zu sagen, "und diese Zahl ist . . . ".

27. Ein Beweis, daß 777 in der Entwicklung von π vorkommt, der nicht zeigt, wo, müßte diese Entwicklung von einem ganz neuen Standpunkt ansehen, sodaß er etwa Eigenschaften von Regionen der Entwicklung zeigte, von denen wir nur wüßten, daß sie sehr weit draußen liegen. Es schwebt nur dabei vor, daß man sehr weit draußen in π sozusagen eine dunkle Zone von unbestimmter Länge annehmen müßte, wo unsere Rechenhilfsmittel nicht mehr verläßlich sind, und noch weiter draußen dann eine Zone, wo man auf *andere* Weise wieder etwas sehen kann.

28. Vom Beweis durch reductio ad absurdum kann man sich immer vorstellen, er werde im Argument mit jemandem gebraucht, der eine nicht-mathematische Behauptung aufstellt (etwa: er habe gesehen, daß *A* den *B* mit den und den Figuren matt gesetzt habe), die sich mathematisch widerlegen läßt.

Die Schwierigkeit, die man bei der reductio ad absurdum in der Mathematik empfindet ist die: Was geht bei diesem Beweis vor? Etwas mathematisch Absurdes, also Unmathematisches? Wie kann man—möchte man fragen—das mathematisch Absurde überhaupt nur annehmen? Daß ich das physikalisch Falsche annehmen und ad absurdum führen kann macht mir keine Schwierigkeiten. Aber wie das sozusagen Undenkbare denken?!

Der indirekte Beweis sagt aber: "Wenn du es *so* willst, darfst du *das* nicht annehmen: denn *da*mit wäre nur das Gegenteil dessen vereinbar, wovon du nicht abgehen willst".

How is it as regards $0 \times 0 = 0$?

One would like to say that the understanding of a mathematical proposition is not guaranteed by its verbal form, as is the case with most non-mathematical propositions. This means—so it appears—that the words don't determine the *language-game* in which the proposition functions.

The logical notation suppresses the structure.

26. In order to see how something can be called an 'existence-proof', though it does not permit a construction of what exists, think of the different meanings of the word "where". (For example the topological and the metrical.)

For it is not merely that the existence-proof can leave the place of the 'existent' undetermined: there need not be any question of such a place.

That is to say: when the proved proposition runs: "there is a number for which . . ." then it need not make sense to ask "and which number is it?", or to say "and this number is . . .".

27. A proof that 777 occurs in the expansion of π, without shewing where, would have to look at this expansion from a totally new point of view, so that it shewed e.g. properties of regions of the expansion about which we only knew that they lay very far out. Only the picture floats before one's mind of having to assume as it were a dark zone of indeterminate length very far on in π, where we can no longer rely on our devices for calculating; and then still further out a zone where in a *different* way we can once more see something.

28. We can always imagine proof by *reductio ad absurdum* used in argument with someone who puts forward a non-mathematical assertion (e.g. that he has seen a checkmate with such-and-such pieces) which can be mathematically refuted.

The difficulty which is felt in connexion with *reductio ad absurdum* in mathematics is this: what goes on in this proof? Something mathematically absurd, and hence unmathematical? How—one would like to ask—can one so much as assume the mathematically absurd at all? That I can assume what is physically false and reduce it *ad absurdum* gives me no difficulty. But how to think the—so to speak—unthinkable?!

What an indirect proof says, however, is: "If you want *this* then you cannot assume *that*: for only the opposite of what you do not want to abandon would be combinable with *that*".

29. Die geometrische Illustration der Analysis ist allerdings unwesentlich, nicht aber die geometrische Anwendung. Ursprünglich waren die geometrischen Illustrationen *Anwendungen der Analysis*. Wo sie aufhören, dies zu sein, können sie leicht gänzlich irreführen.

Hier haben wir dann die phantastische Anwendung. Die eingebildete Anwendung.

Die Idee des 'Schnittes' ist so eine gefährliche Illustration.

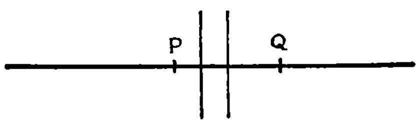
Nur soweit, als die Illustrationen auch Anwendungen sind, erzeugen sie nicht jenes gewisse Schwindelgefühl, das die Illustration erzeugt, im Moment, wo sie aufhört eine mögliche Anwendung zu sein; wo sie also dumm wird.

30. So könnte man Dedekinds Theorem ableiten, wenn, was wir irrationale Zahlen nennen *ganz unbekannt* wäre, wenn es aber eine Technik gäbe, die Stellen von Dezimalzahlen zu würfeln. Und dieses Theorem hätte dann seine Anwendung, auch wenn es die Mathematik der irrationalen Zahlen nicht gäbe. Es ist nicht, als sähen die Dedekindschen Entwicklungen alle besonderen reellen Zahlen schon voraus. Es *scheint* nur so, sobald man den Dedekindschen Kalkül mit den Kalkülen der besonderen reellen Zahlen vereinigt.

31. Man könnte fragen: Was könnte ein Kind von 10 Jahren am Beweis des Dedekindschen Satzes *nicht* verstehen?—Ist denn dieser Beweis nicht viel einfacher, als alle die Rechnungen, die das Kind beherrschen muß?—Und wenn nun jemand sagte: den tieferen Inhalt des Satzes kann es nicht verstehen—dann frage ich: wie kommt dieser Satz zu einem tiefen Inhalt?

32. Das Bild der Zahlengeraden ist ein absolut natürliches bis zu einem gewissen Punkt: nämlich soweit man es nicht zu einer allgemeinen Theorie der reellen Zahlen gebraucht.

33. Wenn du die *reellen* Zahlen in eine höhere und eine niedere Klasse teilen willst, so tu's erst einmal roh durch



zwei rationale Punkte P und Q. Dann halbiere PQ und entscheide, in welcher Hälfte (wenn nicht im Teilungspunkt) der Schnitt liegen soll; wenn z.B. in der unteren, halbiere diese und mache eine genauere Entscheidung; u.s.f..

29. The geometrical illustration of Analysis is indeed inessential; not, however, the geometrical application. Originally the geometrical illustrations were *applications of Analysis*. Where they cease to be this they can easily be wholly misleading.

What we have then is the imaginary application. The fanciful application.

The idea of a 'cut' is such a dangerous illustration.

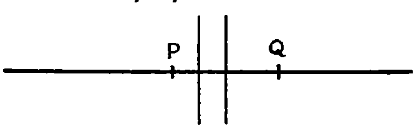
Only in so far as the illustrations are also applications do they avoid producing that special feeling of dizziness which the illustration produces in the moment at which it ceases to be a possible application; when, that is, it becomes stupid.

30. Dedekind's theorem could be derived, if what we call irrational numbers were *quite unknown*, but if there were a technique of deciding the places of decimals by throwing dice. And this theorem would then have its application even if the mathematics of irrational numbers did not exist. It is not as if Dedekind's expansions already foresaw all the special real numbers. It merely *looks* like that as soon as Dedekind's calculus is joined to the calculi of the special real numbers.

31. It might be asked: what is there about the proof of Dedekind's theorem that a child 10 years old could *not* understand?—For isn't this proof far simpler than all the calculations which the child has to master?—And if now someone were to say: it can't understand the deeper content of the proposition—then I ask: how does this proposition come to have a deep content?

32. The picture of the number line is an absolutely natural one up to a certain point; that is to say so long as it is not used for a general theory of real numbers.

33. If you want to divide the *real* numbers into an upper and lower class, then do it first crudely by means of



two rational points P and Q. Then halve PQ and decide in which half (if not at the point of division) the cut is supposed to lie; if for example in the lower one, halve this and make a more exact decision and so on.

Hast du ein Prinzip der unbegrenzten Fortsetzung, so kannst du von diesem Prinzip sagen, es führe einen Schnitt aus, da es von jeder Zahl entscheidet, ob sie rechts oder links liegt.—Nun ist die Frage, ob ich durch ein solches Prinzip der Teilung überall hin gelangen kann, oder ob noch eine andere Art der Entscheidung nötig ist; und man könnte fragen, ob *nach* der vollendeten Entscheidung durch das Prinzip, oder *vor* der Vollendung. Nun, jedenfalls nicht vor der Vollendung; denn solange noch die Frage ist, in welchem endlichen Stück der Geraden der Punkt liegen soll, kann die weitere Teilung entscheiden.—Aber *nach* der Entscheidung durch ein Prinzip, ist noch Raum für eine weitere Entscheidung?

Es ist mit dem Dedekindschen Satz wie mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Er scheint ein Drittes auszuschliessen, während von einem Dritten in ihm nicht die Rede ist.

Der Beweis des Dedekindschen Satzes arbeitet mit einem Bild, das *ihn* nicht rechtfertigen kann, das eher vom Satz gerechtfertigt werden soll.

Ein Prinzip der Teilung siehst du leicht für eine unendlich fortgesetzte Teilung an, denn es entspricht jedenfalls keiner endlichen Teilung und scheint dich weiter und weiter zu führen.

34. Könnte man nicht die Lehre vom Limes, den Funktionen, den reellen Zahlen, mehr, als man es tut, *extensional vorbereiten*? auch wenn dieser vorbereitende Kalkül *sehr* trivial und an sich nutzlos erscheinen sollte?

Die Schwierigkeit der bald intensionalen, bald wieder extensionalen Betrachtungsweise beginnt schon beim Begriff des 'Schnittes'. Daß man jede rationale Zahl ein Prinzip der Teilung der rationalen Zahlen nennen kann, ist wohl klar. Nun entdecken wir etwas anderes, was wir Prinzip der Teilung nennen können, etwa das, welches der $\sqrt{2}$ entspricht. Dann andere ähnliche—und nun sind wir mit der Möglichkeit solcher Teilungen schon ganz wohl vertraut, und sehen sie unter dem Bild eines irgendwo entlang der Geraden geführten Schnittes, *also extensional*. Denn wenn ich *schneide*, so kann ich ja wählen, wo ich schneiden will.

Ist aber ein *Prinzip* der Teilung ein Schnitt, so ist es dies doch nur weil man von beliebigen rationalen Zahlen sagen kann, sie seien oberhalb oder unterhalb des Schnittes.—Kann man nun sagen, die Idee des Schnitts habe uns von der rationalen Zahl zu irrationalen Zahlen geführt? Sind wir denn z.B. zur $\sqrt{2}$ durch den Begriff des Schnitts gelangt?

Was ist nun ein Schnitt der reellen Zahlen? Nun, ein Prinzip der Teilung in eine untere und eine obere Klasse. So ein Prinzip gibt also

If you have a principle for unlimited repetition of this procedure then you can say that this principle executes a cut, as it decides for each number whether it lies to the right or to the left.—Now the question is whether I can go all the way by means of such a principle of division, or whether some other way of deciding is still needed; and again, whether this would be *after* finishing the use of the principle, or *before*. Now in any case, not before the completion; for so long as the question still is, in which finite bit of the straight line the point is supposed to lie, further division may decide the matter.—But *after* the decision by a principle is there still room for a further decision?

It is the same with Dedekind's theorem as with the law of excluded middle: it seems to exclude a third possibility, whereas a third possibility is not in question here.

The proof of Dedekind's theorem works with a picture which cannot justify *it*; which ought rather to be justified by the theorem.

You readily see a principle of division as an unendingly repeated division, for at any rate it does not correspond to any finite division and seems to lead you on and on.

34. Couldn't we make a more *extensional preparation* for the theory of limits, functions, real numbers, than we do? Even if this preparatory calculus should seem *very* trivial and in itself useless?

The difficulty of looking at the matter now in an intensional, now again in an extensional way, is already there with the concept of a 'cut'. That every rational number can be called a principle of division of the rational numbers is perfectly clear. Now we discover something else that we can call a principle of division, e.g. what corresponds to $\sqrt{2}$. Then other similar ones—and now we are already quite familiar with the possibility of such divisions, and see them under the aspect of a cut made somewhere along the straight line, *hence extensionally*. For if I *cut*, I can of course choose where I want to cut.

But if a *principle* of division is a cut, it surely is so only because it is possible to say of any arbitrary rational number that it is on one side or the other of the cut. Can the idea of a cut now be said to have led us from the rational to the irrational numbers? Are we for example led to $\sqrt{2}$ by way of the concept of a cut?

Now what is a cut of the real numbers? Well, a principle of division into an upper and a lower class. Thus such a principle yields every jede rationale und irrationale Zahl ab. Denn wenn wir auch kein System der irrationalen Zahlen haben, so zerfallen doch die, *die wir haben*, in obere und untere in Bezug auf den Schnitt (soweit sie mit ihm nämlich vergleichbar sind).

Nun ist aber die Dedekindsche Idee, daß die Einteilung in eine obere und untere Klasse (mit den bekannten Bedingungen) die reelle Zahl ist.

Der Schnitt ist eine extensive *Vorstellung*.

Es ist freilich wahr, daß, wenn ich ein mathematisches Kriterium habe um für eine beliebige rationale Zahl festzustellen, ob sie zur oberen oder unteren Klasse gehört, es ein Leichtes ist mich dem Ort systematisch beliebig zu nähern, wo die beiden Klassen sich treffen.

Wir machen bei Dedekind einen Schnitt nicht dadurch, daß wir schneiden, also auf den Ort zeigen, sondern daß wir,—wie beim Finden der $\sqrt{2}$—uns den einander zugekehrten Enden der oberen und unteren Klasse nähern.

Nun soll bewiesen werden, daß keine andere Zahlen, als nur die reellen so einen Schnitt ausführen können.

Vergessen wir nicht, daß *ursprünglich* die Teilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen keinen Sinn hatte, bis wir auf Gewisses aufmerksam machten, was man so beschreiben konnte. Der Begriff *ist vom täglichen Sprachgebrauch hergenommen* und scheint darum auch für die Zahlen unmittelbar einen Sinn haben zu müssen.

Wenn man nun die Idee eines Schnitts der *reellen* Zahlen einführt, indem man sagt, es sei jetzt einfach der Begriff des Schnitts von den rationalen auf die reellen Zahlen auszudehnen, alles was wir brauchen ist eine Eigenschaft, die die reellen Zahlen in zwei Klassen einteilt (etc.)—so ist *zunächst* nicht klar, was mit so einer Eigenschaft gemeint ist, die *alle* reellen Zahlen so einteilt. Nun kann man uns darauf aufmerksam machen, daß jede reelle Zahl dazu dienen kann. Aber das führt uns nur soweit und nicht weiter.

35. Die extensionalen Erklärungen der Funktionen, der reellen Zahlen, etc. übergehen alles Intensionale—obwohl sie es voraussetzen—und beziehen sich auf die immer wiederkehrende äußere Form.

36. Unsre Schwierigkeit fängt eigentlich schon mit der unendlichen Geraden an; obwohl wir schon als Knaben lernen, eine Gerade habe kein Ende, und ich weiß nicht, daß diese Idee irgend jemandem Schwierigkeiten bereitet habe. Wie, wenn ein Finitist versuchte, diesen Begriff durch den einer geraden Strecke von bestimmter Länge zu ersetzen?!

Aber die Gerade ist ein *Gesetz* des Fortschreitens.

rational and irrational number. For even if we have no system of irrational numbers, still those *that we have* divide into upper and lower by reference to the cut (so far, that is, as they are comparable with it).

But now Dedekind's idea is that the division into an upper and lower class (under the known conditions) is the real number.

The cut is an extensional *image*.

It is of course true that, if I have a mathematical criterion for establishing, for any arbitrary rational number, whether it belongs to the upper or the lower class, then it is easy for me systematically to approximate as close as I like to the place where the two classes meet.

In Dedekind we do not make a cut by cutting, i.e. pointing to the place, but—as in finding $\sqrt{2}$—by approaching the adjacent ends of the upper and the lower class.

The thing now is to prove that no other numbers except the real numbers can perform such a cut.

Let us not forget that the division of the rational numbers into two classes did not *originally* have any meaning, until we drew attention to a particular thing that could be so described. The concept *is taken over from the everyday use of language* and that is why it immediately looks as if it had to have a meaning for numbers too.

When the idea of a cut of the *real* numbers is now introduced by saying that we simply have to extend the concept of a cut of the rational numbers to the real numbers—all that we need is a property dividing the real numbers into two classes (etc.)—then *first of all* it is not clear what is meant by such a property, which thus divides *all* real numbers. Now our attention can be drawn to the fact that any real number can serve this purpose. But that gets us only so far and no further.

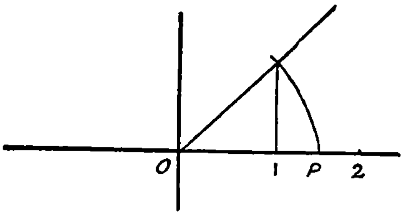
35. The extensional definitions of functions, of real numbers etc. pass over—although they presuppose—everything intensional, and refer to the ever-recurring outward form.

36. Our difficulty really already begins with the infinite straight line; although we learn even as children that a straight line has no end, and I do not know that this idea has ever given anyone any difficulty. Suppose a finitist were to try to replace this concept by that of a straight segment of definite length?!

But the straight line is a *law* for producing further.

37. Das Irreführende an der Dedekindschen extensionalen Auffassung ist die Idee, daß die reellen Zahlen in der Zahlenlinie ausgebreitet daliegen. Man mag sie kennen oder nicht; das macht nichts. Und so braucht man nur zu schneiden, oder in Klassen zu teilen, und hat ihnen allen ihren Platz angewiesen.

Es ist durch die *Kombination* der *Rechnung und der Konstruktion*, daß man die Idee erhält, es müßte auf der Geraden ein Punkt ausgelassen werden, nämlich P,



wenn man nicht die $\sqrt{2}$ als ein Maß der Entfernung von O zuließe. 'Denn, wenn ich wirklich genau konstruierte, so müßte dann der Kreis die Gerade *zwischen* ihren Punkten hindurch schneiden.'

Das ist ein schrecklich verwirrendes Bild.

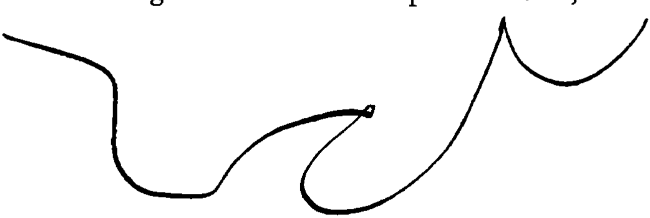
Die irrationalen Zahlen sind—sozusagen—Einzelfälle.

Was ist die *Anwendung* des Begriffes der Geraden, der ein Punkt fehlt?! Die Anwendung muß 'hausbacken' sein. Der Ausdruck "Gerade, der ein Punkt fehlt" ist ein fürchterlich irreleitendes Bild. Der klaffende Spalt zwischen Illustration und Anwendung.

38. Die Allgemeinheit der Funktionen ist sozusagen eine *ungeordnete* Allgemeinheit. Und unsere Mathematik ist auf so einer ungeordneten Allgemeinheit aufgebaut.

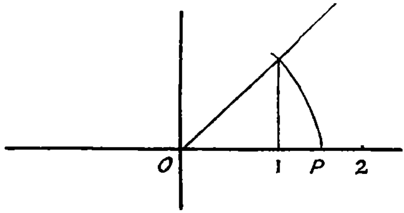
39. Wenn man sich den allgemeinen Funktionen-Kalkül ohne die Existenz von Beispielen denkt, dann sind eben die vagen Erklärungen durch Wertetafeln und Zeichnungen, wie man sie in den Lehrbüchern findet, am Platz, als *Andeutungen*, wie etwa diesem Kalkül einmal ein Sinn zu geben sein möchte.

Denk dir Einer sagte: "Ich will eine Komposition hören, die so geht:"



37. The misleading thing about Dedekind's conception is the idea that the real numbers are there spread out in the number line. They may be known or not; that does not matter. And in this way all that one needs to do is to cut or divide into classes, and one has dealt with them all.

It is by *combining calculation and construction* that one gets the idea that there must be a point left out on the straight line, namely P,



if one does not admit $\sqrt{2}$ as a measure of distance from O. 'For, if I were to construct really accurately, then the circle would have to cut the straight line *between* its points.'

This is a frightfully confusing picture.

The irrational numbers are—so to speak—special cases.

What is the *application* of the concept of a straight line in which a point is missing?! The application must be 'common or garden'. The expression "straight line with a point missing" is a fearfully misleading picture. The yawning gulf between illustration and application.

38. The generality of functions is so to speak an *unordered* generality. And our mathematics is built up on such an unordered generality.

39. If one imagines the general calculus of functions without the existence of examples, then the vague explanations by means of value-tables and diagrams, such as are found in the textbooks, are in place as *indications* of how e.g. a sense might sometime be given to this calculus.

Imagine someone's saying: "I want to hear a composition which goes like this":

Müßte das unsinnig sein? Könnte es nicht eine Komposition geben, von der sich zeigen ließe, daß sie, in irgend einem wichtigen Sinne, dieser Linie entspräche?

Oder wie, wenn man die Stetigkeit als Eigenschaft des Zeichens '$x^2 + y^2 = z^2$' ansähe—natürlich nur, wenn diese Gleichung und andere *gewohnheitsmäßig* einer bekannten Art der Prüfung unterzogen würden. '*So* stellt sich diese Regel (Gleichung) zu dieser bestimmten Prüfung.' Eine Prüfung, die mit einem Streifblick auf eine Art Extension geschieht.

Es wird bei jener Prüfung der Gleichung etwas vorgenommen, was mit gewissen Extensionen zusammenhängt. Aber nicht als handelte es sich da um eine Extension, die der Gleichung selbst irgendwie äquivalent wäre. Es wird nur auf gewisse Extensionen sozusagen angespielt. —Nicht die Extension ist hier das Eigentliche, das nur faute de mieux intensional beschrieben wird; sondern die *Intension* wird beschrieben—oder dargestellt—vermittels gewisser Extensionen, die sich da und dort aus ihr ergeben.

Der Verlauf gewisser Extensionen wirft ein *Streiflicht* auf die algebraische Eigenschaft der Funktion. In diesem Sinne könnte man also sagen, es werfe die Zeichnung einer Hyperbel ein Streiflicht auf die Hyperbelgleichung.

Dem widerspricht nicht, daß jene Extensionen die wichtigste Anwendung der Regel wären; denn es ist *eines*, eine Elipse zeichnen, und ein anderes, sie *mittels ihrer Gleichung* konstruieren.—

Wie, wenn ich sagte: Die extensionalen Überlegungen (z.B. der Heine-Borelsche Satz) zeigen: *so* soll man die Intensionen behandeln.

Das Theorem gibt uns in großen Zügen eine Methode, wie mit Intensionen zu verfahren ist. Es sagt etwa: '*So* wird es ausschauen müssen'.

Und man wird dann etwa zu einem Verfahren mit bestimmten Intensionen eine bestimmte Illustration zeichnen können. Die Illustration ist ein Zeichen, eine Beschreibung, die besonders übersichtlich, einprägsam, ist.

Die Illustration wird hier eben ein *Verfahren* angeben.

Lehre, wie Figuren in einem Bilde (Gemälde) zu plazieren sind,—aus allgemeinen ästhetischen Gründen etwa—*abgesehen davon*, ob diese Figuren nun kämpfen oder einander liebkosen, etc..

Die Lehre von den Funktionen als ein Schema, in das, einerseits eine Unmenge von Beispielen paßt, und das anderseits, als ein Standard zur Klassifikation von Fällen dasteht.

Would that necessarily be senseless? Couldn't there be a composition whose correspondence to this line, in some important sense, could be shewn?

Or suppose one looked at continuity as a property of the sign '$x^2 + y^2 = z^2$'—of course only if this equation and others were *ordinarily* subjected to a known method of testing. '*This* is the relation of this rule (equation) to this particular test.' A test, which goes with a sidelong glance at a kind of extension.

In this test of the equation something is undertaken which is connected with certain extensions. Though not as if what were in question here were an extension which would be somehow equivalent to the equation itself. It is just that certain extensions are, so to speak, alluded to.—The real thing here is not the extension, which is only *faute de mieux* described intensionally; rather is the *intension* described—or presented—by means of certain extensions, which are yielded by it then and there.

The range of certain extensions casts a *sidelight* on the algebraic property of the function. In this sense, then, the drawing of a hyperbola could be said to cast a sidelight on the equation of the hyperbola.

It is no contradiction of this for those extensions to be the most important application of the rule; for it is *one* thing to draw an ellipse, and another to construct it *by means of its equation*.—

Suppose I were to say: extensional considerations (for example the Heine-Borel theorem) shew: *This* is how to deal with intensions.

The theorem gives us the main features of a method of proceeding with intensions. It says e.g.: '*this* is what it will have to be like'.

And it will then be possible to attach a diagram as a particular illustration, e.g. to a procedure with particular intensions. The illustration is a sign, a description, which is particularly easy to take in, particularly memorable.

To give the illustration here will in fact be to give a procedure.

A theory of the placing of figures in a picture (a painting),—say on general aesthetic grounds—*apart from* whether these figures are engaged in fighting, or love-making etc..

The theory of functions as a schema, into which on the one hand a host of examples fits, and which on the other hand is there as a standard for the classification of cases.

Das Irreführende der üblichen Darstellung besteht darin, daß es scheint, als ließe sich die *allgemeine* auch ohne alle Beispiele, ohne einen Gedanken an Intension*en* (im Plural) ganz verstehen, da sich eigentlich alles extensional abmachen ließe, wenn es aus äußeren Gründen nicht unmöglich wäre.

40. Dedekind gibt ein allgemeines Schema der Ausdrucksweise; sozusagen eine logische Form des Raisonements.

Eine allgemeine Formulierung eines Vorgangs. Der Effekt ist ein ähnlicher, wie der der Einführung des Wortes "Zuordnung" zur allgemeinen Erklärung der Funktionen. Es wird eine allgemeine Redeweise eingeführt, die zur Charakterisierung eines mathematischen Vorgangs sehr nützlich ist. (Ähnlich wie in der Aristotelischen Logik). Die Gefahr aber ist, daß man mit dieser allgemeinen Redeweise die vollständige Erklärung der einzelnen Fälle zu besitzen glaubt (die gleiche Gefahr wie in der Logik).

Wir bestimmen den Begriff *der Regel* zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs weiter und weiter.

Aber der Inhalt des Begriffes?!—Nun, können wir denn nicht das Begriffsgebäude ausbauen als Behältnis für welche Anwendung immer daherkommt? Darf ich denn nicht die *Form* ausbauen (die Form zu der mir irgend ein Inhalt die *Anregung* geboten hat) und gleichsam eine Sprachform vorbereiten für mögliche Verwendung? Denn diese Form wird auch, soweit sie leer bleibt, die Form der Mathematik bestimmen helfen.

Ist denn nicht die Subjekt-Prädikat Form in dieser Weise offen und wartet auf die verschiedensten neuen Anwendungen?

D.h.: ist es wahr, daß die ganze Schwierigkeit, die Allgemeinheit des mathematischen Funktionsbegriffs betreffend, schon in der Aristotelischen Logik da ist, da die Allgemeinheit der Sätze und Prädikate von uns ebensowenig überblickt werden kann, wie die der mathematischen Funktionen?

41. Begriffe, die in 'notwendigen' Sätzen vorkommen, müssen auch in nicht notwendigen auftreten und eine Bedeutung haben.

42. Würde man von Einem sagen, er verstehe den Satz '563 + 437 = 1000', der nicht wüßte, wie man ihn beweisen kann? Kann man leugnen, daß es ein Zeichen des Verstehens des Satzes ist, wenn Einer weiß, wie er zu beweisen wäre?

Das Problem, eine mathematische Entscheidung eines Theorems zu finden, könnte man mit gewissem Recht das Problem nennen, einer Formel mathematischen Sinn zu geben.

The misleading thing about the usual account consists in its looking as if the *general* account could be quite understood even without examples, without a thought of intensions (in the plural), since really everything could be managed extensionally, if that were not impossible for external reasons.

40. Dedekind gives a general pattern of expression; so to speak a logical form of reasoning.

A general formulation of a procedure. The effect is similar to that of introducing the word "correlation" with a view to the general explanation of functions. A general way of talking is introduced, which is very useful for the characterization of a mathematical procedure (as in Aristotelian logic). But the danger is that one will think one is in possession of the complete explanation of the individual cases when one has this general way of talking (the same danger as in logic).

We determine the concept of *the rule* for the construction of a non-terminating decimal further and further.

But the content of the concept?!—Well, can we not complete the construction of the concept as a receptacle for whatever application may turn up? May I not complete the construction of the *form* (the form for which some content has supplied me with the *stimulus*) and as it were prepare a form of language for possible employment? For, so long as it remains empty, the form will contribute to determining the form of mathematics.

For isn't the subject-predicate form open in this way; and waiting for the most various new applications?

That is to say: is it true that the whole difficulty about the generality of the concept of a mathematical function is already to be found in Aristotelian logic, since we can no more survey the generality of propositions and of predicates than that of mathematical functions?

41. Concepts which occur in 'necessary' propositions must also occur and have a meaning in non-necessary ones.

42. Would one say that someone understood the proposition '$563 + 437 = 1000$' if he did not know how it can be proved? Can one deny that it is a sign of understanding a proposition, if a man knows how it could be proved?

The problem of finding a mathematical decision of a theorem might with some justice be called the problem of giving mathematical sense to a formula.

Die Gleichung kuppelt zwei Begriffe; sodaß ich nun von einem zum andern übergehen kann.

Die Gleichung bildet eine Begriffsbahn. Aber ist eine Begriffsbahn ein Begriff?? Und wenn nicht, ist eine scharfe Grenze zwischen ihnen?

Denke, du hast jemanden eine Technik des Multiplizierens gelehrt. Er verwendet sie in einem Sprachspiel. Damit er nun nicht immer von neuem multiplizieren muß, schreibt er sich die Multiplikation in verkürzter Form, als Gleichung nämlich, auf und benutzt diese, wo er früher multipliziert hat.

Von der Technik des Multiplizierens nun sagt er, daß sie Verbindungen zwischen den Begriffen schlägt. Er wird dasselbe auch von der Multiplikation als Bild dieses Übergangs sagen. Und endlich auch von der Gleichung: Denn es ist ja wesentlich, daß sich der Übergang auch einfach durch das Schema der Gleichung muß darstellen lassen. Daß also der Übergang *nicht* immer von Neuem gemacht werden muß.

Wird er nun aber geneigt sein, vom Prozeß des Multiplizierens zu sagen, dieser sei ein Begriff?

Er ist doch eine *Bewegung*. Eine Bewegung scheint es, zwischen zwei Ruhepunkten; diese sind die Begriffe.

Fasse ich den Beweis als meine *Bewegung* von einem Begriff zum andern auf, dann werde ich von ihm nicht auch sagen wollen, er selbst sei ein neuer Begriff. Aber kann ich nicht die Multiplikation als *ein* Bild auffassen, vergleichbar einem Zahlzeichen, und kann sie nicht auch als Begriffszeichen funktionieren?

43. Ich möchte sagen: Wenn wir einmal die eine, einmal die andre Seite der Gleichung verwenden, verwenden wir zwei Seiten desselben Begriffs.

44. Ist der begriffliche Apparat ein Begriff?

45. Wie zeigt denn einer, daß er einen mathematischen Satz versteht? Darin, etwa, daß er ihn anwendet. Also nicht auch darin, daß er ihn beweist?

Ich möchte sagen: der Beweis zeigt mir einen neuen Zusammenhang, daher gibt er mir auch einen neuen Begriff.

Ist der neue Begriff nicht der Beweis selbst?

Du kannst doch gewiß, wenn der Beweis erbracht ist, ein neues Urteil bilden. Denn du kannst doch nun von einem bestimmten Muster sagen, es sei oder sei nicht dieser Beweis.

Ja, aber ist der Beweis als *Beweis* betrachtet, gedeutet, eine Figur? Als *Beweis*, könnte ich sagen, soll er mich von etwas überzeugen. Ich

An equation links two concepts; so that I can now pass from one to the other.

An equation constructs a conceptual path. But is a conceptual path a concept? And if not, is there a sharp distinction between them?

Imagine that you have taught someone a technique of multiplying. He uses it in a language-game. In order not to have to keep on multiplying afresh, he writes the multiplication in an abbreviated form as an equation, and he uses this where he multiplied before.

Now he says that the technique of multiplying establishes connexions between the concepts. He will also say the same thing about a multiplication as a picture of this transition. And finally he will say the same thing about the equation itself: for it is essential that the transition should be capable of being represented simply by the pattern of the equation. That is, that the transition should *not* always have to be made anew.

Now will he also be inclined to say that the process of multiplying is a concept?

It is surely a *movement*. It seems to be a movement between two stationary points; these are the concepts.

If I conceive a proof as my *movement* from one concept to another, then I shall not want also to say that it is a new concept. But can I not conceive the written multiplication as *one* picture, comparable to a number-sign, and may not its functioning include functioning as a concept-sign?

43. I should like to say: when we employ now the one, now the other side of the equation, we are employing two sides of the same concept.

44. Is the conceptual apparatus a concept?

45. How does anyone shew that he understands a mathematical proposition? E.g. by applying it. So not also by proving it?

I should like to say: the proof shews me a new connexion, and hence it also gives me a new concept.

Is not the new concept the proof itself?

But a proof certainly does enable you to form a new judgment. For you can after all say of a particular pattern that it is or is not this proof.

Yes, but is the proof, regarded, interpreted, as a *proof*, a pattern? As a *proof*, I might say, it has to convince me of something. In consewill, auf ihn hin, etwas tun oder lassen. Und auf einen neuen Begriff hin tue oder lasse ich nichts. Ich will also sagen: der Beweis ist das Beweisbild in bestimmter Art verwendet.

Und das, wovon er mich überzeugt, kann nun sehr verschiedener Art sein. (Denke an Beweise Russellscher Tautologien, Beweise in der Geometrie und in der Algebra.)

Der Mechanismus kann mich von etwas überzeugen (kann etwas beweisen). Aber unter welchen Umständen—in welcher Umgebung von Tätigkeiten und Problemen—werde ich sagen, er überzeuge mich von etwas?

"Aber ein Begriff überzeugt mich doch von nichts, denn er zeigt mir nicht eine Tatsache."—Aber warum soll mich ein Begriff nicht vor allem davon überzeugen, daß ich *ihn* gebrauchen will?

Warum soll der neue Begriff, einmal gebildet, mir nicht unmittelbar den Übergang zu einem Urteil gestatten?

46. 'Einen mathematischen Satz verstehen'—das ist ein sehr vager Begriff.

Sagst du aber "Aufs Verstehen kommt's überhaupt nicht an. Die mathematischen Sätze sind nur Stellungen in einem Spiel" so ist das auch Unsinn! 'Mathematik' ist eben kein scharf umzogener Begriff.

Daher der Streit, ob ein Existenzbeweis, der keine Konstruktion ist, ein wirklicher Existenzbeweis ist. Es fragt sich nämlich: *verstehe* ich den Satz "Es gibt . . . " wenn ich keine Möglichkeit habe zu finden, wo es existiert? Und da gibt es zwei Gesichtspunkte: Als deutschen Satz z.B. verstehe ich ihn, soweit ich ihn nämlich erklären kann (und merke, wie weit meine Erklärung geht!). Was aber kann ich mit ihm anfangen? Nun, nicht das was mit einem Konstruktionsbeweis. Und soweit, was ich mit dem Satz machen kann, das Kriterium seines Verstehens ist, soweit ist es nicht *von vornherein* klar, ob und wie weit ich ihn verstehe.

Das ist der Fluch des Einbruchs der mathematischen Logik in die Mathematik, daß nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen läßt, und wir uns daher verpflichtet fühlen, ihn zu verstehen. Obwohl ja diese Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist.

47. Ein Begriff ist nicht wesentlich ein Prädikat. Wir sagen zwar manchmal: "dieses Ding ist keine Flasche" aber es ist dem Sprachspiel mit dem Begriff 'Flasche' gar nicht wesentlich, daß solche Urteile darin

quence of it I will do or not do something. And in consequence of a new concept I don't do or not do anything. So I want to say: the proof is the pattern of proof employed in a particular way.

And what it convinces me of can be of very various kinds. (Think of the proofs of Russellian tautologies, or proofs in geometry and in algebra.)

A mechanism can convince me of something (can prove something). But under what circumstances—in the context of what activities and problems—shall I say that it convinces me of something?

"But a concept surely does not convince me of anything, for it does not shew me a fact."—But why should a concept not first and foremost convince me that I want to use *it*?

Why should not the new concept, once formed, immediately license my transition to a judgment?

46. 'Understanding a mathematical proposition'—that is a very vague concept.

But if you say "The point isn't understanding at all. Mathematical propositions are only positions in a game" that too is nonsense! 'Mathematics' is *not* a sharply delimited concept.

Hence the issue whether an existence-proof which is not a construction is a real proof of existence. That is, the question arises: Do I *understand* the proposition "There is . . ." when I have no possibility of finding where it exists? And here there are two points of view: as an English sentence for example I understand it, so far, that is, as I can explain it (and note how far my explanation goes). But what can I do with it? Well, not what I can do with a constructive proof. And in so far as what I can do with the proposition is the criterion of understanding it, thus far it is not clear *in advance* whether and to what extent I understand it.

The curse of the invasion of mathematics by mathematical logic is that now any proposition can be represented in a mathematical symbolism, and this makes us feel obliged to understand it. Although of course this method of writing is nothing but the translation of vague ordinary prose.

47. A concept is not essentially a predicate. We do indeed sometimes say: "This thing is not a bottle" but it is certainly not essential to the language-game with the concept 'bottle' that such judgments

gefällt werden. Achte eben darauf, wie ein Begriffswort (zum Beispiel "Platte") in einem Sprachspiel gebraucht wird.

Es brauchte zum Beispiel gar keinen Satz "dies ist eine Platte" geben; sondern etwa nur den: "hier ist eine Platte".

48. Die 'mathematische Logik' hat das Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verbildet, indem sie eine oberflächliche Deutung der Formen unserer Umgangsprache zur Analyse der Strukturen der Tatsachen erklärte. Sie hat hierin freilich nur auf der Aristotelischen Logik weiter gebaut.

49. Es ist schon wahr: das Zahlzeichen gehört zu einem Begriffszeichen und nur mit diesem ist es sozusagen ein Maß.

50. Wenn du dieser Maus ins Maul schaust, wirst du zwei lange Schneidezähne sehen.—Wie weißt du das?—Ich weiß, daß alle Mäuse sie haben, also auch diese. (Und man sagt nicht: "und dieses Ding ist eine Maus, also hat auch sie . . .") Warum ist das eine so wichtige Bewegung? Nun, wir untersuchen z.B. Tiere, Pflanzen etc. etc., bilden allgemeine Urteile und wenden sie im einzelnen Fall an.—Es ist aber doch eine Wahrheit, daß diese Maus die Eigenschaft hat, *wenn alle* Mäuse sie haben! Das ist eine Bestimmung über die Anwendung des Wortes "alle". Die tatsächliche Allgemeinheit liegt wo anders. Nämlich z.B. in dem allgemeinen Vorkommen jener Untersuchungsmethode und ihrer Anwendung.

Oder: "Dieser Mann ist ein Student der Mathematik." Wie weißt du das?—"Alle Leute in diesem Zimmer sind Mathematiker; es sind nur solche zugelassen worden."—

Das interessante Allgemeine ist, daß wir oft ein Mittel haben, uns vom allgemeinen Satz zu überzeugen, ehe wir besondere Fälle in Betracht ziehen: und daß wir dann mittels der allgemeinen Methode den besondern Fall beurteilen.

Wir haben dem Pförtner den Befehl gegeben, nur Leute mit Einladungen hereinzulassen und rechnen nun darauf, daß dieser Mensch, der hereingelassen wurde, eine Einladung hat.

Das interessante Allgemeine am logischen Satz ist nicht die Tatsache, die er auszusprechen scheint, sondern die immer wiederkehrende Situation, in der dieser Übergang gemacht wird.

51. Wenn man vom Beweis sagt, er zeige *wie* (z.B.) 25×25 625 ergeben; so ist das natürlich eine seltsame Redeweise, da das arithmetische Ergebnis ja kein zeitlicher Vorgang ist. Aber nun zeigt ja der Beweis auch keinen Vorgang.

occur in it. The thing is to pay attention to how a concept word ("slab", e.g.) is used in a language-game.

There need not e.g. be such a sentence as "This is a slab" at all; but e.g. merely: "Here is a slab."

48. 'Mathematical logic' has completely deformed the thinking of mathematicians and of philosophers, by setting up a superficial interpretation of the forms of our everyday language as an analysis of the structures of facts. Of course in this it has only continued to build on the Aristotelian logic.

49. It is quite true: the numerical sign belongs with a concept-sign, and only together with this is it, so to speak, a measure.

50. If you look into this mouse's jaw you will see two long incisor teeth.—How do you know?—I know that all mice have them, so this one will too. (And one does not say: "And this thing is a mouse, so it too . . .") Why is this such an important move? Well, we investigate e.g. animals, plants etc. etc.; we form general judgments and apply them in particular cases.—But it surely is a truth that this mouse has the property, *if all* mice have it! That is a determination about the application of the word "all". The factual generality is to be found somewhere else. Namely, for example, in the general occurrence of that method of investigation and its application.

Or: "This man is a student of mathematics." How do you know?—"All the people in this room are mathematicians; only such people have been admitted."

The interesting case of generality is this: we often have a means of ascertaining the general proposition before considering particular cases: and we then use the general method to judge the particular case.

We gave the porter the order only to admit people with invitations and now we count upon it that this man, who has been admitted, has an invitation.

The interesting generality in the case of the logical proposition is not the fact that it appears to express, but the ever-recurring situation in which this transition is made.

51. If it is said that the proof shews *how* (e.g.) 25×25 yield 625, that is of course a queer way of talking, since for this to be the arithmetical result is not a temporal process. But the proof does not shew any temporal process either.

Denke dir eine Reihe von Bildern. Sie zeigen, wie zwei Leute nach den und den Regeln mit Rapieren fechten. Eine Bilderreihe kann das doch zeigen. Hier bezieht sich das Bild auf eine Wirklichkeit. Man kann nicht sagen, es zeige, *daß* so gefochten wird, aber *wie* gefochten wird. In einem andern Sinne kann man sagen, die Bilder zeigen, wie man in drei Bewegungen von dieser Lage in jene kommen kann. Und nun zeigen sie auch, *daß* man auf diese Weise in jene Lage kommen kann.

52. Der Philosoph muß sich so drehen und wenden, daß er an den mathematischen Problemen vorbeikommt, nicht gegen eines rennt,—das gelöst werden müßte, ehe er weiter gehen kann.

Sein Arbeiten in der Philosophie ist gleichsam eine Faulheit in der Mathematik.

Nicht ein neues Gebäude ist aufzuführen, oder eine neue Brücke zu schlagen, sondern die Geographie, *wie sie jetzt ist*, zu beurteilen.

Wir sehen wohl Stücke der Begriffe, aber nicht klar die Abhänge, die den einen in andere übergehen lassen.

Darum hilft es in der Philosophie der Mathematik nichts, Beweise in neue Formen umzugießen. Obwohl hier eine starke Versuchung liegt.

Auch vor 500 Jahren konnte es eine Philosophie der Mathematik geben, dessen, was damals die Mathematik war.

53. Der Philosoph ist der, der in sich viele Krankheiten des Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden Menschenverstandes kommen kann.

Wenn wir im Leben vom Tod umgeben sind, so auch in der Gesundheit des Verstands vom Wahnsinn.

Imagine a sequence of pictures. They shew how two people fence with rapiers according to such-and-such rules. A sequence of pictures can surely shew that. Here the picture refers to a reality. It cannot be said to shew *that* fencing is done like this, but *how* fencing is done. In another sense we can say that the pictures shew how one can get from this position into that in three movements. And now they also shew *that* one can get into that position in this way.

52. The philosopher must twist and turn about so as to pass by the mathematical problems, and not run up against one,—which would have to be solved before he could go further.

His labour in philosophy is as it were an idleness in mathematics.

It is not that a new building has to be erected, or that a new bridge has to be built, but that the geography, *as it now is*, has to be judged.

We certainly see bits of the concepts, but we don't clearly see the declivities by which one passes into others.

This is why it is of no use in the philosophy of mathematics to recast proofs in new forms. Although there is a strong temptation here.

Even 500 years ago a philosophy of mathematics was possible, a philosophy of what mathematics was then.

53. The philosopher is the man who has to cure himself of many sicknesses of the understanding before he can arrive at the notions of the sound human understanding.

If in the midst of life we are in death, so in sanity we are surrounded by madness.

V

1941 UND 1944

1. Die Rolle der Sätze, die von den Maßen handeln und nicht 'Erfahrungssätze' sind.—Jemand sagt mir: "Diese Strecke ist 240 Zoll lang." Ich sage: "Das sind 20 Fuß, also ungefähr 7 Schritte" und habe nun einen Begriff von der Länge erhalten.—Die Umformung beruht auf arithmetischen Sätzen und auf dem Satz, daß 12 Zoll = 1 Fuß ist.

Diesen letzteren Satz wird niemand, für gewöhnlich, als Erfahrungssatz aussprechen. Man sagt, er drücke ein Übereinkommen aus. Aber das Messen würde seinen gewöhnlichen Charakter gänzlich verlieren, wenn nicht z.B. die Aneinanderreihung von 12 Zollstücken für gewöhnlich eine Länge ergäbe, die sich wieder besonders aufbewahren läßt.

Muß ich darum sagen, der Satz '12 Zoll = 1 Fuß' sage alle diese Dinge aus, die dem Messen seine gegenwärtige Pointe geben?

Nein. Der Satz *ruht in* einer Technik. Und, wenn du willst, in den physikalischen und psychologischen Tatsachen, die diese Technik möglich machen. Aber darum ist sein Sinn nicht, diese Bedingungen auszusprechen. Das Gegenteil jenes Satzes, '12 Zoll = 1 Fuß', sagt nicht, daß die Maßstäbe nicht starr genug sind, oder wir nicht Alle in gleicher Weise zählen und rechnen.

2. Der Satz spielt die typische (damit aber nicht *einfache*) Rolle der Regel.

Ich kann mittels des Satzes '12 Zoll = 1 Fuß' eine Voraussage machen; nämlich daß 12 zoll-lange Stücke Holz aneinandergelegt sich gleich lang mit einem auf andere Weise gemessenen Stück erweisen werden. Also ist der Witz jener Regel etwa, daß man mittels ihrer gewisse Voraussagen machen kann. Verliert sie nun dadurch den Charakter der *Regel*?—

Warum kann man jene Voraussagen machen? Nun,—alle Maßstäbe sind gleich gearbeitet; sie verändern ihre Länge nicht beträchtlich; Stücke Holz, die man auf einen Zoll oder Fuß zugeschnitten hat, tun dies auch nicht; unser Gedächtnis ist gut genug, damit wir beim Zählen bis '12' Ziffern nicht zweimal zählen und nicht auslassen; u.a. .

V

1941 AND 1944

1. The role of propositions which deal with measures and are not 'empirical propositions'.—Someone tells me: "this stretch is two hundred and forty inches long". I say: "that's twenty foot, so it's roughly seven paces" and now I have got an idea of the length.—The transformation is founded on arithmetical propositions and on the proposition that 12 inches = 1 foot.

No one will ordinarily see this last proposition as an empirical proposition. It is said to express a convention. But measuring would entirely lose *its ordinary character* if, for example, putting 12 bits each one inch long end to end didn't ordinarily yield a length which can in its turn be preserved in a special way.

Does this mean that I have to say that the proposition '12 inches = 1 foot' asserts all those things which give measuring its present point?

No. The proposition *is grounded in* a technique. And, if you like, also in the physical and psychological facts that make the technique *possible*. But it doesn't follow that its sense is to express these conditions. The opposite of that proposition, 'twelve inches = one foot' does not say that rulers are not rigid enough or that we don't all count and calculate in the same way.

2. The proposition has the typical (but that doesn't mean *simple*) role of a rule.

I can use the proposition '12 inches = 1 foot' to make a prediction; namely that twelve inch-long pieces of wood laid end to end will turn out to be of the same length as one piece measured in a different way. Thus the point of that rule is, e.g., that it can be used to make certain predictions. Does it lose the character of a *rule* on that account?

Why can one make those predictions? Well,—all rulers are made alike; they don't alter much in length; nor do pieces of wood cut up into inch lengths; our memory is good enough for us not to take numbers twice in counting up to '12', and not to leave any out; and so on.

Aber kann man denn nicht die Regel durch einen Erfahrungssatz ersetzen, der sagt, daß Maßstäbe so und so gearbeitet sind, daß Leute sie *so* handhaben? Man gäbe etwa eine ethnologische Darstellung dieser menschlichen Einrichtung.

Nun ist es offenbar, daß diese Darstellung die Funktion der Regel übernehmen könnte.

Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch nichts wissen. Ist Verwirrung in unsern Operationen, rechnet jeder anders und einmal so, einmal so, so liegt noch kein Rechnen vor; stimmen wir überein, nun dann haben wir nur unsre Uhren gestellt, doch noch keine Zeit gemessen.

Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch *nichts* wissen.

D.h., der mathematische Satz soll nur das Gerüst liefern für eine Beschreibung.

3. Wie kann die bloße Umformung des Ausdrucks von praktischer Konsequenz sein?

Daß ich 25 × 25 Nüsse habe, läßt sich verifizieren indem ich 625 Nüsse zähle, aber es läßt sich auch auf andre Weise herausfinden, die der Ausdrucksform '25 × 25' näher steht. Und es ist natürlich die Verknüpfung dieser beiden Arten der Zahl*bestimmung*, in der ein Zweck des Multiplizierens beruht.

Die Regel ist als Regel losgelöst, steht, sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen der täglichen Erfahrung sind.

Was ich zu tun habe, ist etwas, wie: das Amt eines Königs zu beschreiben;—wobei ich nicht in den Fehler verfallen darf, die königliche Würde aus der Nützlichkeit des Königs zu erklären; und doch weder Nützlichkeit noch Würde außer Acht lassen darf.

Ich richte mich beim praktischen Arbeiten nach dem Resultat der Umformung des Ausdrucks.

Wie kann ich dann aber noch sagen, daß es dasselbe heißt, ob ich sage "hier sind 625 Nüsse", oder "hier sind 25 × 25 Nüsse"?

Wer den Satz "hier sind 625 . . ." verifiziert, verifiziert damit auch "hier sind 25 × 25 . . ."; u.a.. Doch steht die eine Form einer Art der Verifikation, die andre einer andern näher.

Wie kannst du behaupten, daß ". . . 625 . . ." und ". . . 25 × 25 . . ." dasselbe sagen?—Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.

But then can the rule not be replaced by an empirical proposition saying that rulers are made in such and such ways, that people do *this* with them? One might give an ethnological account of this human institution.

Now it is evident that this account could take over the function of a rule.

If you know a mathematical proposition, that's not to say you yet know anything. If there is confusion in our operations, if everyone calculates differently, and each one differently at different times, then there isn't any calculating yet; if we agree, then we have only set our watches, but not yet measured any time.

If you know a mathematical proposition, that's not to say you yet know *anything*.

I.e., the mathematical proposition is only supposed to supply a framework for a description.

3. How can the mere transformation of an expression be of practical consequence?

The fact that I have 25 × 25 nuts can be verified by my counting 625 nuts, but it can also be discovered in another way which is closer to the form of expression '25 × 25'. And of course it is in the linking of these two ways *of determining* a number that one point of multiplying lies.

A rule *qua* rule is detached, it stands as it were alone in its glory; although what gives it importance is the facts of daily experience.

What I have to do is as it were to describe the office of a king;—in doing which I must never fall into the error of explaining the kingly dignity by the king's usefulness, but I must leave neither his usefulness nor his dignity out of account.

I am guided in practical work by the result of transforming an expression.

But in that case how can I still say that it means the same thing whether I say "here are 625 nuts", or "here are 25 × 25 nuts"?

If you verify the proposition "here are 625 . . ." then in doing that you are also verifying "here are 25 × 25 . . ."; etc. But the one form is closer to one kind of verification, the other closer to another.

How can you say that ". . . 625 . . ." and ". . . 25 × 25 . . ." say the same thing?—Only through our arithmetic do they *become one*.

Ich kann einmal die eine, einmal die andere Art der Beschreibung, durch Zählen z.B., erhalten. D.h., ich kann jede der beiden Formen auf jede Art erhalten; aber auf verschiedenem Weg.

Man könnte nun fragen: Wenn der Satz "... 625 ..." einmal so, einmal anders verifiziert wurde, sagte er da beidemale dasselbe?

Oder: Was geschieht, wenn eine Methode des Verifizierens '625', die andre nicht '25 × 25' ergibt?—Ist da "... 625 ..." wahr und "... 25 × 25 ..." falsch? Nein!—Das eine anzweifeln heißt, das andre anzweifeln: das ist die Grammatik, die unsre Arithmetik diesen Zeichen gibt.

Wenn die beiden Arten des Zählens die Begründung einer *Zahlangabe* sein sollen, dann ist nur *eine* Zahlangabe, wenn auch in verschiedenen Formen, da. Dagegen kann man ohne Widerspruch sagen: "Mir kommt bei der einen Art des Zählens 25 × 25 (und also 625) heraus, bei der andern nicht 625 (also nicht 25 × 25)". Die Arithmetik hat hiegegen keinen Einwand.

Daß die Arithmetik die beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, ist, könnte man sagen, ein grammatischer Trick.

Sie sperrt damit eine bestimmte Art der Beschreibung ab und leitet sie in andere Kanäle. (Und daß dies mit den Tatsachen der Erfahrung zusammenhängt, braucht nicht erst gesagt zu werden.)

4. Nimm an, ich habe jemand multiplizieren gelehrt, aber nicht mit Hilfe einer formulierten allgemeinen Regel, sondern nur dadurch, daß er sieht, wie ich ihm Beispiele vorrechne. Ich kann ihm dann eine *neue* Aufgabe anschreiben, und sagen: "Mach dasselbe mit *diesen* beiden Zahlen, was ich mit den früheren getan habe". Aber ich kann auch sagen: "Wenn du mit diesen beiden machst, was ich mit den andern gemacht habe, so wirst du zu der Zahl ... kommen". Was ist das für ein Satz?

"Du wirst das und das schreiben" ist eine Vorhersage. 'Wenn du das und das schreiben wirst, wirst du's so gemacht haben, wie ich dir's vorgemacht habe' bestimmt, was er "seinem Beispiel folgen" nennt.

'Die Lösung dieser Aufgabe ist ...'.—Wenn ich das lese, ehe ich die Aufgabe gerechnet habe,—was ist das für ein Satz?

"Wenn du mit diesen Zahlen machst, was ich dir mit den andern vorgemacht habe, wirst du ... erhalten"—das heißt doch: "Das Resultat dieser Rechnung ist ..."—und das ist keine Vorhersage, sondern ein mathematischer Satz. Aber es ist dennoch auch eine Vorhersage!—Eine Vorhersage besonderer Art. Wie der, der am Ende findet, daß sich beim Addieren der Kolumne wirklich das und das ergibt, wirklich überrascht sein kann; z.B. ausrufen kann: ja, bei Gott, es kommt heraus!

I can at one time arrive at the one, and at another time at the other kind of description, e.g. by counting. That is to say, I can arrive at either of these forms in either way; but by different routes.

It might now be asked; if the proposition "... 625 ..." was verified at one time in this way and at another time in a different way, then did it mean the same thing both times?

Or: what happens if one method of verification gives '625', but the other not '25 × 25'?—Is "... 625 ..." true and "... 25 times 25 ..." false? No.—To doubt the one means to doubt the other: that is the grammar given to these signs by our arithmetic.

If both ways of counting are supposed to justify *giving a number* then giving *one* number, even though in different forms, is all that is *provided for*. On the other hand there is no contradiction in saying: "By one method of counting I get 25 × 25 (and so 625), by the other not 625 (and so not 25 × 25)". Arithmetic has no objection to this.

For arithmetic to equate the two expressions is, one might say, a grammatical trick.

In this way arithmetic bars a particular kind of description and conducts description into other channels. (And it goes without saying that this is connected with the facts of experience.)

4. Suppose I have taught somebody to multiply; not, however, by using an explicit general rule, but only by his seeing how I work out examples for him. I can then set him a *new* question and say: "Do the same with *these* two numbers as I did with the previous ones". But I can also say: "If you do with these two what I did with the others, then you will arrive at the number ...". What kind of proposition is that?

"You will write such-and-such" is a prediction. 'If you write such-and-such, then you will have done it as I shewed you' determines what he calls "following his example".

'The solution to this problem is ...'.—If I read this before I have worked out the sum,—what sort of proposition is it?

"If you do with these numbers what I did with the others, you will get ..."—that surely means: "The result of this calculation is ..."—and that is not a prediction but a mathematical proposition. But it is none the less a prediction too—A prediction of a special kind. Just as someone who at the end finds that he really does get such-and-such when he adds up the column may be really surprised; for example may exclaim: Good Lord, it does come out!

Denke dir nur diesen Vorgang des Vorhersagens und der Bestätigung als ein besonderes Sprachspiel—ich meine: isoliert von dem Übrigen der Arithmetik und ihrer Anwendung.

Was ist an diesem Vorhersagespiel so sonderbar? Was mir sonderbar vorkommt, würde entfernt, wenn die Vorhersage lautete: "Wenn du glauben wirst, meinem Beispiel gefolgt zu sein, wirst du *das* herausgebracht haben" oder: "Wenn dir alles richtig scheinen wird, wird das das Resultat sein." Dieses Spiel könnte z.B. mit dem Eingeben eines bestimmten Giftes verbunden sein, und die Vorhersage wäre, daß die Injektion unsre Fähigkeiten, unser Gedächtnis z.B. in der und der Weise beeinflußt.—Aber, wenn wir uns das Spiel mit dem Eingeben eines Giftes denken können, warum nicht mit dem Eingeben eines Heilmittels? Aber auch dann kann das Schwergewicht der Vorhersage noch immer darauf ruhen, daß der *gesunde* Mensch *das* als Resultat ansieht. Oder, vielleicht: daß den gesunden Menschen *das* befriedigt.

"Folge mir, so wirst du das herauskriegen" sagt natürlich nicht: "Folge mir, dann wirst du mir folgen"—noch: "Rechne *so*, dann wirst du *so* rechnen."—Aber was heißt "Folge mir"? Im Sprachspiel kann es einfach ein Befehl sein: "Folge mir jetzt!"

Was ist der Unterschied zwischen dem Vorhersagen: "Wenn du richtig rechnest, wirst du *das* erhalten"—und: "Wenn du glauben wirst, daß du richtig rechnest, wirst du *das* erhalten"?

Wer sagt nun, daß in meinem obigen Sprachspiel die Vorhersage nicht das letztere bedeutet? Es scheint, sie bedeutet das nicht——aber wie *zeigt* sich das? Frage dich, *unter welchen Umständen* würde die Vorhersage das eine, unter welchen das andere vorherzusagen scheinen. Denn es ist klar: es kommt hier auf die übrigen Umstände an.

Wer mir vorhersagt, daß ich *das* herausbringen werde, sagt der nicht eben vorher, daß ich dieses Resultat für richtig halten werde?—"Aber" —sagst du vielleicht—"nur eben weil es wirklich richtig *ist*!"—Aber was heißt das: "Ich halte die Rechnung für richtig, weil sie richtig ist"?

Und doch kann man sagen: in meinem Sprachspiel denkt der Rechnende nicht daran, daß die Tatsache—daß er *dies* herausbringt—eine Eigentümlichkeit *seines* Wesens ist; die Tatsache erscheint ihm nicht als eine psychologische.

Eben stelle ich mir ihn unter dem Eindruck vor, daß er nur einem bereits vorhandenen Faden gefolgt ist. Und das Wie des Folgens als eine Selbstverständlichkeit hinnimmt; und nur *eine* Erklärung seiner Handlung kennt, nämlich: den Lauf des Fadens.

Just think of this procedure of prediction and confirmation as a special language-game—I mean: isolated from the rest of arithmetic and its application.

What is so singular about this game of prediction? What strikes me as singular would disappear if the prediction ran: "If you believe that you have gone by my example, then you will have produced *this*" or: "If everything seems correct to you, *this* will be the result". This game could be imagined in connexion with the administration of a particular poison and the prediction would be that the injection affects our faculties, our memory for example, in such-and-such a way.—But if we can imagine the game with the administration of a poison, then why not with the administration of a medicine? But even then the weight of the prediction may still always rest on the fact that the *healthy* man sees *this* as the result. Or perhaps: that *this* satisfies the healthy man.

"Do as I do, and this is what you will get" doesn't of course mean: "If you do as I do then you will do as I do"—nor: "Calculate like *this*, and you will calculate like *this*".—But what does "Do as I do" mean? In the language game—it can simply be an order: "Now do as I do!"

What is the difference between these predictions: "If you calculate correctly you will get *this* result"—and: "If you believe you are calculating correctly you will get *this* result"?

Now who says that the prediction in my language-game above does not mean the latter? It seems not to——but what *shews* this? Ask yourself *in what circumstances* the prediction would seem to predict the one thing and in what circumstances the other. For it is clear that it all depends on the rest of the circumstances.

If you predict that I shall get *this*, are you not simply predicting that I shall take this result as correct?—"But"—perhaps you say—"only because it really *is* correct!"—But what does it mean to say: "I take the calculation as correct because it is correct"?

And yet we can say: the person who is calculating in my language-game does not think of it as a peculiarity of *his* nature that he gets *this*; the fact does not appear to him as a psychological one.

I am imagining him as under the impression that he has only followed a thread that is already there, and accepting the How of the following as something that is a matter of course; and only knowing *one* explanation of his action, namely: how the thread runs.

Er läßt sich allerdings ablaufen, indem er der Regel oder den Beispielen folgt, aber was er tut, betrachtet er nun nicht als Besonderheit *seines* Ablaufs, er sagt nicht: "also *so* bin ich abgelaufen", sondern: "also *so* läuft es ab".

Aber wenn nun Einer dennoch am Ende der Rechnung in unserem Sprachspiel sagte: "also *so* bin ich abgelaufen!"—oder: "also *dieser* Ablauf befriedigt mich!"—kann ich nun sagen, er habe das ganze Sprachspiel mißverstanden? Doch gewiß nicht! Wenn er nicht sonst eine unerwünschte Anwendung von ihm macht.

Ist es nicht die *Anwendung* der Rechnung, die jene Auffassung hervorruft: daß die Rechnung abläuft und nicht wir?

Warum willst du die Mathematik immer unter dem Aspekt des Findens und nicht des Tuns betrachten?

Von großem Einflusse muß es sein, daß wir die Wörter "richtig" und "wahr" und "falsch", und die Form der Aussage, im Rechnen gebrauchen. (Kopfschütteln und Nicken.)

Warum soll ich sagen, daß das Wissen, daß alle Menschen, die Rechnen gelernt haben, *so* rechnen, kein *mathematisches* Wissen ist? Weil es auf einen andern Zusammenhang hinzudeuten scheint.

Ist also Berechnen, was Einer durch Rechnung herauskriegen wird, schon angewandte Mathematik?——und also auch: Berechnen, was ich selber herauskriegen werde?

5. Es ist ja gar kein Zweifel, daß mathematische Sätze *in gewissen Sprachspielen* die Rolle von Regeln der Darstellung spielen, im Gegensatz zu Sätzen, welche beschreiben.

Aber das sagt nicht, daß dieser Gegensatz nicht nach allen Richtungen hin abfällt. Und *das* wieder nicht, daß er nicht von großer Wichtigkeit ist.

Was der mathematische Beweis zeigt, wird als interne Relation hingestellt, und dem Zweifel entzogen.

6. Was ist einem mathematischen Satz und einem mathematischen Beweis gemein, daß sie beide "mathematisch" heißen?

Nicht: daß der mathematische Satz mathematisch bewiesen sein muß; nicht: daß der mathematische Beweis einen mathematischen Satz beweisen muß.

Was hat der unbewiesene Satz (das Axiom) Mathematisches? was hat er gemein mit einem mathematischen *Beweis*?

Soll ich antworten: "Die Schlußregeln des mathematischen Beweises sind immer mathematische Sätze"? Oder: "Mathematische Sätze und Beweise dienen dem Schließen"? Das wäre schon näher dem Wahren.

He does indeed set himself off when he follows the rule or the examples; however, he does not regard what he does as a peculiarity of *his* course; he says, not: "so *that's* how I went", but: "so *that's* how it goes".

But now, suppose someone did say at the end of the calculation in our language-game: "so *that's* how I went"—or: "so *this* course satisfies me"—can I say he has misunderstood the whole language-game? Certainly not! So long as he does not make some further unwelcome application of it.

Isn't it the *application* of the calculation that produces this conception of its being the calculation, not ourselves, that takes this course?

Why do you want always to consider mathematics under the aspect of discovering and not of doing?

It must influence us a great deal that in calculating we use the words "correct" and "true" and "false" and the form of statements. (Shaking and nodding one's head.)

Why ought I to say that the knowledge that all human beings who have learned to calculate calculate like *this* is not *mathematical* knowledge? Because it points to a different context.

Then is calculating the results of someone else's calculating already applied mathematics?—and hence calculating my own results too?

5. There is no doubt at all that *in certain language-games* mathematical propositions play the part of rules of description, as opposed to descriptive propositions.

But that is not to say that this contrast does not shade off in all directions. And *that* in turn is not to say that the contrast is not of the greatest importance.

What is proved by a mathematical proof is set up as an internal relation and withdrawn from doubt.

6. What is common to a mathematical proposition and a mathematical proof, that they are both called "mathematical"?

Not, that the mathematical proposition has to be proved mathematically; not, that the mathematical proof has to prove a mathematical proposition.

What is mathematical about an unproved proposition (an axiom)? what has it in common with a mathematical *proof*?

Should I answer: "The inference rules of mathematical proof are always mathematical propositions"? Or: "Mathematical propositions and proofs subserve inference"? That would be closer to the truth.

Wir sagen: der Beweis sei ein Bild. Aber dies Bild bedarf doch der Approbation, die wir ihm beim Nachrechnen erteilen.—

Wohl wahr; aber wenn es von dem Einen die Approbation erhielte, von dem Andern nicht, und sie sich nicht *verständigen* könnten—hätten wir dann ein Rechnen?

Also ist es nicht die Approbation allein, die es zur Rechnung macht, sondern die Übereinstimmung der Approbationen.

Denn es ließe sich ja auch ein Spiel denken, in welchem Menschen durch Ausdrücke, etwa ähnlich denen allgemeiner Regeln, angeregt, für bestimmte praktische Aufgaben, also ad hoc, sich Zeichenfolgen einfallen lassen, und daß sich dies sogar bewährte. Und hier brauchen die 'Rechnungen', wenn man sie so nennen wollte, nicht mit einander übereinstimmen. (Hier könnte man von 'Intuition' reden.)

Die Übereinstimmung der Approbationen ist die Vorbedingung unsers Sprachspiels, sie wird nicht in ihm konstatiert.

Wenn die Rechnung ein Experiment ist, und *die Bedingungen sind erfüllt*, dann müssen wir als Ausgang anerkennen, was kommt; und wenn die Rechnung ein Experiment ist, so ist der Satz, daß sie das und das ergibt, doch der Satz, daß unter solchen Bedingungen diese Art von Zeichen entsteht. Und entsteht also unter diesen Bedingungen einmal ein, einmal ein anderes Resultat, so darf man nun nicht sagen "da stimmt etwas nicht", oder "beide Rechnungen können nicht in Ordnung sein", sondern man müßte sagen: diese Rechnung ergibt nicht immer das gleiche Resultat (*warum* muß nicht bekannt sein). Aber obwohl der Vorgang nun ebenso interessant, ja vielleicht noch interessanter geworden ist, ist keine Rechnung mehr vorhanden. Und das ist wieder eine grammatische Bemerkung über den Gebrauch des Wortes "Rechnung". Und natürlich hat diese Grammatik eine Pointe.

Was heißt es, sich über einen Unterschied im Resultat einer Rechnung *verständigen*? Es heißt doch, zu einem gleichförmigen Rechnen zu gelangen. Und kann man sich nicht verständigen, so kann nun Einer nicht sagen, der Andre rechne auch; nur eben mit anderen Ergebnissen.

7. Wie ist es nun,—soll ich sagen: Der gleiche Sinn könne nur *einen* Beweis haben? Oder: wenn ein Beweis gefunden wird, ändere sich der Sinn?

Freilich würden Einige sich dagegen wehren, sagen: "So kann man also nie den Beweis eines Satzes finden, denn, hat man ihn gefunden, so ist er nicht mehr Beweis *dieses* Satzes." Aber das sagt noch gar nichts.—

We say that a proof is a picture. But this picture stands in need of ratification, and that we give it when we work over it.—

True enough; but if it got ratification from one person, but not from another, and they could not *come to any understanding*—would what we had here be calculation?

So it is not the ratification by itself that makes it calculation but the agreement of ratifications.

For another game could quite well be imagined, in which people were prompted by expressions (similar perhaps to general rules) to let sequences of signs come to them for particular practical purposes, i.e. *ad hoc*; and that this even proved to pay. And here the 'calculations' if we choose to call them that, do not have to agree with one another. (Here we might speak of 'intuition'.)

The agreement of ratifications is the pre-condition of our language-game, it is not affirmed in it.

If a calculation is an experiment and the *conditions are fulfilled*, then we must accept whatever comes, as the result; and if a calculation is an experiment then the proposition that it yields such and such a result is after all the proposition that under such conditions this kind of sign makes its appearance. And if under these conditions one result appears at one time and another at another, we have no right to say "there's something wrong here" or "both calculations cannot be all right", but we should have to say: this calculation does not always yield the same result (*why* need not be known). But although the procedure is now just as interesting, perhaps even more interesting, what we have here *now* is no longer calculation. And this is of course a grammatical remark about the use of the word "calculation". And this grammar has of course a point.

What does it mean to reach an *understanding* about a difference in the result of a calculation? It surely means to arrive at a calculation that is free of discrepancy. And if we can't reach an understanding, then the one cannot say that the other is calculating too, only with different results.

7. Now how about this—ought I to say that the same sense can only have *one* proof? Or that when a proof is found the sense alters?

Of course some people would oppose this and say: "Then the proof of a proposition cannot ever be found, for, if it has been found, it is no longer the proof of *this* proposition". But to say this is so far to say nothing at all.—

Es kommt eben darauf an, *was* den Sinn des Satzes festlegt. Wovon wir sagen wollen, es lege den Sinn des Satzes fest. Der Gebrauch der Zeichen muß ihn festlegen; aber was rechnen wir zum Gebrauch?—

Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide erweisen ihn als ein passendes Instrument zu dem gleichen Zweck.

Und der Zweck ist eine Anspielung auf Außermathematisches.

Ich sagte einmal: 'Wenn du wissen willst, was ein mathematischer Satz sagt, schau was sein Beweis beweist.' Nun, ist darin nicht Wahres und Falsches? Ist der Sinn, der Witz eines mathematischen Satzes wirklich klar, sobald wir nur dem Beweis folgen können?

Wenn zwei Beweise denselben Satz beweisen, so kann man sich allerdings Umstände denken, in denen die ganze diese Beweise verbindende Umgebung wegfiele, sodaß sie allein und nackt dastünden, und kein Grund vorhanden wäre, zu sagen, sie hätten eine gemeinsame Pointe, sie bewiesen denselben Satz.

Man muß sich nur denken, daß die Beweise ohne den sie beide umhüllenden und verbindenden Organismus der Anwendungen, sozusagen nackt und bloß dastünden. (Wie zwei Knochen aus dem umgebenden mannigfachen Zusammenhang des Organismus gelöst; in dem allein wir gewohnt sind, an sie zu denken.)

Wenn wir von verschiedenen Bilderreihen sagen, sie demonstrierten, z.B., daß $25 \times 25 = 625$, so ist leicht genug zu erkennen, was den *Ort* dieses Satzes fixiert, den beide Wege erreichen.

Der neue Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein; dabei findet oft ein Übersetzen einer Art von Operationen in eine gänzlich andere statt. Wie wenn wir Gleichungen in Kurven übertragen. Und dann sehen wir etwas für die Kurven ein, und dadurch für die Gleichungen. Aber mit welchem Rechte überzeugen wir uns durch Gedankengänge, die dem Gegenstand unsrer Gedanken scheinbar ganz fernliegen?

Nun, unsre Operationen liegen jenem Gegenstand auch nicht ferner als, etwa, das Dividieren im Dezimalsystem dem Verteilen von Nüssen. Besonders, wenn man sich vorstellt (was man leicht kann) daß jene Operation ursprünglich zu einem andern Zweck als dem des Teilens u. dergl. erfunden worden wäre.

Fragst du: "Mit welchem Recht?" so ist die Antwort: Vielleicht mit gar keinem.—Mit welchem Recht sagst du, daß die Fortsetzung dieses Systems mit jenem immer parallel laufen wird? (Es ist als ob du Zoll und Fuß *beide* als Einheit festsetztest und behauptetest, $12n$ Zoll werden immer mit n Fuß gleichlang sein.)

It all depends *what* settles the sense of a proposition, what we choose to say settles its sense. The use of the signs must settle it; but what do we count as the use?—

That these proofs prove the same proposition means, e.g.: both demonstrate it as a suitable instrument for the same purpose.

And the purpose is an allusion to something extra-mathematical.

I once said: 'If you want to know what a mathematical proposition says, look at what its proof proves'. Now is there not both truth and falsehood in this? For is the sense, the point, of a mathematical proposition really clear as soon as we can follow the proof?

When two proofs prove the same proposition it is possible to imagine circumstances in which the whole surrounding connecting these proofs fell away, so that they stood naked and alone, and there were no cause to say that they had a common point, proved the same proposition.

One has only to imagine the proofs without the organism of applications which envelopes and connects the two of them: as it were stark naked. (Like two bones separated from the surrounding manifold context of the organism; in which alone we are accustomed to think of them.)

When we say of different sequences of configuration that they shew e.g. that $25 \times 25 = 625$, it is easy enough to recognize what fixes the *place* of this proposition, which is reached by the two routes.

A new proof gives the proposition a place in a new system; here there is often a translation of one kind of operation into a quite different kind. As when we translate equations into curves. And then we realize something about curves and, by means of that, about equations. But what right have we to be convinced by lines of thought which are apparently quite remote from the object of our thought?

Well, our operations are not more remote from that object than is, say, dividing in the decimal system from sharing out nuts. Especially if one imagines (what is quite easy to imagine) that operation as originally invented for a different purpose from that of making divisions and the like.

If you ask: "What right have we?" the answer is: perhaps none.— What right have you to say that the development of this system will always run parallel with that one? (It is as if you were to fix *both* inch and foot as units, and assert that $12n$ inches will always be the same length as n feet.)

8. Dem Russellschen '$\sim f(f)$' fehlt vor allem die Anwendung, und daher der Sinn.

Wendet man diese Form aber dennoch an, dann ist nicht gesagt, daß '$f(f)$' ein Satz in irgendeinem gewohnten Sinn sein muß, oder '$f(\xi)$' eine Satzfunktion. Denn der Begriff des Satzes, außer dem des Satzes der Logik, ist ja durch Russell nur in allgemeinen, herkömmlichen Zügen erklärt.

Man sieht hier auf die Sprache, ohne auf das Sprachspiel zu sehen.

Nimm an, man rechnete mit Zahlen und verwendet manchmal auch die Division durch Ausdrücke von der Form $(n-n)$, und erhielte auf diese Weise hie und da andere als unsere normalen Resultate des Multiplizierens, etc.. Das störe aber niemand.—Vergleiche damit: Man legt Listen, Verzeichnisse, von Personen an, aber nicht wie wir es tun, alphabetisch; und so kommt es, daß der gleiche Name in mancher Liste öfter als einmal vorkommt.——Aber nun kann man annehmen: daß das niemandem auffällt; oder, daß die Leute es sehen, es aber ruhig hinnehmen. Wie man Leute eines Stammes denken könnte, die, wenn sie Münzen zur Erde fallen lassen, es nicht der Mühe wert halten, sie aufzuheben. (Sie haben dann etwa eine Redensart: "Es gehört den Andern," oder dergleichen.)

Nun aber ändert sich die Zeit und die Menschen fangen an (zuerst nur wenige) Exaktheit zu fordern. Mit Recht? mit Unrecht?—Waren die früheren Verzeichnisse *nicht* eigentlich Verzeichnisse?—

Sagen wir, wir erhielten manche unsrer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Sind sie dadurch illegitim?——Aber wenn wir nun solche Resultate durchaus nicht anerkennen wollen und doch fürchten, es könnten welche durchschlüpfen.—Nun, dann haben wir also eine Idee, die einem neuen Kalkül als Vorbild dienen könnte. Wie man die Idee zu einem neuen Spiel haben kann.

Der Russellsche Widerspruch ist nicht, weil er ein Widerspruch ist, beunruhigend, sondern weil das ganze Gewächs, dessen Ende er ist, ein Krebsgewächs ist, das ohne Zweck und Sinn aus dem normalen Körper herauszuwachsen scheint.

Kann man nun sagen: "Wir wollen einen Kalkül, der uns sicherer die Wahrheit sagt"?

Aber du kannst doch einen Widerspruch nicht gelten lassen!—Warum nicht? Wir gebrauchen diese Form ja manchmal in unsrer Rede, freilich selten—aber man könnte sich eine Sprachtechnik denken, in der er ein ständiges Implement wäre.

8. What Russell's '$\sim f(f)$' lacks above all is application, and hence meaning.

If we do apply this form, however, that is not to say that '$f(f)$' need be a proposition in any ordinary sense or '$f(\xi)$' a propositional function. For the concept of a proposition, apart from that of a proposition of logic, is only explained in Russell in its general conventional features.

Here one is looking at language without looking at the language-game.

Suppose that people calculated with numbers, and sometimes did divisions by expressions of the form $(n-n)$, and in this way occasionally got results different from the normal results of multiplying etc.. But that nobody minded this.—Compare with this: lists, rolls, of people are prepared, but not alphabetically as we do it; and in this way it happens that in some lists the same name appears more than once.—— But now it can be supposed that this does not strike anyone; or that people see it, but accept it without worrying. As we could imagine people of a tribe who, when they dropped coins on the ground, did not think it worth while to pick them up. (They have, say, an idiom for these occasions: "It belongs to the others" or the like.)

But now times have changed and people (at first only a few) begin to demand exactness. Rightly, wrongly?—Were the earlier lists *not* really lists?—

Say we quite often arrived at the results of our calculations through a hidden contradiction. Does that make them illegitimate?——But suppose that we now absolutely refuse to accept such results, but still are afraid that some might slip through.—Well then, in that case we have an idea which might serve as a model for a new calculus. As one can have the idea of a new game.

The Russellian contradiction is disquieting, not because it is a contradiction, but because the whole growth culminating in it is a cancerous growth, seeming to have grown out of the normal body aimlessly and senselessly.

Now can we say: "We want a calculus which more certainly tells us the truth"?

But you can't allow a contradiction to stand!—Why not? We do sometimes use this form in our talk, of course not often—but one could imagine a technique of language in which it was a regular instrument.

Man könnte z.B. von einem Objekt in Bewegung sagen, es existiere und existiere nicht an diesem Ort; Veränderung könnte durch den Widerspruch ausgedrückt werden.

Nimm ein Thema wie das Haydnsche (Chorale St. Antons), nimm den Teil einer der Brahmsschen Variationen, der dem ersten Teil des Themas entspricht, und stell die Aufgabe, den zweiten Teil der Variation im Stil ihres ersten Teiles zu konstruieren. Das ist ein Problem von der Art der mathematischen Problemen. Ist die Lösung gefunden, etwa wie Brahms sie gibt, so zweifelt man nicht;—dies ist die Lösung.

Mit diesem Weg sind wir einverstanden. Und doch ist es hier klar, daß es leicht verschiedene Wege geben kann, auf deren jedem wir einverstanden sein können, deren jeden wir konsequent nennen könnten.

'Wir machen lauter legitime—d.h. in den Regeln erlaubte—Schritte, und auf einmal kommt ein Widerspruch heraus. Also ist das Regelverzeichnis, wie es ist, nichts nutz, denn der Widerspruch wirft das ganze Spiel um.' Warum läßt du ihn es umwerfen?

Aber ich will, daß man nach der Regel soll *mechanisch* weiterschließen können, ohne zu widersprechenden Resultaten zu gelangen. Nun, welche Art der Voraussicht willst du? Eine, die dein gegenwärtiger Kalkül nicht zuläßt? Nun, dadurch ist er nicht ein schlechtes Stück Mathematik, oder, nicht im vollsten Sinne Mathematik. Der Sinn des Wortes "mechanisch" verführt dich.

9. Wenn du zu einem praktischen Zweck einen Widerspruch mechanisch vermeiden willst, wie dein Kalkül es jetzt nicht kann, so ist das etwa, wie wenn du nach einer Konstruktion des . . .-Ecks suchst, das du bis jetzt nur durch Probieren hast zeichnen können; oder nach einer Lösung der Gleichung dritten Grades, die du bisher nur approximiert hast.

Nicht schlechte Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück Mathematik erfunden.

Nimm an, ich wollte eine Irrationalzahl so bestimmen, daß in ihrer Entwicklung nicht die Figur '777' vorkommt. Ich könnte π nehmen und bestimmen: wenn jene Figur entsteht, setzen wir statt ihr '000'. Nun sagt man mir: das genügt nicht, denn der, welcher die Stellen berechnet, ist verhindert, auf die früheren zurückzuschauen. Nun brauche ich einen anderen Kalkül; einen in dem ich mich zum Voraus versichern kann, er könne '777' nicht liefern. Ein mathematisches Problem.

'Solange die Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen ist, kann ich nie ganz sicher sein, daß mir jemand, der gedankenlos, aber gemäß den Regeln, rechnet, nicht irgend etwas Falsches herausrechnen wird.'

It might for example be said of an object in motion that it existed and did not exist in this place; change might be expressed by means of contradiction.

Take a theme like that of Haydn's (St. Antony Chorale), take the part of one of Brahms's variations corresponding to the first part of the theme, and set the task of constructing the second part of the variation in the style of its first part. That is a problem of the same kind as mathematical problems are. If the solution is found, say as Brahms gives it, then one has no doubt;—that is the solution.

We are agreed on this route. And yet, it is obvious here that there may easily be different routes, on each of which we can be in agreement, each of which we might call consistent.

'We take a number of steps, all legitimate—i.e. allowed by the rules—and suddenly a contradiction results. So the list of rules, as it is, is of no use, for the contradiction wrecks the whole game!' Why do you have it wreck the game?

But what I want is that one should be able to go on inferring *mechanically* according to the rule without reaching any contradictory results. Now, what kind of provision do you want? One that your present calculus does not allow? Well, that does not make that calculus a bad piece of mathematics,—or not mathematics in the fullest sense. The meaning of the word "mechanical" misleads you.

9. When, for some practical purpose, you want to avoid a contradiction mechanically, as your calculus so far cannot do, this is e.g. like looking for a construction of the . . .-gon, which you have up to now only been able to draw by trial and error; or for a solution of a third degree equation, to which you have so far only approximated.

What is done here is not to improve bad mathematics, but to create a new bit of mathematics.

Suppose I wanted to determine that the pattern '777' did not occur in the expansion of an irrational number. I might take π and settle that if that pattern occurs, we replace it by '000'. Now I am told: that is not enough, for whoever is calculating the places is prevented from looking back to the earlier ones. Now I need another calculus; one in which I can be assured in advance that it cannot yield '777'. A mathematical problem.

'So long as freedom from contradiction has not been proved I can never be quite certain that someone who calculates without thinking, but according to the rules, won't work out something wrong.' Thus

Solange also jene Voraussicht nicht gewonnen ist, ist der Kalkül unzuverläßig.—Aber denke, ich fragte: "*Wie* unzuverläßig?"—Wenn wir von Graden den Unzuverläßigkeit redeten, könnten wir ihr nicht dadurch den metaphysischen Stachel nehmen?

Waren die ersten Regeln des Kalküls nicht gut? Nun, wir gaben sie nur, *weil* sie gut waren.—Wenn sich später ein Widerspruch ergibt,—haben sie *nicht* ihre Pflicht getan? Nicht doch, sie waren für diese Anwendung nicht gegeben worden.

Ich kann meinem Kalkül eine bestimmte Art der Voraussicht geben wollen. Sie macht ihn nicht zu einem *eigentlichen* Stück Mathematik, aber, etwa, zu gewissem Zweck brauchbarer.

Die Idee des Mechanisierens der Mathematik. Die Mode des axiomatischen Systems.

10. Aber nehmen wir an, die 'Axiome' und 'Schlußweisen' seien nicht nur irgendwelche Konstruktionsweisen, sondern auch durchaus überzeugende! Nun, dann heißt das, daß es Fälle gibt, in denen die Konstruktion aus diesen Bausteinen *nicht* überzeugt.

Und tatsächlich sind die logischen Axiome gar nicht überzeugend, wenn wir für die Satzvariablen Strukturen einsetzen, die niemand ursprünglich vorhergesehen hat, als man nämlich der Wahrheit der Axiome (im Anfang) die unbedingte Anerkennung gab.

Wie aber, wenn man sagt: die Axiome und Schlußweisen sollen doch so gewählt werden, daß sie keinen falschen Satz beweisen können?

'Wir wollen nicht nur einen ziemlich zuverlässigen, sondern einen *absolut* zuverlässigen Kalkül. Die Mathematik muß *absolut* sein.'

Nimm an, ich hätte die Regeln für's Spiel 'Fuchs und Jäger' aufgestellt—stellte mir das Spiel unterhaltlich und hübsch vor.—Später aber finde ich, daß die Jäger immer gewinnen können, wenn man einmal weiß, wie.

Ich bin nun, sagen wir, mit meinem Spiel unzufrieden. Die von mir gegebenen Regeln haben ein Resultat gezeitigt, das ich nicht vorausgesehen hatte und das mir das Spiel verdirbt.

11. "N. kam darauf, daß man bei Berechnungen oft durch Ausdrücke der Form '$(n-n)$' gekürzt hatte. Er wies die dadurch entstehende Diskrepanz der Resultate nach und zeigte, wie Menschenleben durch diese Art des Rechnens verloren worden waren."

Aber nehmen wir an, auch die Andern hätten jene Widersprüche gemerkt, nur sich nicht darüber Rechenschaft geben können, woher sie kämen. Sie hätten, sozusagen, mit schlechtem Gewissen gerechnet. Sie hätten zwischen widersprechenden Resultaten *eins* gewählt, aber so long as this provision has not been obtained the calculus is untrustworthy.—But suppose that I were to ask: "*How* untrustworthy?" —If we spoke of degrees of untrustworthiness mightn't this help us to extract the metaphysical thorn?

Were the first rules of the calculus not good? Well, we gave them only *because* they were good.—If a contradiction results later,—have they *failed* in their office? No, they were not given for this application.

I may want to supply my calculus with a particular kind of provision. This does not make it into a *proper* piece of mathematics, but e.g. into one that is more useful for a certain purpose.

The idea of the mechanization of mathematics. The fashion of the axiomatic system.

10. But suppose the 'axioms' and 'methods of inference' are not just some kind of construction, but are absolutely convincing. Well, this means that there are cases in which a construction out of these elements is *not* convincing.

And the logical axioms are in fact not at all convincing if for the propositional variables we substitute structures which no one originally foresaw as possible values, when, that is, we began by acknowledging the truth of the axioms absolutely.

But what about saying: the axioms and methods of inference surely ought to be so chosen that they cannot prove any false proposition?

'We want, not just a fairly trustworthy, but an *absolutely* trustworthy calculus. Mathematics must be *absolute*.'

Suppose I had erected rules for a game of 'hare and hounds'—fancying it to be a nice amusing game.—Later, however, I find that the hounds can always win once one knows how.

Now, let's say, I am dissatisfied with my game. The rules which I gave brought forth a result which I did not foresee and which spoils the game for me.

11. "N. came upon the fact that in calculations there is often reduction by expressions of the form '$(n-n)$'. He pointed out the consequent discrepancy of results and shewed how many human lives had been lost through this way of calculating."

But let us suppose that other people too had noticed these contradictions, only they had not been able to give any account of their source. They calculated as it were with a bad conscience. They had chosen *one* among contradictory results but with uncertainty, whereas mit Unsicherheit, während ihnen N's Entdeckung vollkommene Sicherheit gegeben hätte.—Aber sagten sie sich: "Mit unserm Kalkül ist etwas nicht in Ordnung"? War ihre Unsicherheit von der Art der unseren, wenn wir eine physikalische Berechnung anstellen, aber nicht sicher sind, ob diese Formeln hier wirklich das richtige Resultat ergeben? Oder war es ein Zweifel darüber, ob ihr Rechnen wirklich ein Rechnen sei? In diesem Falle: was taten sie, um den Übelstand abzustellen?

Die Leute haben bisher nur verhältnismäßig selten vom Kürzen durch Ausdrücke vom Werte o Gebrauch gemacht. Einmal aber entdeckt jemand, daß sie auf diese Weise wirklich jedes beliebige Resultat ausrechnen können.—Was tun sie nun? Nun, wir könnten uns sehr verschiedenes vorstellen. Sie können, z.B. nun erklären, diese Art des Rechnens habe damit ihren Witz verloren, und *so* sei künftig nicht mehr zu rechnen.

'Er glaubt, er rechnet'—möchte man sagen—'er rechnet tatsächlich nicht.'

12. Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat, sobald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann—hat sie keinen gehabt, solang ich das *nicht* wußte?

Ich mag freilich jetzt alle diese Rechnungen als nichtig erklären—ich führe sie eben jetzt nicht mehr aus——aber waren es darum keine Rechnungen?

Ich habe einmal, ohne es zu wissen, über einen versteckten Widerspruch geschlossen. Ist mein Resultat nun falsch, oder doch unrecht erworben?

Wenn der Widerspruch so gut versteckt ist, daß ihn niemand merkt, warum sollen wir nicht das, was wir jetzt tun, das eigentliche Rechnen nennen?

Wir sagen, der Widerspruch würde den Kalkül *vernichten*. Aber wenn er nun sozusagen in winzigen Dosen aufträte, gleichsam blitzweise, nicht als ein ständiges Rechenmittel, würde er da den Kalkül auch vernichten?

Denk' dir, die Leute hätten sich eingebildet $(a + b)^2$ müsse gleich sein $a^2 + b^2$. (Ist das eine Einbildung von der Art: es müsse eine Dreiteilung des Winkels mit Lineal und Zirkel geben?) Kann man sich also einbilden, zwei Rechnungsweisen müßten dasselbe ergeben, wenn es nicht dasselbe ist?

Ich addiere eine Kolumne, addiere sie auf verschiedene Weise, nehme z.B. die Zahlen in verschiedener Reihenfolge und kriege immer wieder, regellos, etwas anderes heraus.—Ich werde vielleicht sagen: "Ich bin ganz verwirrt; ich mache entweder regellos Rechenfehler, N's discovery would have made them quite certain.—But did they tell themselves: "There's something wrong with our calculus"? Was their uncertainty of the same kind as ours when we do a physical calculation but are not certain whether these formulae really give the correct result here? Or was it a doubt whether their calculating was really calculating? In this case: what did they do to get over the difficulty?

So far those people have only used reduction by expressions of value 0 fairly seldom. But at some time somebody discovers that they can actually arrive at any arbitrary result in this way.—What do they do now? Well, we could imagine very different things. They may now, e.g., state that this kind of calculation has lost its point, and that in future people are not to calculate in *this* way any more.

'He believes that he is calculating'—one would like to say—'but as a matter of fact he is not calculating.'

12. If the calculation lost its point for me as soon as I knew I could work out any arbitrary result—did it have none so long as I did *not* know that?

I may of course now declare all these calculations to be null—for I have given up doing them now——but does that mean that they weren't calculations?

I at one time inferred *via* a contradiction without realizing it. Is my result then wrong, or at any rate wrongly got?

If the contradiction is so well hidden that no one notices it, why shouldn't we call what we do now proper calculation?

We say that the contradiction would *nullify* the calculus. But suppose it only occurred in tiny doses in lightning flashes as it were, not as a constant instrument of calculation, would it nullify the calculus?

Imagine people had fancied that $(a + b)^2$ must be equal to $a^2 + b^2$. (Is this a fancy of the same kind as that there must be a trisection of the angle by ruler and compass?) Is it possible, then, to fancy that two ways of calculating had to yield the same result, if it is not the same?

I add up a column, doing it in a variety of ways (e.g. I take the numbers in a different order), and I keep on getting random different results.—I shall perhaps say: "I am in a complete muddle, either I am making random mistakes in calculating, or I am making certain oder ich mache gewisse Rechenfehler in bestimmten Verbindungen: etwa auf '$6+3=9$' sage ich immer '$7+7=15$'."

Oder ich könnte mir denken, daß ich plötzlich einmal in der Rechnung subtrahiere statt zu addieren, aber nicht denke, daß ich nun etwas anderes tue.

Nun könnte es so sein, daß ich den Fehler nicht fände und mich für geistesgestört hielte. Aber das müßte meine Reaktion nicht sein.

'Der Widerspruch hebt den Kalkül auf'—woher diese Sonderstellung? Sie ist, glaube ich, durch etwas Phantasie gewiß zu erschüttern.

Um diese philosophischen Probleme zu lösen, muß man Dinge miteinander vergleichen, die zu vergleichen noch niemandem ernstlich eingefallen ist.

Man kann auf diesem Gebiete allerlei fragen, was zwar zur Sache gehört, aber nicht durch die Mitte derselben führt.

Eine bestimmte Reihe von Fragen führt durch die Mitte, ins Freie. Die andern werden nebenbei beantwortet.

Den Weg durch die Mitte zu finden ist ungeheuer schwer.

Er geht über *neue* Beispiele und Vergleiche. Die abgebrauchten zeigen uns ihn nicht.

Nehmen wir an, der Russellsche Widerspruch wäre nie gefunden worden. Nun—ist es ganz klar, daß wir dann einen falschen Kalkül besessen hätten? Gibt es denn hier nicht verschiedene Möglichkeiten?

Und wie, wenn man den Widerspruch zwar gefunden, sich aber weiter nicht über ihn aufgeregt und etwa bestimmt hätte, es seien aus ihm keine Schlüsse zu ziehen. (Wie ja auch niemand aus dem 'Lügner' Schlüsse zieht.) Wäre das ein offenbarer Fehler gewesen?

"Aber dann ist doch das kein eigentlicher Kalkül! Er verliert ja alle *Strenge*!" Nun, nicht *alle*. Und er hat nur dann nicht die volle Strenge, wenn man ein bestimmtes Ideal der Strenge verfolgt, einen bestimmten Stil der Mathematik baut.

'Aber ein Widerspruch in der Mathematik verträgt sich doch nicht mit der Anwendung der Mathematik.

'Er macht, wenn er konsequent, d.h. zum Erzeugen beliebiger Resultate verwendet wird, die Anwendung der Mathematik zu einer Farce, oder einer Art überflüssiger Zeremonie. Seine Wirkung ist etwa die, unstarrer Maßstäbe, die durch Dehnen und Zusammendrücken verschiedene Messungsresultate zulassen.' Aber war das Messen durch Abschreiten *kein* Messen? Und wenn die Menschen mit Maßstäben aus Teig arbeiteten, wäre das an sich schon falsch zu nennen?

mistakes in particular connexions: e.g. always saying '$7 + 7 = 15$' after '$6 + 3 = 9$'."

Or I might imagine that suddenly, once in the sum, I subtract instead of adding, but don't think I am doing anything different.

Now it might be that I didn't find the mistake and thought I had lost my wits. But this would not have to be my reaction.

'Contradiction destroys the calculus'—what gives it this special position? With a little imagination, I believe, it can certainly be demolished.

To resolve these philosophical problems one has to compare things which it has never seriously occurred to anyone to compare.

In this field one can ask all sorts of things which, while they belong to the topic, still do not lead through its centre.

A particular series of questions leads through the centre and out into the open. The rest get answered incidentally.

It is enormously difficult to find the path through the centre.

It goes *via new* examples and comparisons. The hackneyed ones don't shew us it.

Let us suppose that the Russellian contradiction had never been found. Now—is it quite clear that in that case we should have possessed a false calculus? For aren't there various possibilities here?

And suppose the contradiction had been discovered but we were not excited about it, and had settled e.g. that no conclusions were to be drawn from it. (As no one does draw conclusions from the 'Liar'.) Would this have been an obvious mistake?

"But in that case it isn't a proper calculus! It loses all *strictness*!" Well, not *all*. And it is only lacking in full strictness, if one has a particular ideal of strictness, wants a particular style in mathematics.

'But a contradiction in mathematics is incompatible with its application.

'If it is consistently applied, i.e. applied to produce arbitrary results, it makes the application of mathematics into a farce, or some kind of superfluous ceremony. Its effect is e.g. that of non-rigid rulers which permit various results of measuring by being expanded and contracted.' But was measuring by pacing not measuring at all? And if people worked with rulers made of dough, would that of itself have to be called wrong?

Könnte man sich nicht leicht Gründe denken, weshalb eine gewisse Dehnbarkeit der Maßstäbe erwünscht sein könnte?

"Aber ist es nicht richtig, die Maßstäbe aus immer härterem, unveränderlicherem Material herzustellen?" Gewiß ist es richtig; wenn man so will!

"Also redest du dem Widerspruch das Wort?!" Durchaus nicht; so wenig, wie den weichen Maßstäben.

Ein Fehler ist zu vermeiden: Man denkt, der Widerspruch *muß* sinnlos sein: d.h., wenn man z.B. die Zeichen 'p', '$\sim$', '.' *konsequent* benützt, so kann '$p.\sim p$' nichts sagen.—Aber denke: was heißt, den und den Gebrauch 'konsequent' fortsetzen? ('Dieses Kurvenstück konsequent fortzusetzen.')

13. Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?! Sie braucht sie, glaube ich, ebenso wenig, wie die Sätze, die von physikalischen Gegenständen—oder die, welche von Sinneseindrücken handeln, eine *Analyse*. Wohl aber bedürfen die mathematischen, sowie jene andern Sätze, eine Klarlegung ihrer Grammatik.

Die *mathematischen* Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Mathematik so wenig zu Grunde, wie der gemalte Fels die gemalte Burg trägt.

'Aber wurde die Fregesche Logik durch den Widerspruch zur Grundlegung der Arithmetik nicht untauglich?' Doch! Aber wer sagte denn auch, daß sie zu diesem Zweck tauglich sein müsse?!

Man könnte sich sogar denken, daß man die Fregesche Logik einem Wilden als Instrument gegeben hätte, um damit arithmetische Sätze abzuleiten. Er habe den Widerspruch abgeleitet, ohne zu merken, daß es einer ist, und aus ihm nun beliebige wahre und falsche Sätze.

'Ein guter Engel hat uns bisher bewahrt, *diesen* Weg zu gehen.' Nun, was willst du mehr? Man könnte, glaube ich, sagen: Ein guter Engel wird immer nötig sein, was immer du tust.

14. Man sagt: das Rechnen sei ein Experiment, um dadurch zu zeigen wie es so praktisch sein kann. Denn vom Experiment weiß man, daß es wirklich praktischen Wert hat. Nur vergißt man, daß es diesen Wert besitzt vermöge einer Technik, die ein naturgeschichtliches Faktum ist, deren Regeln aber nicht die Rolle von Sätzen der Naturgeschichte haben.

"Die Grenzen der Empirie."—(Leben wir, weil es praktisch ist zu leben? Denken wir, weil Denken praktisch ist ?)

Couldn't reasons be easily imagined, on account of which a certain elasticity in rulers might be desirable?

"But isn't it right to manufacture rulers out of ever harder, more unalterable material?" Certainly it is right; if that is what one wants!

'Then are you in favour of contradiction?' Not at all; any more than of soft rulers.

There is *one* mistake to avoid: one thinks that a contradiction *must* be senseless: that is to say, if e.g. we use the signs 'p', '$\sim$', '.' *consistently*, then '$p . \sim p$' cannot say anything.—But think: what does it mean to continue such and such a use 'consistently'? ('A consistent continuation of this bit of a curve.')

13. What does mathematics need a foundation for? It no more needs one, I believe, than propositions about physical objects—or about sense impressions, need an *analysis*. What mathematical propositions do stand in need of is a clarification of their grammar, just as do those other propositions.

The *mathematical* problems of what is called foundations are no more the foundation of mathematics for us than the painted rock is the support of a painted tower.

'But didn't the contradiction make Frege's logic useless for giving a foundation to arithmetic?' Yes, it did. But then, who said that it had to be useful for this purpose?

One could even imagine a savage's having been given Frege's logic as an instrument with which to derive arithmetical propositions. He derived the contradiction unawares, and now he derives arbitrary true and false propositions from it.

'Up to now a good angel has preserved us from going *this* way.' Well, what more do you want? One might say, I believe: a good angel will always be necessary, whatever you do.

14. One says that calculation is an experiment, in order to shew how it is that it can be so practical. For we do know that an experiment really does have practical value. Only one forgets that it possesses this value in virtue of a technique which is a fact of natural history, but whose rules do not play the part of propositions of natural history.

"The limits of empiricism."—(Do we live because it is practical to live? Do we think because thinking is practical?)

Daß ein Experiment praktisch ist, das weiß er; also ist die Rechnung ein Experiment.

Unsre experimentellen Handlungen haben allerdings ein charakteristisches Gesicht. Wenn ich jemand in einem Laboratorium eine Flüssigkeit in eine Proberöhre gießen und über einer Bunsenflamme erhitzen sehe, bin ich geneigt zu sagen, er mache ein Experiment.

Nehmen wir an, Leute, welche zählen können, wollen—so wie wir—zu verschiedenerlei praktischen Zwecken Zahlen wissen. Und dazu fragen sie gewisse Leute, die, wenn ihnen das praktische Problem erklärt wurde, die Augen schließen, und sich die dem Zweck entsprechende Zahl einfallen ließen——so läge hier keine Rechnung vor, wie verläßlich immer die Zahlangabe sein mag. Ja diese Zahlbestimmung könnte praktisch viel verläßlicher sein, als jede Rechnung.

Eine Rechnung—könnte man sagen—ist etwa ein Teil der Technik eines Experiments, aber allein kein Experiment.

Vergißt man denn, daß zum Experiment eine bestimmte *Anwendung* des Vorgangs gehört? Und die Rechnung vermittelt die Anwendung.

Würde denn jemand daran *denken*, das Übersetzen einer Chiffre mittels eines Schlüssels ein Experiment zu nennen?

Wenn ich zweifle, ob die Zahlen n und m multipliziert l ergeben werden, so bin ich nicht *darüber* im Zweifel, ob eine Verwirrung in unserm Rechnen ausbrechen wird, und etwa die Hälfte der Menschen eines—die andre Hälfte etwas andres für richtig halten werden.

'Experiment' ist eine Handlung nur von einem gewissen Gesichtspunkt gesehen. Und es ist *klar*, daß die Rechnungshandlung auch ein Experiment sein kann.

Ich kann z.B. prüfen wollen, was dieser Mensch unter solchen Umständen, auf diese Aufgabestellung hin, rechnet.—Aber, ist es nicht eben das, was du fragst wenn du wissen willst, wieviel 52×63 ist! Das mag ich wohl fragen—meine Frage mag sogar in diesen Worten ausgedrückt sein. (Vgl. damit: Ist der Satz "Horch, sie stöhnt!" ein Satz über ihr Benehmen, oder über ihr Leiden?)

Aber wie ist es nun, wenn ich seine Rechnung vielleicht *nachrechne*?—'Nun, dann mache ich noch ein Experiment um ganz sicher herauszufinden, daß alle normalen Menschen so reagieren.'—Und wenn sie nun *nicht* gleichförmig reagieren—: welches ist das mathematische Resultat?

15. "Soll die Rechnung praktisch sein, so muß sie Tatsachen zu Tage bringen. Und das kann nur das Experiment."

He knows that an experiment is practical; and so calculation is an experiment.

Our experimental activities have indeed a characteristic physiognomy. If I see somebody in a laboratory pouring a liquid into a test tube and heating it over a Bunsen burner, I am inclined to say he is making an experiment.

Let us suppose that people, who know how to count, want—just as we do—to know numbers for practical purposes of various kinds. And to this end they ask certain people who, having had the practical problem explained to them, shut their eyes, and let the appropriate number occur to them——here there wouldn't be any calculation, however trustworthy the numbers given might be. This way of determining numbers might be even more trustworthy in practice than any calculation.

A calculation—it might be said—is perhaps a part of the technique of an experiment; but is by itself not an experiment.

Do we forget that a particular *application* is part of a procedure's being an experiment? And the calculation is an instrument of the application.

For would anyone *think* of calling the translation of a cipher by means of a key an experiment?

When I doubt whether n and m multiplied yield l, my doubt isn't about whether our calculating is going to fall into confusion, and e.g. half of mankind say one thing is right and the other half another.

An action is an 'experiment' only as seen from a certain point of view. And it is *obvious* that the action of calculating can also be an experiment.

I may for example want to test what this man calculates, in such-and-such circumstances, when set this question.—But isn't that exactly what you are asking when you want to know what 52×63 is? I may very well ask that—my question may even be expressed in these words. (Compare: is the sentence "Listen, she's groaning!" a proposition about her behaviour or about her suffering?)

But suppose I *work over* his calculation?—'Well, then I am making a further experiment so as to find out with complete certainty that all normal human beings react like that.'—And if they do *not* react uniformly—which one is the mathematical result?

15. "If calculation is to be practical, then it must uncover facts. And only experiment can do that."

Aber welches sind 'Tatsachen'? Glaubst du, du kannst zeigen, welche Tatsache gemeint ist, indem du etwa mit dem Finger sie zeigst? Macht das schon die Rolle klar, welche die 'Feststellung' einer Tatsache spielt?—Wenn nun die Mathematik erst den *Charakter* dessen bestimmte, was du 'Tatsache' nennst!

'Es ist interessant zu wissen *wieviele* Schwingungen dieser Ton hat.' Aber die Arithmetik hat dich diese Frage erst gelehrt. Sie hat dich gelehrt, diese Art von Tatsachen zu sehen.

Die Mathematik—will ich sagen—lehrt dich nicht einfach die Antwort auf eine Frage; sondern ein ganzes Sprachspiel, mit Fragen und Antworten.

Sollen wir sagen, die *Mathematik* lehre uns zählen?

Kann man von der Mathematik sagen, sie lehre uns experimentelle *Forschungsweisen*? Oder sie helfe uns, solche Forschungsweisen finden?

'Die Mathematik, um praktisch zu sein, muß uns Tatsachen lehren.' —Aber müssen diese Tatsachen die *mathematischen* Tatsachen sein?— Aber warum soll sie nicht, statt uns 'Tatsachen zu lehren', die Formen dessen schaffen, was wir Tatsachen nennen?

"Ja, aber es bleibt doch empirische Tatsache, daß die Menschen so rechnen!"—Ja, aber damit werden ihre Rechensätze nicht zu empirischen Sätzen.

"Ja, aber es muß doch unser Rechnen auf empirischen Tatsachen beruhen!" Gewiß. Aber welche meinst du jetzt? Die psychologischen und physiologischen, die es möglich machen, oder die, die es zu einer nützlichen Tätigkeit machen? Der Zusammenhang mit *diesen* besteht darin, daß die Rechnung das Bild eines Experiments ist, wie es nämlich, so gut wie immer, abläuft. Von den anderen erhält es seine Pointe, seine Physiognomie: aber das sagt durchaus nicht, daß die Sätze der Mathematik die Funktionen der empirischen Sätze haben. (Das wäre beinahe, als glaubte Einer: weil doch nur die Schauspieler im Stücke auftreten, so könnten auf der Bühne des Theaters auch keine andern Leute nützlich beschäftigt sein.)

In der Rechnung *gibt es keine* kausalen Zusammenhänge, nur die Zusammenhänge des Bildes. Und daran ändert es nichts, daß wir die Beweisfigur nachrechnen, um sie anzuerkennen. Daß wir also versucht sind, zu sagen, wir ließen sie durch ein psychologisches Experiment entstehen. Denn der psychische Ablauf wird beim Rechnen nicht psychologisch untersucht.

'Die Minute hat 60 Sekunden.' Das ist ein Satz ganz *ähnlich* einem mathematischen. Hängt seine Wahrheit von der Erfahrung ab?—Nun: könnten wir von Minuten und Stunden reden, wenn es keinen Zeitsinn

But what things are 'facts'? Do you believe that you can shew what fact is meant by, e.g., pointing to it with your finger? Does that of itself clarify the part played by 'establishing' a fact?—Suppose it takes mathematics to define the *character* of what you are calling a 'fact'!

'It is interesting to know *how many* vibrations this note has! But it took arithmetic to teach you this question. It taught you to see this kind of fact.

Mathematics—I want to say—teaches you, not just the answer to a question, but a whole language-game with questions and answers.

Are we to say that *mathematics* teaches us to count?

Can mathematics be said to teach us experimental *methods of investigation*? Or to help us to discover such methods of investigation?

'To be practical, mathematics must tell us facts.'—But do these facts have to be the *mathematical* facts?—But why should not mathematics, instead of 'teaching us facts', create the forms of what we call facts?

"Yes but surely it remains an empirical fact that men calculate like this!"—Yes, but that does not make the propositions used in calculating into empirical propositions.

"Yes, but surely our calculating must be founded on empirical facts!" Certainly. But what empirical facts are you now thinking of? The psychological and physiological ones that make it possible, or those that make it a useful activity? The connexion with *the latter* consists in the fact that the calculation is the picture of an experiment as it practically always turns out. From the former it gets its point, its physiognomy; but that is certainly not to say that the propositions of mathematics have the functions of empirical propositions. (That would almost be as if someone were to believe that because only the actors appear in the play, no other people could usefully be employed upon the stage of the theatre.)

There are no causal connexions in a calculation, only the connexions of the pattern. And it makes no difference to this that we work over the proof in order to accept it. That we are therefore tempted to say that it arose as the result of a psychological experiment. For the psychical course of events is not psychologically investigated when we calculate.

'There are 60 seconds to a minute.' This proposition is very *like* a mathematical one. Does its truth depend on experience?—Well, could we talk about minutes and hours, if we had no sense of time; if gäbe; wenn es keine Uhren gäbe, oder, aus physikalischen Gründen nicht geben könnte; wenn alle die Zusammenhänge nicht statt hätten, die unsern Zeitmaßen Sinn und Bedeutung geben? In diesem Falle—würden wir sagen—hätte das Zeitmaß seinen Sinn verloren (wie die Handlung des Mattsetzens, wenn das Schachspiel verschwände)—oder es hätte dann einen ganz anderen Sinn.—Macht aber die eine so beschriebene Erfahrung den Satz falsch, die andre wahr? Nein; *das* beschriebe nicht seine Funktion. Er funktioniert ganz anders.

'Das Rechnen, um praktisch sein zu können, muß auf empirischen Tatsachen beruhen.'——Warum soll es nicht lieber bestimmen, was empirische Tatsachen *sind*?

Erwäge: 'Unsre Mathematik wandelt Experimente in Definitionen um.'

16. Aber können wir uns keine menschliche Gesellschaft denken, in der es ebensowenig ein Rechnen, ganz in unserm Sinn, wie ein Messen, ganz in unserm Sinne, gibt?—Doch.—Aber wozu will ich mich denn bemühen, was Mathematik ist, herauszuarbeiten?

Weil es bei uns eine Mathematik gibt, und eine besondere Auffassung derselben, ein Ideal, gleichsam, ihrer Stellung und Funktion,—und dieses muß klar herausgearbeitet werden.

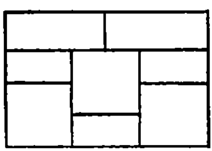
Fordere nicht zuviel, und fürchte nicht, daß deine gerechte Forderung ins Nichts zerinnen wird.

Meine Aufgabe ist es nicht, Russell's Logik von *innen* anzugreifen, sondern von außen.

D.h.: nicht, sie mathematisch anzugreifen—sonst triebe ich Mathematik—sondern ihre Stellung, ihr Amt.

Meine Aufgabe ist es nicht, über den Gödelschen Beweis, z.B., zu reden; sondern an ihm vorbei zu reden.

17. Die Aufgabe, die Zahl der Wege zu finden, auf denen man den Fugen dieser Mauer:



ohne abzusetzen und ohne Wiederholung entlang fahren kann, erkennt jeder als *mathematische* Aufgabe.—Wäre die Zeichnung viel komplizierter und größer, nicht zu überblicken, so könnte man annehmen, sie ändre sich, ohne daß wir's merken, und dann wäre there were no clocks, or could be none for physical reasons; if there did not exist all the connexions that give our measures of time meaning and importance? In that case—we should say—the measure of time would have lost its meaning (like the action of delivering check-mate if the game of chess were to disappear)—or it would have some quite different meaning. But suppose our experience were like that—then would experience make the proposition false; and the contrary experience make it true? No; *that* would not describe its function. It functions quite differently.

'Calculating, if it is to be practical, must be grounded in empirical facts.'——Why should it not rather determine what *are* empirical facts?

Consider: 'Our mathematics turns experiments into definitions'.

16. But can't we imagine a human society in which calculating quite in our sense does not exist, any more than measuring quite in our sense?—Yes.—But then why do I want to take the trouble to work out what mathematics is?

Because we have a mathematics, and a special conception of it, as it were an ideal of its position and function,—and this needs to be clearly worked out.

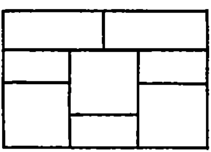
Don't demand too much, and don't be afraid that your just demand will dwindle into nothing.

It is my task, not to attack Russell's logic from within, but from without.

That is to say: not to attack it mathematically—otherwise I should be doing mathematics—but its position, its office.

My task is, not to talk about (e.g.) Gödel's proof, but to pass it by.

17. The problem: find the number of ways in which we can trace the joins in this wall:



without omission or repetition, will be recognized by everyone as a *mathematical* problem.—If the drawing were much bigger and more complicated, and could not be taken in at a glance, it could be supposed to change without our noticing; and then the problem of finding that die Aufgabe, jene Zahl (die sich vielleicht gesetzmäßig ändert) zu finden, keine mathematische mehr. Aber auch wenn sie gleichbleibt, ist die Aufgabe dann nicht mathematisch.——Aber auch wenn die Mauer zu überblicken ist, so kann man nicht sagen, die Aufgabe wird dadurch zu einer mathematischen—wie man sagt: *diese* Aufgabe ist nun eine der Embryologie. Vielmehr: *hier* brauchen wir eine mathematische Lösung. (Wie: hier ist, was wir bedürfen, eine *Vorlage*.)

'Erkannten' wir das Problem als ein mathematisches, weil die Mathematik vom Nachfahren von Zeichnungen handelt?

Warum sind wir also geneigt, *dieses* Problem schlechtweg ein 'mathematisches' zu nennen? Weil wir es ihm gleich ansehen, daß hier die Beantwortung einer *mathematischen* Frage *so gut wie* alles ist, was wir brauchen. Obschon man das Problem, z.B., leicht als ein psychologisches sehen könnte.

Ähnliches von der Aufgabe, aus einem Blatt Papier das und das zu falten.

Es kann so ausschauen, als ob die Mathematik hier eine Wissenschaft ist, die mit *Einheiten* Experimente macht; Experimente, bei welchen es nämlich nicht auf die Arten der Einheiten ankommt, also nicht darauf, ob sie Erbsen, Glaskugeln, Striche, usw., sind.—Nur was von *allen* diesen gilt findet sie heraus. Also z.B. nichts über ihren Schmelzpunkt, aber, daß 2 und 2 von ihnen 4 sind. Und das Problem der Mauer ist eben ein mathematisches, d.h.: kann durch *diese* Art von Experiment gelöst werden.—Und worin das mathematische Experiment besteht? Nun, im Hinlegen und Verschieben von Dingen, Ziehen von Strichen, Anschreiben von Ausdrücken, Sätzen, etc. Und man muß sich dadurch nicht stören lassen, daß die äußere Erscheinung dieser Experimente nicht die physikalischer, chemischer, etc. ist, es sind eben andersartige. Nur eine Schwierigkeit ist da: das, was vorgeht, ist leicht genug zu sehen, zu beschreiben,—aber *wie* ist es als Experiment anzuschauen? Welches ist hier der Kopf, welches der Fuß des Experiments? Welches sind die Bedingungen des Experiments, welches sein Resultat? Ist das Resultat das Rechnungsergebnis, oder das Rechnungsbild, oder die Zustimmung (worin immer diese besteht) des Rechnenden?

Werden aber, etwa, die Prinzipien der Dynamik zu Sätzen der reinen Mathematik dadurch, daß man ihre Interpretation offen läßt und sie nun zum Erzeugen eines Maßsystems verwendet?

'Der mathematische Beweis muß übersichtlich sein'—das hängt mit der Übersichtlichkeit jener Figur zusammen.

number (which perhaps changes according to some law) would no longer be a mathematical one. But even if it does not change, the problem is, in this case, still not mathematical.——But even when the wall can be taken in at a glance, that cannot be said to make the question mathematical, as when we say: *this* question is now a question in embryology. Rather: *here* we need a mathematical solution. (Like: here what we need is a *model.*)

Did we 'recognize' the problem as a mathematical one because mathematics treats of making tracings from drawings?

Why, then, are we inclined to call this problem straight away a 'mathematical' one? Because we see at once that here the answer to a *mathematical* question is *practically* all we need. Although the problem could easily be seen as, for example, a psychological one.

Similarly with the task of folding a piece of paper in such-and-such a way.

It may look as if mathematics were here a science that makes experiments with *units*; experiments, that is, in which it does not matter what kind of units they are, whether for instance they are peas, glass marbles, strokes and so on.—Mathematics discovers only what holds for *all* these things. And so it does not discover anything about e.g. their melting point, but that 2 and 2 of them are 4. And the first problem of the wall is a mathematical one, i.e. can be solved by means of *this* kind of experiment.—And what does the mathematical experiment consist in? Well, in setting things out and moving them about, in drawing lines, writing down expressions, propositions, etc. And we must not be disturbed by the fact that the outward appearance of these experiments is not that of physical or chemical experiments, etc.; they just are of a different kind. Only there is a difficulty here: the procedure is easy enough to see, to describe,—but *how* is it to be looked at as an experiment? What is the head and what the tail of the experiment here? What are the conditions of the experiment, what its result? Is the result what is yielded by the calculation; or the pattern of calculation; or the assent (whatever that consists in) of the person doing the calculation?

But does it make the principles of dynamics, say, into propositions of pure mathematics if we leave their interpretation open, and then use them to produce a system of measurement?

'A mathematical proof must be perspicuous'—this is connected with the perspicuousness of that figure.

18. Vergiß nicht: der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar, ist als *mathematische* Aussage aufzufassen——denn das ist nicht *selbstverständlich*.

Es ist nicht selbstverständlich, daß der Satz, die und die Struktur sei nicht konstruierbar, als mathematischer Satz aufzufassen ist.

D.h.: wenn man sagte: "er sagt von sich selbst aus"—so ist das auf eine spezielle Weise zu verstehen. Hier nämlich entsteht leicht Verwirrung durch den bunten Gebrauch des Ausdrucks "dieser Satz sagt etwas von . . . aus".

In diesem Sinne sagt der Satz '$625 = 25 \times 25$' auch etwas über sich selbst aus: daß nämlich die linke Ziffer erhalten wird, wenn man die rechts stehenden multipliziert.

Der Gödelsche Satz, der etwas über sich selbst aussagt, *erwähnt* sich selbst nicht.

'Der Satz sagt, daß diese Zahl aus diesen Zahlen auf diese Weise nicht erhältlich ist.'—Aber bist du auch sicher, daß du ihn recht ins Deutsche übersetzt hast? Ja gewiß, es scheint so.—Aber kann man da nicht fehlgehen?

Könnte man sagen: Gödel sagt, daß man einem mathematischen Beweis auch muß trauen können, wenn man ihn, praktisch, als den Beweis der Konstruierbarkeit der Satzfigur nach den Beweisregeln auffassen will?

Oder: Ein mathematischer Satz muß als Satz einer auf sich selbst wirklich anwendbaren Geometrie aufgefaßt werden können. Und tut man das, so zeigt es sich, daß man sich auf einen Beweis in gewissen Fällen nicht verlassen kann.

Die Grenzen der Empirie sind nicht unverbürgte Annahmen, oder intuitiv als richtig erkannte; sondern Arten und Weisen des Vergleichens und des Handelns.

19. 'Nehmen wir an, wir haben einen arithmetischen Satz, der sagt, eine bestimmte Zahl . . . könne nicht aus den Zahlen . . ., . . ., . . ., durch die und die Operationen gewonnen werden. Und nehmen wir an, es ließe sich eine Übersetzungsregel geben, nach welcher dieser arithmetische Satz in die Ziffer jener ersten Zahl—die Axiome, aus denen wir versuchen, ihn zu beweisen, in die Ziffern jener andern Zahlen—und unsere Schlußregeln in die im Satz erwähnten Operationen sich übersetzen ließen.—Hätten wir dann *den arithmetischen Satz* aus den Axiomen nach unsern Schlußregeln abgeleitet, so hätten wir

18. Do not forget that the proposition asserting of itself that it is unprovable is to be conceived as a *mathematical* assertion——for that is not *a matter of course*.

It is not a matter of course that the proposition that such-and-such a structure cannot be constructed is to be conceived as a mathematical proposition.

That is to say: when we said: "it asserts of itself"—this has to be understood in a special way. For here it is easy for confusion to occur through the variegated use of the expression "this proposition asserts something of . . .".

In this sense the proposition '$625 = 25 \times 25$' also asserts something about itself: namely that the left-hand number is got by the multiplication of the numbers on the right.

Gödel's proposition, which asserts something about itself, does not *mention* itself.

'The proposition says that this number cannot be got from these numbers in this way.'—But are you also certain that you have translated it correctly into English? Certainly it looks as if you had.—But isn't it possible to go wrong here?

Could it be said: Gödel says that one must also be able to trust a mathematical proof when one wants to conceive it practically, as the proof that the propositional pattern can be constructed according to the rules of proof?

Or: a mathematical proposition must be capable of being conceived as a proposition of a geometry which is actually applicable to itself. And if one does this it comes out that in certain cases it is not possible to rely on a proof.

The limits of empiricism are not assumptions unguaranteed, or intuitively known to be correct: they are ways in which we make comparisons and in which we act.

19. 'Let us assume that we have an arithmetical proposition saying that a particular number . . . cannot be obtained from the numbers . . ., . . ., . . ., by means of such and such operations. And let us assume that a rule of translation can be given according to which this arithmetical proposition is translatable into the figures of the first number—the axioms from which we are trying to prove it, into the figures of the other numbers—and our rules of inference into the operations mentioned in the proposition.—If we had then derived *the arithmetical proposition* from the axioms according to our rules of inference, then *by*

dadurch seine Ableitbarkeit demonstriert, aber auch einen Satz bewiesen, den man nach jener Übersetzungsregel dahin aussprechen kann: dieser arithmetische Satz (nämlich unserer) sei unableitbar.'

Was wäre nun da zu tun? Ich denke mir, wir schenken unserer *Konstruktion* des *Satzzeichens* Glauben, also dem *geometrischen* Beweis. Wir sagen also, diese 'Satzfigur' ist aus jenen so und so gewinnbar. Und übertragen, nur, in eine andre Notation, heißt das: diese Ziffer ist mittels dieser Operationen aus jenen zu gewinnen. Soweit hat der Satz und sein Beweis nichts mit einer besonderen *Logik* zu tun. Hier war jener konstruierte Satz einfach eine andere Schreibweise der konstruierten Ziffer; sie hatte die *Form* eines Satzes, aber wir vergleichen sie nicht mit andern Sätzen als Zeichen, welches dies oder jenes *sagt*, einen *Sinn* hat.

Aber freilich ist zu sagen, daß jenes Zeichen weder als Satzzeichen noch als Zahlzeichen angesehen werden braucht.—Frage dich: was macht es zu dem einen, was zu dem anderen?

Lesen wir nun den konstruierten Satz (oder die Ziffer) als Satz der mathematischen Sprache (etwa auf Deutsch), so spricht er das Gegenteil von dem, was wir eben als bewiesen betrachten. Wir haben also den wirklichen Sinn des Satzes als falsch demonstriert und ihn zu gleicher Zeit *bewiesen*—wenn wir nämlich seine Konstruktion aus den zugelassenen Axiomen mittels der zugelassenen Schlußregeln als Beweis betrachten.

Wenn jemand uns einwürfe, wir könnten solche *Annahmen* nicht machen, da es *logische* oder *mathematische* Annahmen wären, so antworten wir, daß nur nötig ist anzunehmen, jemand habe einen Rechenfehler gemacht und sei *dadurch* zu dem Resultat gelangt, das wir 'annehmen', und er könne diesen Rechenfehler vorderhand nicht finden.

Hier kommen wir wieder auf den Ausdruck "der Beweis überzeugt uns" zurück. Und was uns hier an der Überzeugung interessiert, ist weder ihr Ausdruck durch Stimme oder Gebärde, noch das Gefühl der Befriedigung oder ähnliches; sondern ihre Bestätigung in der Verwendung des Bewiesenen.

Man kann mit Recht fragen, welche Wichtigkeit Gödel's Beweis für unsre Arbeit habe. Denn ein Stück Mathematik kann Probleme von der Art die *uns* beunruhigen, nicht lösen.—Die Antwort ist: daß die *Situation* uns interessiert, in die ein solcher Beweis uns bringt. 'Was sollen wir nun sagen?'—das ist unser Thema.

So seltsam es klingt, so scheint meine Aufgabe, das Gödelsche Theorem betreffend, bloß darin zu bestehen, klar zu stellen, was in der Mathematik so ein Satz bedeutet, wie: "angenommen, man könnte dies beweisen".

this means we should have demonstrated its derivability, but we should also have proved a proposition which, by that translation rule, can be expressed: this arithmetical proposition (namely ours) is not derivable.'

What would have to be done here? I am supposing that we trust our *construction* of the *propositional sign*, and hence trust the *geometrical* proof. So we say that this 'propositional pattern' can be obtained from those in such and such ways. And, merely translated into another notation, this means: this number can be got from those by means of these operations. So far the proposition and its proof have nothing to do with any special *logic*. Here the constructed proposition was simply another way of writing the constructed number; it had the *form* of a proposition but we don't compare it with other propositions as a sign *saying* this or that, making *sense*.

But it must of course be said that that sign need not be regarded either as a propositional sign or as a number sign.—Ask yourself: what makes it into the one, and what into the other?

If we now read the constructed proposition (or the figures) as a proposition of mathematical language (in English, say) then it says the opposite of what we regard as proved. Thus we have demonstrated the falsity of the real sense of the proposition and at the same time *proved* it—if, that is, we look at its construction from the admitted axioms by means of the admitted rules of inference as a proof.

If someone objects to us that we couldn't make such *assumptions*, as they would be *logical* or *mathematical* assumptions, then we reply that we need only assume that someone has made a mistake in calculating and so has reached the result we 'assume', and that for the time being he cannot find the mistake.

Here once more we come back to the expression "the proof convinces us". And what interests us about conviction here is neither its expression by voice or gesture, nor yet the feeling of satisfaction or anything of that kind; but its ratification in the use of what is proved.

It might justly be asked what importance Gödel's proof has for our work. For a piece of mathematics cannot solve a problem of the sort that trouble *us*.—The answer is that the *situation*, into which such a proof brings us, is of interest to us. 'What are we to say now?'—That is our theme.

However queer it sounds, my task as far as concerns Gödel's proof seems merely to consist in making clear what such a proposition as: "Suppose this could be proved" means in mathematics.

20. Es kommt uns viel zu selbstverständlich vor, daß wir "wieviele?" fragen und darauf zählen und rechnen!

Zählen wir, weil es praktisch ist zu zählen? Wir zählen!—Und so rechnen wir auch.

Man kann auf Grund eines Experiments—oder wie man es sonst nennen will—manchmal die Maßzahl des Gemessenen, manchmal aber auch das geeignete Maß bestimmen.

So ist also die Maßeinheit das Resultat von Messungen? Ja und nein. Nicht das Messungsresultat, aber vielleicht die *Folge* von Messungen.

Es wäre *eine* Frage: "hat uns die Erfahrung gelehrt, *so* zu rechnen?" —und eine andre: "ist die Rechnung ein Experiment?"

21. Warum soll man nicht sagen, der Widerspruch, z.B.: 'heterologisch' ϵ heterologisch $\equiv \sim$ ('heterologisch' ϵ heterologisch), zeige eine logische Eigenschaft des Begriffs 'heterologisch'?

" 'Zweisilbig' ist heterologisch", oder " 'dreisilbig' ist nicht heterologisch" sind Erfahrungssätze. Es könnte in irgendeinem Zusammenhang wichtig sein, herauszufinden, ob Eigenschaftswörter die Eigenschaften besitzen, die sie bezeichnen, oder nicht. Man gebraucht dann in einem Sprachspiel das Wort "heterologisch". Aber soll nun der Satz " 'h' ϵ h" ein Erfahrungssatz sein? Er ist es offenbar nicht und wir würden ihn auch, wenn wir den Widerspruch nicht gefunden haben, nicht als einen Satz in unserm Sprachspiel zulassen.

'h' ϵ $h \equiv \sim$('h' ϵ h) könnte man 'eine wahre Kontradiktion' nennen.—Aber diese Kontradiktion ist doch kein sinnvoller Satz! Wohl, aber die Tautologien der Logik sind es ja auch nicht.

"Die Kontradiktion ist wahr" heißt hier: sie ist bewiesen; abgeleitet aus den Regeln für das Wort "h". Ihre Verwendung ist, zu zeigen, daß " 'h' " ein Wort ist, welches in 'ξ ϵ h' eingesetzt keinen Satz ergibt.

"Die Kontradiktion ist wahr" heißt: Das ist wirklich ein Widerspruch, und du darfst also das Wort " 'h' " als Argument von 'ξ ϵ h' nicht verwenden.

22. Ich bestimme ein Spiel und sage: "Machst du diese Art Zug, so ziehe ich *so*, machst du jene, so ziehe ich *so*.—Jetzt spiele!" Und nun macht er einen Zug, oder etwas, was ich auch als Zug anerkennen muß und wenn ich nach meinen Regeln daraufhin ziehen will, so erweist sich, was immer ich tue, als den Regeln nicht gemäß. Wie konnte das geschehen? Als ich Regeln aufstellte, da *sagte* ich etwas:

20. We take it much too much for granted that we ask "How many?" and thereupon count and calculate.

Do we count because it is practical to count? We count!—And in the same way we calculate.

An experiment—or whatever one likes to call it—can be what we go on, sometimes in determining the measurement of the thing measured, and sometimes even in determining the appropriate measure.

Then is the unit of measurement in this way the result of measurements? Yes and no. Not the result reached in measuring but perhaps the *consequence* of measurements.

"Has experience taught us to calculate in *this* way?" would be one question and: "Is calculation an experiment?" another.

21. Why shouldn't it be said that such a contradiction as: 'heterological' ϵ heterological $\equiv \sim$ ('heterological' ϵ heterological), shews a logical property of the concept 'heterological'?

" 'Two-syllabled' is heterological", or " 'Four-syllabled' is not heterological" are empirical propositions. It might be important in some contexts to find out whether adjectives possess the properties they stand for or not. The word "heterological" would in that case be used in a language-game. But now, is the proposition " 'h' ϵ h" supposed to be an empirical proposition? It obviously is not one, nor should we admit it as a proposition in our language-game even if we had not discovered the contradiction.

'h' ϵ $h \equiv \sim$ ('h' ϵ h) might be called 'a true contradiction'.—But this contradiction is not a significant proposition! Very well, but nor are the tautologies of logic.

"The contradiction is true" means: it is proved; derived from the rules for the word "h". Its employment is, to shew that " 'h' " is one of those words which do not yield a proposition when inserted into 'ξ ϵ h'.

"The contradiction is true" means: this really is a contradiction, and so you cannot use the word " 'h' " as an argument in 'ξ ϵ h'.

22. I am defining a game and I say: "If you move like this, then I move like *this*, and if you do that, then I do *this*.—Now play." And now he makes a move, or something that I have to accept as a move and when I want to reply according to my rules, whatever I do proves to conflict with the rules. How can this have come about? When I

Ich folgte einem gewissen Brauch. Ich sah nicht voraus, was wir weiter tun würden, oder sah nur eine bestimmte Möglichkeit. Es war nicht anders, als hätte ich Einem gesagt: "Gib das Spiel auf; mit diesen Figuren kannst du nicht matt setzen" und hätte eine bestehende Möglichkeit des Mattsetzens übersehen.

Die verschiedenen, halb scherzhaften, Einkleidungen des logischen Paradoxes sind nur insofern interessant als sie einen daran erinnern, daß eine ernsthafte Einkleidung des Paradoxes von Nöten ist, um seine Funktion eigentlich zu verstehen. Es fragt sich: Welche Rolle kann ein solcher logischer Irrtum in einem Sprachspiel spielen?

Man gibt jemandem etwa Instruktionen, wie er in dem und dem Fall zu handeln hat; und diese Instruktionen erweisen sich später als *unsinnig*.

23. Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels. Und zwar folgt, der im Sprachspiel logische Schlüsse ausführt, gewissen Instruktionen, die beim Lernen des Sprachspiels selber gegeben wurden. Baut der Gehilfe etwa nach gewissen Befehlen ein Haus, so hat er das Herbeitragen der Baustoffe etc. von Zeit zu Zeit zu unterbrechen und gewisse Operationen mit Zeichen auf einem Papier auszuführen; worauf er, dem Resultat entsprechend, wieder seine Bauarbeit aufnimmt.

Denke dir einen Vorgang, in welchem jemand, der einen Karren schiebt, daraufgekommen ist, daß er die Radachse reinigen muß, wenn der Karren sich zu schwer schieben läßt. Ich meine nicht, daß er zu sich sagt: "immer, wenn der Karren sich nicht schieben läßt, . . .". Sondern er *handelt* einfach so. Und nun kommt er darauf einem Andern zuzurufen: "Der Karren geht nicht; reinige die Achse!", oder auch: "Der Karren geht nicht. Also muß die Achse gereinigt werden." Nun, das ist ein Schluß. Kein logischer, freilich.

Kann ich nun sagen: "Der nicht-logische Schluß kann sich als falsch erweisen; der logische nicht"?

Ist der logische Schluß richtig, wenn er den Regeln gemäß gezogen wurde; oder, wenn er *richtigen* Regeln gemäß gezogen wird? Wäre es z.B. falsch, wenn man sagte, aus $\sim p$ solle immer p gefolgert werden? Aber warum soll man nicht lieber sagen: so eine Regel gäbe den Zeichen '$\sim p$' und 'p' nicht ihre gewöhnliche Bedeutung?

Man kann es so auffassen—will ich sagen—daß die Schlußregeln den Zeichen ihre Bedeutung geben, weil sie Regeln der Verwendung dieser Zeichen sind. Daß die Schlußregeln zur Bestimmung der Bedeutung set the rules up, I *said* something: I was following a certain use. I did not foresee what we should go on to do, or I saw only a particular possibility. It was just as if I had said to somebody: "Give up the game; you can't mate with these pieces" and had overlooked an existing possibility of mating.

The various half joking guises of logical paradox are only of interest in so far as they remind anyone of the fact that a serious form of the paradox is indispensable if we are to understand its function properly. The question arises: what part can such a logical mistake play in a language-game?

E.g. one instructs someone what to do in such-and-such a case; and these instructions later prove *nonsensical*.

23. Logical inference is part of a language-game. And someone who carries out logical inferences in the language-game follows certain instructions which were given him in the actual learning of the language-game. If, say, a builder's mate is building a house in accordance with certain orders, he has to interrupt his cartage of materials etc. from time to time and carry out certain operations with signs on paper; and then he takes up his work again in conformity with the result.

Imagine a procedure in which someone who is pushing a wheelbarrow comes to realize that he must clean the axle of the wheel when the wheelbarrow gets too difficult to push. I don't mean that he says to himself: "Whenever the wheelbarrow can't be pushed . . .", but he simply *acts* in this way. And he happens to shout to someone else: "The wheelbarrow won't push; clean the axle", or again: "The wheelbarrow won't push. So the axle needs cleaning." Now this is an inference. Not a logical one, of course.

Can I now say: "Non-logical inference can prove wrong; but logical inference not"?

Is logical inference correct when it has been made according to rules; or when it is made according to *correct* rules? Would it be wrong, for example, if it were said that p should always be inferred from $\sim p$? But why should one not rather say: such a rule would not give the signs '$\sim p$' and 'p' their usual meaning?

We can conceive the rules of inference—I want to say—as giving the signs their meaning, because they are rules for the use of these signs. So that the rules of inference are involved in the determination der Zeichen gehören. In diesem Sinne können die Schlußregeln nicht falsch oder richtig sein.

A hat beim Bau die Länge und Breite einer Fläche gemessen und gibt dem B den Befehl: "Bring 15×18 Platten." B ist dazu abgerichtet zu multiplizieren und dem Resultat entsprechend eine Menge von Platten abzuzählen.

Der Satz '$15 \times 18 = 270$' braucht natürlich nie ausgesprochen zu werden.

Man könnte sagen: Experiment—Rechnung sind Pole, zwischen welchen sich menschliche Handlungen bewegen.

24. Wir konditionieren einen Menschen in dieser und dieser Weise; wirken dann auf ihn durch eine Frage ein; und erhalten ein Zahlzeichen. Dieses verwenden wir weiter zu unsern Zwecken und es erweist sich als praktisch. Das ist das Rechnen.—Noch nicht! Dies könnte ein sehr *zweckmäßiger* Vorgang sein—muß aber nicht sein, was wir 'Rechnen' nennen. Wie man sich denken könnte, daß zu Zwecken, denen heute unsre Sprache dient, Laute ausgestoßen wurden, die doch keine Sprache bildeten.

Zum Rechnen gehört, daß alle die richtig rechnen dasselbe Rechnungsbild erzeugen. Und 'richtig rechnen' heißt nicht: bei klarem Verstande, oder ungestört rechnen, sondern *so* rechnen.

Jeder mathematische Beweis gibt dem mathematischen Gebäude einen neuen Fuß. (Ich dachte an die Füße eines Tisches.)

25. Ich habe mich gefragt: Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch Mathematik?—Aber es fragt sich: Nennen wir es 'Mathematik' nicht etwa nur darum weil es hier Übergänge, Brücken, gibt von der phantastischen zur nicht-phantastischen Anwendung? D.h.: würden wir sagen, Leute besäßen eine Mathematik, die das Rechnen, Operieren mit Zeichen *bloß* zu okkulten Zwecken benützten?

26. Aber ist es dann doch nicht unrichtig zu sagen: das der Mathematik *Wesentliche* sei, daß sie Begriffe bilde?—Denn die Mathematik ist doch ein anthropologisches Phänomen. Wir können es also als das Wesentliche in einem großen Teil der Mathematik (dessen was 'Mathematik' genannt wird) erkennen und doch sagen, es spiele keine Rolle in anderen Gebieten. Diese Einsicht allein wird freilich nicht ohne Einfluß auf die sein, die die Mathematik nun so sehen lernen. Mathematik ist also eine Familie; aber das sagt nicht, daß es uns also gleich sein wird, was alles in sie aufgenommen wird.

of the meaning of the signs. In this sense rules of inference cannot be right or wrong.

In the course of building A has measured the length and breadth of an area and gives B the order: "bring 15×18 slabs". B is trained to multiply and to count out a number of slabs in conformity with the result.

The sentence '$15 \times 18 = 270$' need of course never be uttered.

It might be said: experiment—calculation are poles between which human activities move.

24. We condition a man in such-and-such ways; then bring a question to bear on him; and get a number-sign. We go on to use this for our purposes and it proves practical. That is calculating.—No, it isn't enough! It might be an eminently *sensible* procedure—but need not be what we call 'calculating'. As one could imagine sounds being emitted for purposes now served by language, which sounds yet did not form a language.

It is essential to calculating that everyone who calculates right produces the same pattern of calculation. And 'calculating right' does not mean calculating with a clear understanding or smoothly; it means calculating *like this*.

Every mathematical proof gives the mathematical edifice a new leg to stand on. (I was thinking of the legs of a table.)

25. I have asked myself: if mathematics has a purely fanciful application, isn't it still mathematics?—But the question arises: don't we call it 'mathematics' only because e.g. there are transitions, bridges from the fanciful to non-fanciful applications? That is to say: should we say that people possessed a mathematics if they used calculating, operating with signs, *merely* for occult purposes?

26. But in that case isn't it incorrect to say: the *essential* thing about mathematics is that it forms concepts?—For mathematics is after all an anthropological phenomenon. Thus we can recognize it as the essential thing about a great part of mathematics (of what is called 'mathematics') and yet say that it plays no part in other regions. This insight by itself will of course have some influence on people once they learn to see mathematics in this way. Mathematics is, then, a family; but that is not to say that we shall not mind what is incorporated into it.

Man könnte sagen: Verstündest du *keinen* mathematischen Satz besser als du das Multiplikativ Axiom verstehst, so verstündest du Mathematik *nicht*.

27. —Hier ist ein Widerspruch. Aber wir sehen ihn nicht und ziehen Schlüsse aus ihm. Etwa auf mathematische Sätze; und auf falsche. Aber wir erkennen diese Schlüsse an.—Und bricht nun eine von uns berechnete Brücke zusammen, so finden wir dafür eine andere Ursache, oder sagen, Gott habe es so gewollt. War nun unsre Rechnung falsch; oder war es keine Rechnung?

Gewiß, wenn wir als Forschungsreisende die Leute beobachten, die es so machen, werden wir vielleicht sagen: diese Leute rechnen überhaupt nicht. Oder: in ihren Rechnungen sei ein Element der Willkür, welches das Wesen ihrer Mathematik von dem der unsern unterscheidet. Und doch würden wir nicht leugnen können, daß die Leute eine Mathematik haben.

Was für Regeln muß der König* geben, damit er der unangenehmen Situation von nun an entgeht, in die ihn sein Gefangener gebracht hat?—Was für eine Art Problem ist das?—Es ist doch ähnlich diesem: Wie muß ich die Regeln dieses Spiels abändern, daß die und die Situation nicht eintreten kann? Und das ist eine mathematische Aufgabe.

Aber kann es denn eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?

Kann man sagen: "Nachdem dies mathematische Problem gelöst war, begannen die Menschen eigentlich zu rechnen."?

28. Was ist das für eine Sicherheit, wenn sie darauf beruht, daß unsre Banken tatsächlich im allgemeinen nicht von allen ihren Kunden auf einmal überrannt *werden*; aber bankrott würden, wenn es doch geschähe?! Nun es ist eine *andere* Art von Sicherheit als die primitivere; aber es ist doch eine Sicherheit.

Ich meine: wenn nun wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch gefunden würde—nun so bewiese das nur, daß eine Arithmetik mit einem *solchen* Widerspruch sehr gute Dienste leisten könnte; und es besser sein wird, wenn wir unsern Begriff der nötigen Sicherheit modifizieren, als zu sagen, das wäre eigentlich noch keine rechte Arithmetik gewesen.

"Aber es ist doch nicht die ideale Sicherheit!"—Ideal, für welchen Zweck?

Die Regeln des logischen Schließens sind Regeln des *Sprachspiels*.

* Gemeint ist wohl der König, der folgendes Gesetz machte: "Jeder Fremde mur den Zweck seiner Einreise angeben; wer die Unwahrheit sagt wird gehängt." Ein Sophist sagte, er sei angekommen um auf Grund dieses Gesetzes gehängt zu werden. Anm. der Herausg.

We might say: if you did not understand *any* mathematical proposition better than you understand the Multiplicative Axiom, then you would *not* understand mathematics.

27. —There is a contradiction here. But we don't see it and we draw conclusions from it. E.g. we infer mathematical propositions; and wrong ones. But we accept these inferences.—And now if a bridge collapses, which we built on the basis of these calculations, we find some other cause for it, or we call it an Act of God. Now was our calculation wrong; or was it not a calculation?

Certainly, if we are explorers observing the people who do this we shall perhaps say: these people don't calculate at all. Or: there is an element of arbitrariness in their calculations, which distinguishes the nature of their mathematics from ours. And yet we should not be able to deny that these people have a mathematics.

What kind of rules must the king* give so as to escape henceforward from the awkward position, which his prisoner has put him in?—What sort of problem is this?—It is surely like the following one: how must I change the rules of this game, so that such-and-such a situation cannot occur? And that is a mathematical problem.

But can it be a mathematical problem to make mathematics into mathematics?

Can one say: "After this mathematical problem was solved, human beings began really to calculate"?

28. What sort of certainty is it that is based on the fact that in general there *won't* actually be a run on the banks by all their customers; though they would break if it did happen?! Well, it is a *different* kind of certainty from the more primitive one, but it is a kind of certainty all the same.

I mean: if a contradiction were now actually found in arithmetic—that would only prove that an arithmetic with *such* a contradiction in it could render very good service; and it will be better for us to modify our concept of the certainty required, than to say that it would really not yet have been a proper arithmetic.

"But surely this isn't ideal certainty!"—Ideal for what purpose?

The rules of logical inference are rules of the *language-game*.

* Presumably the king who made the law that all who came to his city must state their business and be hanged if they lied. A sophist said he came to be hanged under that law.—EDD.

29. Was für eine *Art* von Satz ist dies: "Die Klasse der Löwen ist doch nicht ein Löwe, die Klasse der Klassen aber eine Klasse"? Wie wird er verifiziert? Wie könnte man ihn *verwenden*?—So viel ich sehe, nur als grammatischen Satz. Einen darauf aufmerksam zu machen, daß das Wort "Löwe" grundverschieden gebraucht wird von dem Namen eines Löwen; das Gattungswort "Klasse" aber ähnlich wie die Bezeichnung für eine der Klassen, die Klasse Löwe etwa.

Man kann sagen, das Wort "Klasse" werde reflexiv gebraucht, auch wenn man z.B. die Russellsche Theorie der Typen anerkennt. Denn es wird ja doch auch in ihr reflexiv verwendet.

Freilich ist, in diesem Sinn zu sagen, die Klasse der Löwen kein Löwe etc., ähnlich, als sagte jemand, er habe ein "e" für ein "u" gehalten, wenn er eine Kugel für einen Kegel ansieht.

Das plötzliche Umwechseln der Auffassung des Bildes eines Würfels und die Unmöglichkeit 'Löwe' und 'Klasse' als vergleichbare Begriffe zu sehen.

Der Widerspruch sagt: "Nimm dich in Acht. . . . ".

Wie aber wenn man einem bestimmten Löwen (dem König der Löwen etwa) den Namen "Löwe" gibt? Nun wirst du sagen: aber es ist doch klar, daß im Satz "Löwe ist ein Löwe" das Wort "Löwe" auf zwei verschiedene Arten gebraucht wird. (*Log. Phil. Abh.*) Aber kann ich sie nicht zu *einer* Art des Gebrauchs zählen?

Aber wenn in dieser Weise der Satz "Löwe ist ein Löwe" gebraucht würde: würde ich den auf nichts aufmerksam machen, den ich auf die Verschiedenheit der Verwendung der beiden "Löwe" aufmerksam machte?

Man kann ein Tier daraufhin untersuchen, ob es eine Katze ist. Aber den Begriff Katze kann man so jedenfalls nicht untersuchen.

Wenn auch "die Klasse der Löwen ist kein Löwe" wie ein Unsinn erscheint, dem man nur aus Höflichkeit einen Sinn beilegen könne; so will ich diesen Satz doch nicht so auffassen, sondern als einen rechten Satz, wenn er nur richtig aufgefaßt wird. (Also nicht wie in *Log. Phil. Abh.*) Meine Auffassung ist also hier sozusagen anders. Das heißt, aber, ich sage: es gibt auch ein Sprachspiel mit diesem Satz.

"Die Klasse der Katzen ist keine Katze."—Woher weißt du das?

In der Tierfabel heißt es: "Der Löwe ging mit dem Fuchs spazieren", nicht ein Löwe mit einem Fuchs; noch auch der Löwe so und so mit dem Fuchs so und so. Und hier ist es doch wirklich so, als ob die Gattung Löwe als ein Löwe gesehen würde. (Es ist nicht so, wie Lessing sagt, als ob statt irgendeinem Löwen ein bestimmter gesetzt

29. What *sort* of proposition is: "The class of lions is not a lion, but the class of classes is a class"? How is it verified? How could it be *used*?—So far as I can see, only as a grammatical proposition. To draw someone's attention to the fact that the word "lion" is used in a fundamentally different way from the name of a lion; whereas the class word "class" is used like the designation of one of the classes, say the class of lions.

One can say that the word "class" is used reflexively, even if for instance one accepts Russell's theory of types. For it is used reflexively there too.

Of course to say in this sense that the class of lions is not a lion etc. is like saying one has taken an "e" for an "a" when one has taken a ball for a bell.

The sudden change of aspect in the picture of a cube and the impossibility of seeing 'lion' and 'class' as comparable concepts.

The contradiction says: "Look out....".

But suppose that one gives a particular lion (the king of lions) the name "Lion"? Now you will say: But it is clear that in the sentence "Lion is a lion" the word "lion" is being used in two different ways. (*Tractatus Logico-philosophicus.*) But can't I count them as *one* kind of use?

But if the sentence "Lion is a lion" is used in this way: shouldn't I be drawing your attention to anything, if I drew your attention to the difference of employment of the two "lions"?

One can examine an animal to see if it is a cat. But at any rate the concept cat cannot be examined in this way.

Even though "the class of lions is not a lion" seems like nonsense, to which one can only ascribe a sense out of politeness; still I do not want to take it like that, but as a proper sentence, if only it is taken right. (And so not as in the *Tractatus*.) Thus my conception is a different one here. Now this means that I am saying: there is a language-game with this sentence too.

"The class of cats is not a cat."—How do you know?

The fable says: "The lion went for a walk with the fox", not a lion with a fox; nor yet the lion so-and-so with the fox so-and-so. And here it actually is as if the species lion came to be seen as a lion. (It isn't as Lessing says, as if a particular lion were put in the place of some würde. "Grimmbart der Dachs" heißt nicht: ein Dachs mit Namen "Grimmbart".)

Denk dir eine Sprache, in der die Klasse der Löwen "der Löwe aller Löwen" genannt wird, die Klasse der Bäume "der Baum aller Bäume", etc.—Weil sie sich vorstellen, alle Löwen bildeten *einen* großen Löwen. (Wir sagen: "Gott hat den Menschen geschaffen.")

Dann könnte jemand das Paradox aufstellen, es gäbe nicht eine bestimmte Anzahl aller Löwen. Etc.

Wäre es aber etwa unmöglich, in so einer Sprache zu zählen und zu rechnen?

30. Man könnte sich fragen: Welche Rolle kann ein Satz, wie "Ich lüge immer" in menschlichen Leben spielen? und da kann man sich Verschiedenes vorstellen.

31. Ist die Umrechnung einer Länge von Zoll auf cm ein logischer Schluß? "Der Zylinder ist 2 Zoll lang.—Also ist er ungefähr 50 cm lang." Ist das ein *logischer* Schluß?

Ja, aber ist nicht eine Regel etwas willkürliches? Etwas, was ich *festsetze*? Und könnte ich festsetzen, daß die Multiplikation 18 × 15 *nicht* 270 ergeben solle?—Warum nicht?—Aber dann ist sie eben nicht nach der Regel geschehen, die ich zuerst festgesetzt, und deren Gebrauch ich eingeübt hatte.

Ist denn etwas, was aus einer Regel folgt, wieder eine Regel? Und wenn nicht,—was für eine Art von Satz soll ich es nennen?

"Es ist den Menschen . . . unmöglich, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen." Ja, wenn ich nur eine Ahnung hätte, wie es gemacht wird,—ich versuchte es gleich!—Aber wenn es uns unmöglich ist, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen, so ist es also wohl möglich, zwei Gegenstände als von einander verschieden anzuerkennen? Ich habe also etwa zwei Sessel vor mir und erkenne an, daß es *zwei* sind. Aber da kann ich doch unter Umständen auch glauben, daß es nur *einer* ist; und in *diesem* Sinne kann ich auch einen für zwei halten.—Aber damit erkenne ich doch nicht den Sessel als von sich selbst verschieden an! Wohl; aber dann habe ich auch nicht die zwei als von einander verschieden anerkannt. Wer glaubt, er könne dies tun, und eine Art psychologisches Spiel spielt, der übersetze dies in ein Spiel der Gesten. Wenn er zwei Gegenstände vor sich hat, zeige er mit jeder Hand auf einen von ihnen; gleichsam als wolle er den beiden andeuten, daß sie autonom seien. Hat er nur einen Gegenstand vor sich, so deutet er mit beiden Händen auf ihn um anzudeuten, daß man keinen Unterschied zwischen ihm und ihm selbst machen kann.—Warum soll man nun aber nicht das Spiel in umgekehrter Weise spielen?

lion or other. "Reynard the Fox" does not mean: a fox of the name "Reynard".)

Imagine a language in which the class of lions is called "the lion of all lions", the class of trees "the tree of all trees", etc.—Because people imagine all lions as forming *one* big lion. (We say: "God created man".) Then it would be possible to set up the paradox that there isn't a definite number of all lions. And so on.

But would it be impossible to count and calculate in such a language?

30. We might ask: What role can a sentence like "I always lie" have in human life? And here we can imagine a variety of things.

31. Is turning inches into centimetres logical inference? "The cylinder is 2 inches long.—So it is about 50 cm. long." Is that a *logical* inference?

But isn't a rule something arbitrary? Something that I *lay down*? And could I lay it down that the multiplication 18×15 shall *not* yield 270?—Why not?—But then it just hasn't taken place according to the rule which I first laid down, and whose use I have practised.

Is something that follows from a rule itself in turn a rule? And if not,—what kind of proposition am I to call it?

"It is . . . impossible for human beings to recognize an object as different from itself." Well, if only I had an inkling how it is done,—I should try at once!—But, if it is impossible for us to recognize an object as different from itself, is it quite possible to recognize two objects as different from one another? I have e.g. two chairs before me and I recognize that they are *two*. But here I may sometimes believe that they are only *one*; and in *that* sense I can also take one for two.—But that doesn't mean that I recognize the chair as different from itself! Very well; but then neither have I recognized the two as different from one another. If you think you can do this and you are playing a kind of psychological game, then translate it into a game with gestures. When you have two objects before you, point with each hand at one of them; as if, as it were, you wanted to indicate that they were independent. If you only have one object before you then you point to it with both hands in order to indicate that no difference between it and itself can be made.—But now, why should one not play the game the opposite way?

32. Die Worte "richtig" und "falsch" werden beim Unterricht im Vorgehen nach der Regel gebraucht. Das Wort "richtig" läßt den Schüler gehen, das Wort "falsch" hält ihn zurück. Könnte man nun dem Schüler diese Worte dadurch erklären, daß man statt ihrer setzt: "das stimmt mit der Regel überein—das nicht"? Nun, wenn er einen Begriff vom Übereinstimmen hat. Aber wie, wenn dieser eben erst gebildet werden muß? (Es kommt darauf an, wie er auf das Wort "übereinstimmen" reagiert.)

Man lernt nicht einer Regel folgen, indem man zuerst den Gebrauch des Wortes "Übereinstimmung" lernt.

Vielmehr lernt man die Bedeutung von "Übereinstimmen", indem man einer Regel folgen lernt.

Wer verstehen will, was es heißt: "einer Regel folgen", der muß doch selbst einer Regel folgen können.

"Wenn du diese Regel annimmst, *mußt* du das tun."—Das kann heißen: die Regel läßt dir hier nicht zwei Wege offen. (Ein mathematischer Satz.) Ich meine aber: die Regel führt dich wie ein Gang mit festen Mauern. Aber dagegen kann man doch einwenden, die Regel ließe sich auf alle mögliche Weise deuten.—Die Regel steht hier wie ein Befehl; und *wirkt* auch wie ein Befehl.

33. Ein Sprachspiel: Etwas *Anderes* bringen; das *Gleiche* bringen. Nun, wir können uns vorstellen, wie es gespielt wird.—Aber wie kann ich's Einem erklären? Ich kann ihm *diesen* Unterricht geben.—Aber wie weiß er dann, was er das nächste Mal als 'Gleiches' bringen soll—mit welchem Recht kann ich sagen, daß er das richtige, oder falsche, gebracht hat?—Ja, ich weiß freilich, daß in gewissen Fällen Menschen mit den Zeichen des Widersprechens auf mich einstürmen würden.

Und heißt das nun etwa, die Definition von "Gleich" wäre die: Gleich sei was alle oder die meisten Menschen übereinstimmend so ansehen?—Freilich nicht.

Denn, um Gleichheit zu konstatieren, benütze ich ja natürlich nicht die Übereinstimmung der Menschen. Welches Kriterium verwendest du also? Gar keins.

Das Wort ohne Rechtfertigung zu gebrauchen heißt nicht, es zu Unrecht gebrauchen.

Das Problem des vorigen Sprachspiels gibt es natürlich auch in dem: Bringe mir etwas Rotes. Denn woran erkenne ich, daß etwas rot ist? An der Übereinstimmung der Farbe mit einem Muster?—Mit welchem Recht sage ich: "Ja, das ist rot."? Nun, ich sage es; und es läßt sich nicht rechtfertigen. Und auch für dieses Sprachspiel, wie für das

32. The words "right" and "wrong" are used when giving instruction in proceeding according to a rule. The word "right" makes the pupil go on, the word "wrong" holds him back. Now could one explain these words to a pupil by saying instead: "this agrees with the rule—that not"? Well yes, if he has a concept of agreement. But what if this has yet to be formed? (The point is how he reacts to the word "agree".)

One does not learn to obey a rule by first learning the use of the word "agreement".

Rather, one learns the meaning of "agreement" by learning to follow a rule.

If you want to understand what it means "to follow a rule", you have already to be able to follow a rule.

"If you accept this rule you *must* do this."—This may mean: the rule doesn't leave two paths open to you here. (A mathematical proposition.) But I mean: the rule conducts you like a gangway with rigid walls. But against this one can surely object that the rule could be interpreted in all sorts of ways.—Here is the rule, like an order! And like an order too in its *effect*.

33. A language-game: to bring something *else*; to bring the *same*. Now, we can imagine how it is played.—But how can I explain it to anyone? I can give him this training.—But then how does he know what he is to bring the next time as 'the same'—with what justice can I say that he has brought the right thing or the wrong?—Of course I know very well that in certain cases people would turn on me with signs of opposition.

And does this mean e.g. that the definition of "same" would be this: same is what all or most human beings with one voice take for the same?—Of course not.

For of course I don't make use of the agreement of human beings to affirm identity. What criterion do you use, then? None at all.

To use the word without a justification does not mean to use it wrongfully.

The problem of the preceding language-game exists also here: Bring me something red. For what shews me that something is red? The agreement of the colour with a sample?—What right have I to say: "Yes, that's red"? Well, I say it; and it cannot be justified. And it is vorige, ist es charakteristisch, daß es sich unter der ruhigen Zustimmung aller Menschen vollzöge.

Ein unentschiedener Satz der Mathematik ist etwas, was weder als Regel, noch als das Gegenteil einer Regel anerkannt ist, und die Form einer mathematischen Aussage hat.—Ist diese Form aber ein klar umschriebener Begriff?

Denke dir den $\lim_{n \to \infty} \phi n = e$ als eine Eigenschaft eines Musikstücks (etwa). Aber natürlich nicht *so*, daß das Stück endlos weiterliefe, sondern als eine dem Ohr erkennbare Eigenschaft (gleichsam *algebraische* Eigenschaft) des Stückes.

Denk dir Gleichungen als Ornamente (Tapetenmuster) verwendet, und nun eine Prüfung dieser Ornamente daraufhin, welcher Art Kurven sie entsprechen. Die Prüfung wäre analog der, der kontrapunktischen Eigenschaften eines Musikstücks.

34. Ein Beweis, der zeigt, daß die Figur '777' in der Entwicklung von π vorkommt aber nicht zeigt *wo*. Nun, so bewiesen wäre dieser 'Existenzsatz' für gewisse Zwecke *keine Regel*. Aber könnte er nicht z.B. als Mittel der Einteilung von Entwicklungsregeln dienen? Es wäre etwa auf analoge Art bewiesen daß '777' in π^2 nicht vorkomme, wohl aber in $\pi \times e$ etc. Die Frage wäre nur: Ist es vernünftig von dem betreffenden Beweis zu sagen: er beweise die Existenz von '777' in dieser Entwicklung? Dies kann einfach irreführend sein. Es ist eben der Fluch der Prosa, und besonders der Russellschen Prosa, in der Mathematik.

Was schadet es, z.B., zu sagen, Gott kenne *alle* irrationalen Zahlen? Oder: sie seien schon alle da, wenn wir auch nur gewisse kennen? Warum sind diese Bilder nicht harmlos?

Einmal verstecken sie gewisse Probleme.

Angenommen, die Menschen berechnen die Entwicklung von π immer weiter und weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur '777' gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht. Ich will sagen: Auch Gott kann Mathematisches nur durch Mathematik entscheiden. Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nichts entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet.

Man könnte das so sagen: Ist uns die Regel der Entwicklung gegeben, so kann uns nun eine *Rechnung* lehren, daß an der fünften Stelle der Ziffer '2' steht. Hätte Gott dies, ohne diese Rechnung, bloß aus der Entwicklungsregel wissen können? Ich will sagen: Nein.

characteristic of this language-game as of the other that all men consent in it without question.

An undecided proposition of mathematics is something that is accepted neither as a rule nor as the opposite of a rule, and which has the form of a *mathematical* statement.—But is this form a sharply circumscribed concept?

Imagine $\lim_{n \to \infty} \phi n = e$ as a property of a piece of music (say). But of course not as if the piece went on endlessly, but as a property that can be recognized by the ear (as it were an *algebraic* property) of the piece.

Imagine equations used as ornaments (wallpaper patterns), and now a test of these ornaments with a view to discovering what kind of curves they correspond to. The test would be analogous to that of the contrapuntal properties of a piece of music.

34. A proof that shews that the pattern '777' occurs in the expansion of π, but does not shew *where*. Well, proved in this way this 'existential proposition' would, for certain purposes, not be *a rule*. But might it not serve e.g. as a means of classifying expansion rules? It would perhaps be proved in an analogous way that '777' does not occur in π^2 but it does occur in $\pi \times e$ etc. The question would simply be: is it reasonable to say of the proof concerned: it proves the existence of '777' in this expansion? This can be simply misleading. It is in fact the curse of prose, and particularly of Russell's prose, in mathematics.

What harm is done e.g. by saying that God knows *all* irrational numbers? Or: that they are already all there, even though we only know certain of them? Why are these pictures not harmless?

For one thing, they hide certain problems.—

Suppose that people go on and on calculating the expansion of π. So God, who knows everything, knows whether they will have reached '777' by the end of the world. But can his *omniscience* decide whether they *would* have reached it after the end of the world? It cannot. I want to say: Even God can determine something mathematical only by mathematics. Even for him the mere rule of expansion cannot decide anything that it does not decide for us.

We might put it like this: if the rule for the expansion has been given us, a *calculation* can tell us that there is a '2' at the fifth place. Could God have known this, without the calculation, purely from the rule of expansion? I want to say: No.

35. Wenn ich von der Mathematik sagte, ihre Sätze bilden Begriffe, so ist das *vag*; denn '$2 + 2 = 4$' bildet einen Begriff in anderem Sinne, als '$p \supset p$', '$(x). fx \supset fa$'. oder der Dedekindsche Satz. Es gibt eben eine Familie von Fällen.

Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs ist—natürlich—kein spezifisch mathematischer. Es ist ein Begriff im Zusammenhang mit einer fest bestimmten *Tätigkeit* im menschlichen Leben. Der Begriff dieser Regel ist nicht mathematischer als der: der Regel zu folgen. Oder auch: dieser letztere ist nicht weniger scharf definiert als der Begriff so einer Regel selbst.—Ja, der Ausdruck der Regel und sein Sinn ist nur ein Teil des Sprachspiels: der Regel folgen.

Man kann mit dem *gleichen* Recht allgemein von solchen Regeln reden, wie von den Tätigkeiten, ihnen zu folgen.

Man sagt freilich "das liegt alles schon in unserm Begriff" von der Regel, z.B.—aber das heißt nun: zu *diesen* Begriffsbestimmungen neigen wir. Denn was haben wir denn im Kopf, was alle diese Bestimmungen schon enthält?!

Die Zahl ist, wie Frege sagt, eine Eigenschaft eines Begriffs——aber in der Mathematik ist sie ein Merkmal eines mathematischen Begriffs. $\aleph_0$ ist ein *Merkmal* des Begriffs der Kardinalzahl; und die *Eigenschaft* einer Technik. $2^{\aleph_0}$ ist ein Merkmal des Begriffs des unendlichen Dezimalbruchs, aber wovon ist diese Zahl eine Eigenschaft? D.h.: von welcher Art von Begriff kann man sie empirisch aussagen?

---

36. Der Beweis des Satzes zeigt mir, was ich auf die Wahrheit des Satzes hin wagen will. Und verschiedene Beweise können mich wohl dazu bringen dasselbe zu wagen.

Das Überraschende, Paradoxe, ist paradox nur in einer gewissen, gleichsam mangelhaften Umgebung. Man muß diese Umgebung so ergänzen, daß, was paradox schien, nicht länger so erscheint.

Wenn ich bewiesen habe, daß $18 \times 15 = 270$ ist, so habe ich damit auch den geometrischen Satz bewiesen, daß man durch Anwendung gewisser Transformationsregeln auf das Zeichen '18×15' das Zeichen '270' erhält.—Angenommen nun, die Menschen, durch irgendein Gift am klaren Sehen, oder richtigen Erinnern, gehindert (wie wir uns jetzt ausdrücken wollen) erhielten bei dieser Rechnung nicht '270'.—Ist die Rechnung, wenn man nach ihr nicht richtig voraussagen kann, was Einer unter normalen Umständen heraus-

35. When I said that the propositions of mathematics determine concepts, that is *vague*; for '$2 + 2 = 4$' forms a concept in a different sense from '$p \supset p$', '$(x). fx \supset fa$', or Dedekind's Theorem. The point is, there is a family of cases.

The concept of the rule for the formation of an infinite decimal is—of course—not a specifically mathematical one. It is a concept connected with a rigidly determined *activity* in human life. The concept of this rule is not more mathematical than that of: following the rule. Or again: this latter is not less sharply defined than the concept of such a rule itself.—For the expression of the rule and its sense is only a part of the language-game: following the rule.

One has the *same* right to speak of such rules in general, as of the activities of following them.

Of course, we say: "all this is involved in the concept itself", of the rule for example—but what that means is that we incline to *these* determinations of the concept. For what have we in our heads, which of itself contains all these determinations?!

A number is, as Frege says, a property of a concept——but in mathematics it is a mark of a mathematical concept. $\aleph_0$ is a *mark* of the concept of a cardinal number; and the *property* of a technique. $2^{\aleph_0}$ is a mark of the concept of an infinite decimal, but what is this number a property of? That is to say: of what kind of concept can one assert it empirically?

---

36. The proof of a proposition shews me what I am prepared to stake on its truth. And different proofs can perfectly well cause me to stake the same thing.

Something surprising, a paradox, is a paradox only in a particular, as it were defective, surrounding. One needs to complete this surrounding in such a way that what looked like a paradox no longer seems one.

If I have proved that $18 \times 15 = 270$, I have thereby also proved the geometrical proposition that we get the sign '270' by applying certain transformation rules to the sign '18×15'.—Now suppose that people, having their vision or memory impaired (as we now put it) by some harmful drug, did not get '270' when they did this calculation.—Isn't the calculation useless, if we cannot use it to make a correct prediction of what anyone is going to work out under bringen wird, nicht nutzlos? Nun, auch wenn sie es ist, so zeigt das nicht, daß der Satz '$18 \times 15 = 270$' der Erfahrungssatz sei: die Menschen rechneten im allgemeinen *so*.

Anderseits ist es nicht klar, daß die allgemeine Übereinstimmung der Rechnenden ein charakteristisches Merkmal alles dessen ist, was man "Rechnen" nennt. Ich könnte mir denken, daß Leute, die rechnen gelernt haben, unter bestimmten Umständen, etwa unter dem Einfluß des Opiums, anfingen, Einer verschieden vom Andern zu rechnen, und von diesen Rechnungen Gebrauch machten; und daß man nun nicht sagte, sie rechneten ja gar nicht und seien unzurechnungsfähig, sondern daß man ihre Rechnungen als berechtigtes Vorgehen hinnähme.

Aber müssen sie nicht wenigstens zum gleichen Rechnen abgerichtet werden? Gehört *das* nicht zum Begriff des Rechnens? Ich glaube, man könnte sich auch da Abweichungen vorstellen.

37. Kann man sagen, daß die Mathematik eine experimentelle Forschungsweise, Fragestellung, lehrt? (S. 173). Nun, kann man nicht sagen, sie lehre mich z.B. zu fragen, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt?—Was tut aber die Mathematik in diesem Fall? Ohne sie oder ohne die Mathematiker wären wir freilich nicht zur Definition dieser Kurve gelangt. War, aber, diese Kurve definieren schon Mathematik? Bedingte es z.B. Mathematik, wenn Leute die Bewegung von Körpern daraufhin untersuchten, ob ihre Bahn sich durch eine Ellipsenkonstruktion mit einem Faden und zwei Nägeln darstellen lasse? Wer diese Art der Untersuchung erfunden hätte, hätte der Mathematik getrieben?

Er hat doch einen neuen *Begriff* geschaffen. Aber war es auf die Art wie die Mathematik dies tut? War es, wie uns die Multiplikation $18 \times 15 = 270$ einen neuen Begriff gibt?

38. Kann man also *nicht* sagen, die Mathematik lehrt uns zählen? Wenn sie uns aber zählen lehrt, warum nicht auch Farben miteinander vergleichen?

Es ist klar: wer uns die Ellipsengleichung lehrt, lehrt uns einen neuen Begriff. Wer uns aber beweist, daß *diese* Ellipse und *diese* Gerade sich in diesen Punkten schneiden; nun der gibt uns auch einen neuen Begriff.

Uns die Ellipsengleichung lehren ist ähnlich wie, uns zählen lehren. Aber auch ähnlich wie, uns die Frage lehren: "sind hier hundertmal so viel Kugeln als dort?".

normal circumstances? Well, even if it is, that does not shew that the proposition '$18 \times 15 = 270$' is the empirical proposition: people in general calculate like *this*.

On the other hand it is not clear that the general agreement of people doing calculations is a characteristic mark of all that is called "calculating". I could imagine that people who had learned to calculate might in particular circumstances, say under the influence of opium, begin to calculate differently from one another, and might make use of these calculations; and that they were not said not to be calculating at all and not to be competent to calculate—but that their calculations were accepted as a reasonable procedure.

But must they not at least be trained to do the same calculations? Doesn't *this* belong essentially to the concept of calculating? I believe that we could imagine deviations here too.

37. Can we say that mathematics teaches an experimental method of investigation, teaches us to formulate empirical questions (p. 173e). Can't it be said to teach me e.g. to ask whether a particular body moves according to the equation of a parabola?—What does mathematics do in this case? Without it, or without the mathematicians, we should of course not have arrived at the definition of this curve. But was defining this curve itself a piece of mathematics? Would it for instance imply mathematics for people to investigate the movement of a body so as to see whether its path can be represented by the construction of an ellipse with two pegs and a string? Was whoever invented this inquiry doing mathematics?

He did create a new *concept*. But was it in the same way as mathematics does? Was it like the way the multiplication $18 \times 15 = 270$ gives us a new concept?

38. Then *can't* one say that mathematics teaches us to count? But if it teaches us to count, then why doesn't it also teach us to compare colours?

It is clear that if someone teaches us the equation of an ellipse he is teaching us a new concept. But if someone proves to us that *this* ellipse and *this* straight line intersect at these points—he too is giving us a new concept.

Teaching us the equation of an ellipse is like teaching us to count. But it is also like teaching us to ask the question: "Are there a hundred times as many marbles here as there?".

Wenn ich nun jemand in einem Sprachspiele diese Frage und eine Methode sie zu beantworten gelehrt hätte, hätte ich ihn Mathematik gelehrt? Oder nur, wenn er mit Zeichen operiert hat?

(Wäre das etwa als fragte man: "wäre auch das eine Geometrie, die *nur* aus den Euklidischen Axiomen bestünde?")

Wenn die Arithmetik uns die Frage "wieviel?" lehrt, warum nicht auch die Frage "wie dunkel?"?

Aber die Frage "sind hier hundertmal so viel Kugeln als dort?" ist doch keine mathematische Frage. Und ihre Antwort kein mathematischer Satz. Eine mathematische Frage wäre: "Sind 170 Kugeln hundertmal soviel als 3 Kugeln?" (Und zwar ist dies eine Frage der reinen, nicht der angewandten Mathematik.)

Soll ich nun sagen, daß, wer uns Dinge zählen lehrt und Ähnliches, uns neue Begriffe gibt, und *auch* der, welcher uns reine Mathematik mit solchen Begriffen lehrt?

Ist eine neue Begriffsverknüpfung ein neuer Begriff? Und schafft die Mathematik Begriffsverknüpfungen?

Das Wort "Begriff" ist ganz und gar zu vag.

Die Mathematik lehrt uns, auf neue Weise mit den Begriffen operieren. Und man kann daher sagen, sie ändert unser begriffliches Arbeiten.

Aber erst der bewiesene, oder als Postulat angenommene, mathematische Satz tut das, nicht der problematische.

---

39. Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren? z.B. versuchen, ob sich aus einem quadratischen Papier ein Katzenkopf falten läßt, wobei die *physikalischen* Eigenschaften des Papiers, seine Festigkeit, Dehnbarkeit, etc., nicht in Frage gezogen werden? Nun man redet doch hier gewiß von einem Versuchen. Und warum nicht von einem Experimentieren? Dieser Fall ist doch ähnlich dem, Zahlenpaare versuchsweise in die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ einzusetzen, um eines zu finden, das die Gleichung befriedigt. Und kommt man also endlich auf $3^2 + 4^2 = 25$, ist dieser Satz nun das Resultat eines Experiments? Warum nannte man den Vorgang denn ein Versuchen? Hätten wir es auch so genannt, wenn Einer immer aufs erste Mal mit völliger Sicherheit (den Zeichen der Sicherheit) aber ohne Rechnung, solche Probleme löste? Worin bestünde hier das Experimentieren? Angenommen, ehe er die Lösung gibt, erscheint sie ihm als Vision.—

Now if I had taught someone this question in a language-game, and a method of answering it, should I have taught him mathematics? Or would it have been that only if he operated with signs?

(Would that be like asking: "Would it be geometry, even if it *only* consisted of the Euclidian axioms?")

If arithmetic teaches us the question "how many?", then why doesn't it also teach the question "how dark?"?

But the question "are there a hundred times as many marbles here as there?" is surely not a mathematical question. And the answer to it is not a mathematical proposition. A mathematical question would be: "are 170 marbles a hundred times as many as 3 marbles?" (And this is a question of pure, not of applied mathematics.)

Now ought I to say that whoever teaches us to count etc. gives us new concepts; and so *also* does whoever uses such concepts to teach us pure mathematics?

Is a new conceptual connexion a new concept? And does mathematics create conceptual connexions?

The word "concept" is by far too vague.

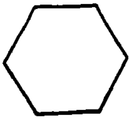
Mathematics teaches us to operate with concepts in a new way. And hence it can be said to change the way we work with concepts.

But only a mathematical proposition that has been proved or that is assumed as a postulate does this, not a problematic proposition.

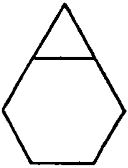
---

39. But can we not experiment mathematically? for instance, try whether a square bit of paper can be folded into a cat's head, where the *physical* properties of the paper, such as stiffness or elasticity, don't come into the question? Now certainly we speak of trying here. And why not of experimenting too? This case is like one in which we substitute pairs of numbers in the equation $x^2 + y^2 = 25$ in order to find by trial and error one that satisfies the equation. And if one finally arrives at $3^2 + 4^2 = 25$, is this proposition now the result of an experiment? For why did we call our procedure "trying"? Should we also have called it that if someone always solved such problems first time off with complete certainty (giving the signs of certainty) but without calculating? What did the experiment consist in here? Suppose that before he gives the solution, he has a vision of it.—

40. Eine Addition von Formen, in der gewisse Glieder verschmelzen, spielt in unserm Leben eine sehr geringe Rolle.—Wie wenn

 und 

die Figur



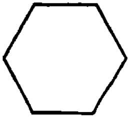
ergeben. Aber wäre dies eine *wichtige* Operation, so hätten wir vielleicht einen andern geläufigen Begriff von der arithmetischen Addition.

Daß man ein Boot, einen Hut, etc., aus einem quadratischen Stück Papier (nach gewissen Regeln) falten kann, ist uns natürlich als Angelegenheit der Geometrie zu betrachten, nicht der Physik. Aber ist Geometrie, so verstanden, nicht ein Teil der Physik? Nein; wir spalten die Geometrie von der Physik ab. Die geometrische Möglichkeit von der physikalischen. Aber wie, wenn man sie beisammen ließe? Wenn man einfach sagte: "Wenn du das und das und das mit dem Stück Papier tust, wird *dies* herauskommen"? Was zu tun ist, könnte durch einen Reim gegeben werden. Ist es denn nicht möglich, daß jemand zwischen den beiden Möglichkeiten gar nicht unterscheidet? Wie etwa ein Kind, das diese Technik lernt. Es weiß nicht, und denkt nicht darüber nach, ob diese Resultate des Faltens nur möglich sind, weil das Papier dabei sich in der und der Weise dehnt, verzerrt, oder, weil es sich *nicht* verzerrt.

Und ist es nun nicht auch so in der Arithmetik? Warum sollten Leute nicht rechnen lernen können ohne einen Begriff von einer mathematischen und einer physikalischen Tatsache? Sie wissen nur, daß das immer herauskommt, wenn sie gut acht geben und tun, was man sie gelehrt hat.

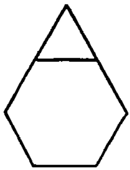
Denken wir uns, während wir rechneten, veränderten sich die Ziffern sprungweise auf dem Papier. Eine Eins würde plötzlich zu einer 6, dann zu einer 5, dann wieder zu einer 1, u.s.f. Und ich will einmal annehmen, das änderte an der Rechnung gar nichts, weil, sowie ich eine Ziffer ablese um mit ihr zu rechnen oder sie anzuwenden, sie wieder zu der würde, die wir bei *unserm* Rechnen vor uns haben.

40. An addition of shapes together, so that some of the edges fuse, plays a very small part in our life.—As when



and

yield the figure



But if this were an *important* operation, our ordinary concept of arithmetical addition would perhaps be different.

It is natural for us to regard it as a geometrical fact, not as a fact of physics, that a square piece of paper can be folded into a boat or hat. But is not geometry, so understood, part of physics? No; we split geometry off from physics. The geometrical possibility from the physical one. But what if we left them together? If we simply said: "If you do this and this and this with the piece of paper then *this* will be the result"? What has to be done might be told in a rhyme. For might it not be that someone did not distinguish at all between the two possibilities? As e.g. a child who learns this technique does not. It does not know and does not consider whether these results of folding are possible only because the paper stretches, is pulled out of shape, when it is folded in such-and-such a way, or because it is *not* pulled out of shape.

And now isn't it like this in arithmetic too? Why shouldn't it be possible for people to learn to calculate without having the concepts of a mathematical and a physical fact? They merely know that this is always the result when they take care and do what they have learnt.

Let us imagine that while we were calculating the figures on paper altered erratically. A 1 would suddenly become a 6 and then a 5 and then again a 1 and so on. And I want to assume that this does not make any difference to the calculation because, as soon as I read a figure in order to calculate with it or to apply it, it once more becomes the one that we have in *our* calculating. At the same time, however, Dabei sähe man aber wohl während des Rechnens wie die Ziffern sich ändern; wir sind aber instruiert, uns darum weiter nicht zu kümmern.

Dieses Rechnen könnte natürlich, auch wenn wir die obige Annahme nicht machen, zu brauchbaren Resultaten führen.

Wir rechnen hier streng nach Regeln, und doch *muß* dies Resultat nicht herauskommen.—Ich nehme an, daß wir keinerlei Gesetzmäßigkeit in dem Wechsel der Ziffern sehen.

Ich will sagen: Man könnte dieses Rechnen wirklich als ein Experimentieren auffassen, und z.B. sagen: "Versuchen wir was jetzt herauskommt, wenn ich diese Regel anwende".

Oder auch: "Machen wir dieses Experiment: schreiben wir die Ziffern mit einer Tinte von dieser Zusammensetzung . . . und rechnen nach der Regel. . . ."

Nun könntest du natürlich sagen: "In diesem Fall ist das Manipulieren von Ziffern nach Regeln kein Rechnen."

"Wir rechnen nur, wenn hinter dem Resultat ein Muß steht."—Aber wenn wir nun dieses Muß nicht wissen,—liegt es da dennoch in der Rechnung? Oder rechnen wir nicht, wenn wir es ganz naïf tun?

Wie ist es *damit*: Der rechnet nicht, der, wenn ihm einmal das, einmal jenes herauskommt, und er einen Fehler nicht finden kann, sich damit abfindet und sagt: das zeige eben, daß gewisse noch unbekannte Umstände das Ergebnis beeinflussen.

Man könnte das so ausdrücken: wem die Rechnung einen kausalen Zusammenhang entdeckt, der rechnet nicht.

Die Kinder werden nicht nur im Rechnen geübt, sondern auch in einer ganz bestimmten Stellungnahme gegen einen Rechenfehler.

Was ich sage, kommt darauf hinaus, die Mathematik sei *normativ*. Aber "Norm" bedeutet nicht dasselbe, wie "Ideal".

41. Die Einführung einer neuen Schlußregel kann man als Übergang zu einem neuen Sprachspiel auffassen. Ich stelle mir eines vor, in welchem etwa eine Person '$p \supset q$' aussagt, eine andere 'p', und eine dritte den Schluß zieht.

42. Ist es möglich, zu beobachten, daß eine Fläche rot und blau gefärbt ist, und nicht zu beobachten, daß sie rot ist? Denk Dir, man verwende eine Art Farbadjektiv für Dinge, die halb rot, halb blau sind: Man sagt sie seien 'bu'. Könnte nun jemand nicht darauf trainiert sein, zu beobachten, ob etwas bu ist; und nicht darauf, ob es auch rot

one can see quite well how the figures change during the calculations; but we are trained not to worry about this.

Of course, even if we do not make the above assumption, this calculation could lead to usable results.

Here we calculate strictly according to rules, yet this result does not *have* to come out.—I am assuming that we see no sort of regularity in the alteration of the figures.

I want to say: this calculating could really be conceived as an experiment, and we might for example say: "Let's try what will come out now if I apply this rule".

Or again: "Let us make the following experiment: we'll write the figures with ink of such-and-such a composition . . . and calculate according to the rule. . . ."

Now you might of course say: "In this case the manipulation of figures according to rules is not calculation."

"We are calculating only when there is a *must* behind the result."—But suppose we don't know this *must*,—is it contained in the calculation all the same? Or are we not calculating, if we do it quite naïvely?

How about the following: You aren't calculating if, when you get now this, now that result, and cannot find a mistake, you accept this and say: this simply shews that certain circumstances which are still unknown have an influence on the result.

This might be expressed like this: if calculation reveals a causal connexion to you, then you are not calculating.

Our children are not only given practice in calculation but are also trained to adopt a particular attitude towards a mistake in calculating.

What I am saying comes to this, that mathematics is *normative*. But "norm" does not mean the same thing as "ideal".

41. The introduction of a new rule of inference can be conceived as a transition to a new language-game. I can imagine one in which for example one person pronounces: '$p \supset q$', another 'p' and a third draws the conclusion.

42. Is it possible to observe that a surface is coloured red and blue; and not to observe that it is red? Imagine that a kind of colour adjective were used for things that are half red and half blue: they are said to be 'bu'. Now might not someone be trained to observe whether something is bu; and not to observe whether it is also red? Such a man

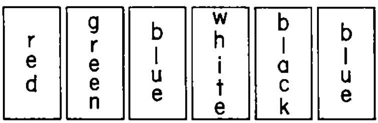
ist? Dieser würde dann nur zu melden wissen: "bu", oder "nicht bu". Und wir könnten aus der ersten Meldung den Schluß ziehen, das Ding sei zum Teil rot.

Ich stelle mir vor, daß die Beobachtung durch ein psychologisches Sieb geschieht, das zum Beispiel nur das Faktum durchläßt, die Fläche sei blau-weiß-rot (französische Tricolore), oder sei es nicht.

Ist es nun eine besondere Beobachtung, die Fläche sei zum Teil rot, wie kann diese logisch aus dem Vorigen folgen? Die Logik kann uns doch nicht sagen, was wir beobachten müssen.

Jemand zählt Äpfel in einer Kiste; er zählt bis zu 100. Ein Andrer sagt: "also sind jedenfalls 50 Äpfel in der Kiste" (das ist alles, was ihn interessiert). Das ist doch ein logischer Schluß; ist es aber nicht auch eine besondere Erfahrung?

43. Eine Fläche, in eine Anzahl von Streifen geteilt, wird von mehreren Leuten beobachtet. Die Farben der Streifen ändern sich, alle zu gleicher Zeit, immer nach je einer Minute.



Jetzt sind die Farben: rot, grün, blau, weiß, schwarz, blau.

Es wird beobachtet:

$$\text{rot} \,.\, \text{blau} \,.\supset \text{schwarz} :\supset .\, \text{weiß}.$$

Es wird auch beobachtet:

$$\sim \text{grün} \supset \sim \text{weiß}$$

und Einer zieht den Schluß:

$$\sim \text{grün} \supset \,:\, \text{rot} \,.\, \text{blau} \,.\, \sim \text{schwarz}.$$

Und diese Implikationen sind 'material implications' in Russells Sinn.

Aber kann man denn, daß

$$r \,.\, b \,.\supset s :\supset .\, w,$$

beobachten? Beobachtet man nicht Farben*zusammenstellungen*, also etwa, daß $r \,.\, b \,.\, s \,.\, w$; und leitet dann jenen Satz ab?

Aber kann einer bei der Beobachtung einer Fläche nicht ganz von der Frage eingenommen sein, ob sie sich grün, oder nicht grün färben wird; und wenn er nun sieht: $\sim g$, muß er auf die besondere Farbe der Fläche aufmerksam sein?

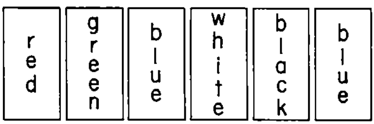
would then only know how to report: "bu", or "not bu". And from the first report we could draw the conclusion that the thing was partly red.

I am imagining that the observation happens by means of a psychological sieve, which for example only lets through the fact that the surface is blue-white-red (the French tricolour) or that it is not.

Now if it is a special observation that the surface is partly red, how can this follow logically from the preceding? Surely logic cannot tell us what to observe.

Someone is counting apples in a box; he counts up to 100. Someone else says: "so there are at any rate 50 apples in the box" (that is all that interests him). This is surely a logical conclusion; but isn't it also a special piece of experience?

43. A surface which is divided into a number of strips is observed by several people. The colours of the strips change every minute, all at the same time.



Now the colours are: red, green, blue, white, black, blue.

It is observed:

$$\text{red} \;.\; \text{blue} \;.\supset \text{black} :\supset.\ \text{white}.$$

It is also observed:

$$\sim\text{green} \supset \sim\text{white}$$

and someone draws the conclusion:

$$\sim\text{green} \supset : \text{red} \;.\; \text{blue} \;.\; \sim\text{black}.$$

And these implications are 'material implications' in Russell's sense.

But then is it possible to *observe* that

$$\text{red} \;.\; \text{blue} \;.\supset \text{black} :\supset.\ \text{white}?$$

Isn't one observing *arrangements* of colours, and so for example that red.blue.black.white; and then deducing that proposition?

But may not someone who is observing a surface be quite preoccupied with the question whether it is going to turn green or not green; and if he now sees: $\sim$green, need he be attentive to the particular colour that the surface is?

Und könnte Einer nicht ganz von dem Aspekt $r . b . \supset s : \supset . w$ eingenommen sein? Wenn er zum Beispiel dazu angelernt worden wäre, alles andere vergessend, nur unter diesem Gesichtspunkt die Fläche zu betrachten. (Es könnte den Menschen unter bestimmten Verhältnissen gleichgültig sein, ob Gegenstände rot oder grün sind; von Wichtigkeit aber, ob sie eine dieser Farben, oder eine dritte besitzen. Und es könnte in diesem Falle ein Farbwort für "rot oder grün" geben.)

Wenn man aber beobachten kann, daß

$$r . b . \supset s : \supset . w$$

und

$$\sim g \supset \sim w,$$

dann kann man ja auch beobachten, und nicht bloß schließen, daß

$$\sim g \supset : r . b . \sim s.$$

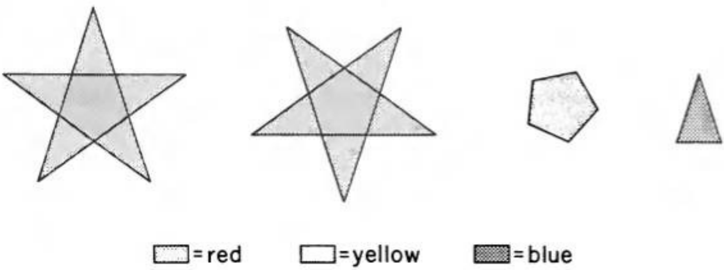
Wenn dies drei Beobachtungen sind, dann muß es auch möglich sein, daß die dritte Beobachtung nicht mit dem logischen Schluß aus den beiden ersten übereinstimmt.

Ist es denn also denkbar, daß Einer beim Beobachten einer Fläche die Verbindung Rot-Schwarz sieht (etwa als Flagge), aber, wenn er sich nun drauf einstellt, *eine* der beiden Hälften zu sehen, statt des Rot ein Blau sieht? Nun, du hast es gerade beschrieben.—Es wäre etwa so, wie wenn jemand auf eine Gruppe von Äpfeln schaute, und sie ihm immer als zwei Gruppen von je zwei Äpfeln erschienen, sowie er aber versuchte, sie mit dem Blick zusammenzufassen, erschienen sie ihm als 5. Dies wäre ein sehr merkwürdiges Phänomen. Und es ist keines von dessen Möglichkeit wir Notiz nehmen.

Erinnere dich daran, daß ein Rhombus, als Raute angesehen, nicht wie ein Parallelogram ausschaut. Nicht aber, als schienen seine gegenüberliegenden Seiten nicht parallel zu sein, sondern der Parallelismus fällt uns nicht auf.

44. Ich könnte mir denken, daß Einer sagt, er sähe einen rot und gelben Stern aber nichts Gelbes—weil er den Stern gleichsam als eine *Verbindung* von Farbteilen sieht, die er nicht zu trennen vermag.

Er hatte z.B. Figuren vor sich, wie diese



And might not someone be preoccupied with the aspect red.blue . ⊃ black : ⊃ . white? If, for example, he has been taught to forget everything else, and only to look at the surface from this point of view. (In particular circumstances it might be all one to people whether objects were red or green but important whether they had one of these colours or some third one. And in this case there might be a colour word for "red or green".)

But if one can observe that

red . blue . ⊃ black : ⊃ . white

and

∼green ⊃ ∼white

then one can also observe, and not merely infer, that

∼green ⊃ : red . blue . ∼black.

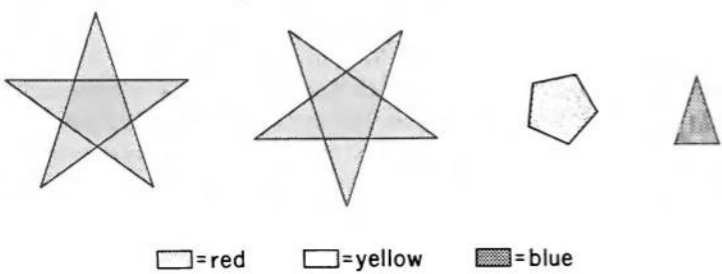
If these are three observations then it must also be possible for the third observation not to agree with the logical conclusion from the first two.

Then is it imaginable that someone observing a surface should see the combination red-black (say as a flag), but if he now sets himself to see *one* of the two halves, he sees blue instead of red? Well, you have just described it.—It would perhaps be as if someone were to look at a group of apples and always see it as two groups of two apples each, but as soon as he tried to take the whole lot in at a glance, they seemed to him to be five. This would be a very remarkable phenomenon. And it is not one of whose possibility we take account.

Remember that a rhombus, seen as a diamond, does not look like a parallelogram. Not that the opposite sides seem *not* to be parallel, only the parallelism does not strike us.

44. I could imagine someone saying that he saw a red and yellow star but did not see anything yellow—because he sees the star as, so to speak, a *conjunction* of coloured parts, which he has no power of separating.

For example he had figures like these before him:



Gefragt, ob er ein rotes Fünfeck sieht, würde er "ja" sagen; gefragt ob er ein gelbes sieht: "nein". Ebenso sagt er, er sehe ein blaues Dreieck, aber kein rotes.—Aufmerksam gemacht, sagte er etwa: "Ja, jetzt seh' ich's; ich hatte die Sterne nicht so aufgefaßt."

Und so könnte es ihm auch vorkommen, man könne die Farben im Stern nicht trennen, weil man die Formen nicht trennen kann.

Der kann die Geographie einer Landschaft nicht übersehen lernen, der so langsam in ihr sich fortbewegt, daß er das eine Stück vergessen hat, wenn er zu einem andern kommt.

45. Warum rede ich immer vom Zwang durch die Regel; warum nicht davon, daß ich ihr folgen *wollen* kann? Denn das ist ja ebenso wichtig.

Aber ich will auch nicht sagen, die Regel zwinge mich so zu handeln, sondern sie mache es mir möglich, mich an ihr anzuhalten und von ihr zwingen zu lassen.

Und wer, z.B., ein Spiel spielt, der hält sich an seine Regeln. Und es ist eine interessante Tatsache, daß Menschen zum Vergnügen Regeln aufstellen und sich dann nach ihnen halten.

Meine Frage war eigentlich: "Wie kann man sich an eine Regel halten?" Und das Bild, das einem hier vorschweben könnte, wäre das eines kurzen Stücks Geländer, durch das ich mich weiter soll führen lassen, als das Geländer reicht. [Aber da *ist* doch nichts; aber da ist doch nicht *nichts*!] Denn wenn ich frage "wie *kann* man sich . . ." so heißt es, daß mir hier etwas *paradox* erscheint; also ein Bild mich verwirrt.

"Daß das auch rot ist, daran habe ich gar nicht gedacht; ich habe es nur als Teil des mehrfärbigen Ornaments gesehen."

Logischer Schluß ist ein Übergang der gerechtfertigt ist, wenn er einem bestimmten Paradigma folgt, und dessen Rechtmäßigkeit von sonst nichts abhängt.

46. Wir sagen: "Wenn ihr beim Multiplizieren wirklich der Regel folgt, *muß* das Gleiche herauskommen." Nun, wenn dies nur die etwas hysterische Ausdrucksweise der Universitätssprache ist, so braucht sie uns nicht sehr zu interessieren.

Es ist aber der Ausdruck einer Einstellung zu der Technik des Rechnens, die sich überall in unserm Leben zeigt. Die Emphase des Muß entspricht nur der Unerbittlichkeit dieser Einstellung, sowohl zur Technik des Rechnens, als auch zu unzähligen verwandten Techniken.

Asked whether he sees a red pentagon he would say "yes"; asked whether he sees a yellow one, "no". In the same way he says that he sees a blue triangle but not a red one.—When his attention was drawn to it perhaps he said: "Yes, now I see it; I had not taken the star like that."

And like this it might even seem to him that the colours in the star could not be divided, because the shapes cannot.

You cannot learn to view the geography of a landscape as a whole, if you move on in it so slowly that you have already forgotten one bit when you come to another.

45. Why do I always speak of being compelled by a rule; why not of the fact that I can *choose* to follow it? For that is equally important.

But I don't want to say, either, that the rule compels me to act like this; but that it makes it possible for me to hold by it and make it compel me.

And if e.g. you play a game, you hold by its rules. And it is an interesting fact that people set up rules for pleasure, and then hold by them.

My question really was: "How can one hold by a rule?" And the picture that might occur to someone here is that of a short bit of hand-rail, by means of which I am to let myself be guided further than the rail reaches. [But there *is* nothing there; but there isn't *nothing* there!] For when I ask "How *can* one . . .", that means that something here looks *paradoxical* to me; and so a picture is confusing me.

"I never thought of its being red too; I only saw it as part of a multi-coloured ornament."

Logical inference is a transition that is justified if it follows a particular paradigm, and whose rightness is not dependent on anything else.

46. We say: "If you really follow the rule in multiplying, you *must* all get the same result." Now if this is only the somewhat hysterical way of putting things that you get in university talk, it need not interest us overmuch.

It is however the expression of an attitude towards the technique of calculation, which comes out everywhere in our life. The emphasis of the *must* corresponds only to the inexorableness of this attitude both to the technique of calculating and to a host of related techniques.

Das mathematische Muß ist nur ein andrer Ausdruck dafür, daß die Mathematik Begriffe bildet.

Und Begriffe dienen zum Begreifen. Sie entsprechen einer bestimmten Behandlung der Sachlagen.

Die Mathematik bildet ein Netz von Normen.

47. Es ist möglich, den Komplex aus A und B sehen, ohne A, oder B, zu sehen. Es ist auch möglich, den Komplex einen "Komplex von A und B" zu nennen und zu denken, diese Benennung deute nun auf eine Art Verwandschaft dieses Ganzen mit A und mit B hin. Es ist also möglich, zu sagen, man sehe den Komplex von A und B, aber weder A noch B. Etwa wie man sagen könnte, es sei hier ein rötlichgelb, aber weder rot noch gelb.

Kann ich nun A und B vor mir haben und auch beide sehen, aber nur $A \vee B$ beobachten? Nun, in gewissem Sinne ist das doch möglich. Und zwar dachte ich mir es so, daß der Beobachter von einem gewissen Aspekt eingenommen sei; daß er etwa eine bestimmte Art von Paradigma vor sich habe, in einer bestimmten Routine der Anwendung begriffen sei.—Und wie er nun auf $A \vee B$ eingestellt sein kann, so auch auf A.B. Es fällt ihm also nur A.B auf und nicht, z.B., A. Auf $A \vee B$ eingestellt sein, heißt, könnte man sagen, mit dem Begriff '$A \vee B$' auf die und die Situation zu reagieren. Und genau so kann man's natürlich auch mit A.B tun.

Sagen wir: es interessiert Einen nur A.B, und er urteilt also, was immer geschieht, nur "A.B", oder "$\sim$(A.B)"; so kann ich mir denken, daß er "A.B" urteilt und auf die Frage "Siehst du B?" sagt "Nein, ich sehe A.B". Etwa wie mancher, der A.B sieht, nicht zugeben wird, er sehe $A \vee B$.

48. Aber die Fläche 'ganz rot sehen' und 'ganz blau sehen' sind doch gewiß 'echte' Erfahrungen, und doch sagen wir, Einer könnte sie nicht zugleich haben.

Wenn er uns nun versicherte, er sehe diese Fläche wirklich ganz rot und zugleich ganz blau? Wir müßten sagen: "Du machst dich uns nicht verständlich."

Der Satz "1 Fuß = . . . cm" ist bei uns zeitlos. Man könnte sich aber auch den Fall denken, in welchem sich das Fußmaß und das Metermaß nach und nach etwas veränderten und dann immer wieder verglichen werden müßten um in einander umgerechnet zu werden.

Ist aber nicht bei uns das Verhältnis der Längen des Meters und des Fußes experimentell bestimmt worden? Doch; aber das Ergebnis wurde zu einer Regel gestempelt.

The mathematical Must is only another expression of the fact that mathematics forms concepts.

And concepts help us to comprehend things. They correspond to a particular way of dealing with situations.

Mathematics forms a network of norms.

47. It is possible to see the complex formed of A and B, without seeing A or B. It is even possible to call the complex a "complex of A and B" and to think that this name points to some kind of kinship of this whole with A and with B. Thus it is possible to say that one is seeing a complex formed from A and B but neither A nor B. As for example one might say that there is a reddish yellow here but neither red nor yellow.

Now can I have A and B before me and also see them both, but only observe A ∨ B? Well, in a certain sense this is surely possible. I was thinking of it like this: the observer is preoccupied with a particular aspect; for example, he has a special kind of paradigm before him; he is engaged in a particular routine of application.—And just as he can be adjusted to A ∨ B, so he can also be adjusted to A.B. Thus only A.B strikes him, and not, for example, A. To be adjusted to A ∨ B might be said to mean: to react to such-and-such a situation with the concept 'A ∨ B'. And one can of course do exactly the same thing with A.B too.

Say someone is interested only in A.B, and so whatever happens he judges merely either "A.B", or "∼(A.B)"; then I can imagine his judging "A.B" and saying "No, I see A.B" when he is asked "Do you see B?" As for example some people who see A.B will not concede that they see A ∨ B.

48. But 'seeing' the surface 'blue all over' and 'seeing' it 'red all over' are surely 'genuine' experiences, and yet we say that a man could not have them at the same time.

Now suppose he assured us that he saw this surface really red all over and blue all over at the same time? We should have to say: "You aren't making yourself intelligible to us."

With us the proposition "1 foot = . . . cm." is timeless. But we could imagine the case in which the foot and the metre gradually altered somewhat, and kept on having to be compared anew in order for us to calculate their translations into one another.

But have we not determined the relative length of foot and metre experimentally? Yes; but the result was given the character of a rule.

49. Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff? Nun, deuten wir uns ihn nicht als Satz, als Entscheidung einer Frage, sondern als eine, irgendwie anerkannte, Verbindung von Begriffen.

Das gleichgesetzte 25^2 und 625 gibt mir nun, könnte man sagen, einen neuen Begriff. Und der Beweis zeigt, was es mit dieser Gleichheit für eine Bewandtnis hat.—"Einen neuen Begriff geben" kann nur heißen, eine neue Begriffsverwendung einführen, eine neue Praxis.

"Wie kann man den Satz von seinem Beweis loslösen?" Diese Frage zeigt natürlich eine falsche Auffassung.

Der Beweis ist eine *Umgebung* des Satzes.

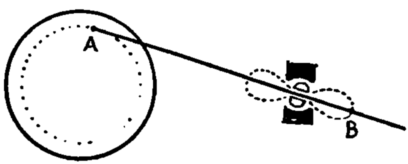
'Begriff' ist ein vager Begriff.

50. Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man "Begriff" nennen wird.

Begriff ist etwas wie ein Bild, womit man Gegenstände vergleicht.

Gibt es im Sprachspiel (2)[1] Begriffe? Aber man könnte es leicht auf solche Art erweitern, daß "Platte", "Würfel", etc., zu Begriffen würden. Z.B. durch eine Technik des Beschreibens oder Abbildens jener Gegenstände. Es besteht natürlich keine scharfe Grenze zwischen Sprachspielen, die mit Begriffen arbeiten, und andern. Wichtig ist, daß das Wort "Begriff" sich auf eine Art von Behelf im Mechanismus der Sprachspiele bezieht.

51. Betrachte einen Mechanismus. Etwa den:



Während der Punkt A einen Kreis beschreibt, beschreibt B eine Achterfigur. Wir schreiben das nun als einen kinematischen Satz.

Indem ich den Mechanismus umtreibe, beweist mir seine Bewegung den Satz; wie eine Konstruktion auf dem Papier es täte. Der Satz entspricht etwa einem Bild des Mechanismus, mit den eingezeichneten Bahnen der Punkte A und B. Er ist also in gewisser Beziehung ein Bild jener Bewegung. Er hält das fest, wovon mich der *Beweis* überzeugt. Oder—wozu er mich überredet.

[1] In den *Philosophischen Untersuchungen*, § 2.

49. In what sense can a proposition of arithmetic be said to give us a concept? Well let us interpret it, not as a proposition, as something that decides a question, but as a—somehow accepted—connexion of concepts.

The equating of 25^2 and 625 could be said to give me a new concept. And the proof shews what the position is regarding this equality.—"To give a new concept" can only mean to introduce a new employment of a concept, a new practice.

"How can the proposition be separated from its proof?" This question betrays a false conception.

The proof is part of the *surroundings* of the proposition.

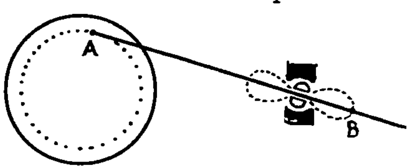
'Concept' is a vague concept.

50. It is not in every language-game that there occurs something that one would call a concept.

'Concept' is something like a picture with which one compares objects.

Are there concepts in language-game (2)[1]? Still, it would be easy to add to it in such a way that "slab", "block" etc. became concepts. For example, by means of a technique of describing or portraying those objects. There is of course no sharp dividing line between language-games which work with concepts and others. What is important is that the word "concept" refers to one kind of expedient in the mechanism of language-games.

51. Consider a mechanism. For example this one:



While the point *A* describes a circle, *B* describes a figure eight. Now we write this down as a proposition of kinematics.

When I work the mechanism its movement proves the proposition to me; as would a construction on paper. The proposition corresponds e.g. to a picture of the mechanism with the paths of the points *A* and *B* drawn in. Thus it is in a certain respect a picture of that movement. It holds fast what the *proof* shews me. Or—what it persuades me of.

[1] *Philosophical Investigations*, § 2.

Wenn der Beweis das Vorgehen nach der Regel registriert, so erzeugt er dadurch einen neuen Begriff.

Indem er einen neuen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Denn zu dieser Überzeugung ist es wesentlich, daß das Vorgehen nach diesen Regeln immer das gleiche Bild erzeugen muß. ('Gleich' nämlich nach unsern gewöhnlichen Regeln des Vergleichens und Kopierens.)

Damit hängt es zusammen, daß man sagen kann, der Beweis müsse das Bestehen einer internen Relation zeigen. Denn die interne Relation ist die Operation, die eine Struktur aus der andern erzeugt, als äquivalent angesehen mit dem Bild dieses Übergangs selbst—so daß nun der Übergang dieser Bilderreihe gemäß, eo ipso ein Übergang jenen Operationsregeln gemäß ist.

If the proof registers the procedure according to the rule, then by doing this it produces a new concept.

In producing a new concept it convinces me of something. For it is essential to this conviction that the procedure according to these rules must always produce the same configuration. ('Same', that is, by our ordinary rules of comparison and copying.)

With this is connected the fact that we can say that proof must shew the existence of an internal relation. For the internal relation is the operation producing one structure from another, seen as equivalent to the picture of the transition itself—so that now the transition according to this series of configurations is *eo ipso* a transition according to those rules for operating.

INDEX

Abkürzung 65, 66, 70–1, 73–4, 83, 84, 86, 88, 90, 91
ableiten, s. schließen
Absolutheit, d. Mathematik 168
abzählbar (unabzählbar) 56, 141
Alle (s.a. Allgemeinheit) 6–8
Allgemeinheit 146, 151, 153, 156
anerkennen (Anerkennung), s. zugeben
Angewandte Mathematik, s. Mathematik
Anschauung (Anschaulich), s. Beweis
Anschauungsart, s. Aspekt
Anwendung (Gebrauch, Verwendung)
  u. Beweis 76, 79, 93
  d. Mathematik (d. Rechnung) 67, 74, 77, 78, 83, 84, 87, 89, 133, 134–5, 146, 148, 151, 152, 154, 163, 170, 172
  u. Sinn (s.a. Bedeutung) 166, 179
Arithmetik (s.a. Logik, Mathematik) 49, 109, 116
Aspekt 70, 85–8
Aufgabe (mathematische) 174–5
Ausdehnung, s. Extension
Axiom (Grundgesetz, Pp.) 50, 79, 82, 113–4, 163, 168, 176

Bedeutung (s.a. Anwendung, Gebrauch, Sinn) 7, 63, 133, 142, 165, 179
Befehl, s. Gebot
Begriff 186, 194–5
  u. Beweis 61, 76, 78–9, 82, 85–6, 122, 127, 154–5, 187–8, 195–6
  mathematischer B. 129, 180, 186, 188
  neuer B., s. B. u. Beweis
  u. Sprachspiel 195
  u. Vorhersage 124
Begriffsbildung (s.a. Begriff) 121–3
Begriffsverknüpfung (Begriffsbahn, Begriffsverbindung) 188, 195
Begründung 43
Behauptung 49, 50, 53
Behaviourismus 63
Berechtigung, s. Rechtfertigung
Beschreibung 115, 160–1, 163
  u. Erklärung 101, 104, 108, 110
Beweis
  u. Anerkennung 78, 80, 81, 91, 126, 173
  u. Anschauung 83, 122
  u. Anwendung, s. Anwendung
  u. Begriff, s. Begriff
  u. Begriffsbildung, s. Begriffsbildung
  u. Bewegung (s.a. Beweis und Weg) 154
  u. Bild, s. Bild
  u. Definition, s. Definition
  u. Entscheidung 77, 122
  u. Erfahrung, s. Erfahrung
  u. Ergebnis 76, 77
  u. Erkenntnis 77
  in Euklid 65, 78, 89, 90
  d. Existenz, s. Existenzbeweis
  u. Experiment, s. Experiment
  geometrische Auffassung des Beweises 52, 80–4, 88. 90, 176–7
  u. Gewißheit 83
  (als Teil einer) Institution 80
  u. interne Eigenschaft (Relation) 29, 163, 196
  u. Kausalität 125, 173
  u. Konstruktion (Konstruierbarkeit) 75, 77, 78, 80
  u. Maß 75, 76, 77
  mehrere Beweise desselben Satzes 92–3, 164–5, 186
  u. Muster, s. B. u. Paradigma
  u. Paradigma 69, 70, 71, 72, 77, 78–9, 80, 82
  prahlerischer 56
  u. Regel, s. Regel
  u. Reproduzierbarkeit 65, 69, 70, 75, 83, 84, 91, 125
  in Russells Logik (Russell-Beweis) 65–8, 71–3, 78, 79, 83–6, 88–9, 91, 92, 117–8
  u. (mathematischer) Satz 76, 163, 195
  u. Sinn, s. Sinn
  u. Sprache 44, 96
  u. Übereinstimmung 21, 44, 96, 122, 164
  u. Übersichtlichkeit 45, 65–71, 75, 81, 83–4, 91, 125, 175
  u. Überzeugung 15, 17, 19, 20, 22, 71, 76, 77, 79, 81, 83, 90, 92, 93, 126, 154–5, 177, 195–6
  u. Verständigung 96
  u. Verstehen 154
  u. Vorhersage (Voraussage) 52, 96, 120, 123
  u. Wahrheit 186
  u. Weg 46, 47,'81, 82, 122
  u. Wesen 29, 123
  d. Widerspruchsfreiheit, s. Widerspruchsfreiheitsbeweis
  u. Zwang 13, 18, 20, 42, 90, 122
  u. Zweifel 75, 81, 83, 163
beweisbar 50–3, 77, 176
Bild 11, 61, 113, 116–7, 119
  u. Bedeutung 7, 63

Bild u. Beweis 18, 19, 22, 37–8, 42, 65, 75, 76, 79, 81, 82, 83, 119–20, 164, 173, 195–6
  einprägsames B. 10, 26, 62, 69
  u. Experiment 13, 26
  u. Satz 127, 128, 157
  u. Überzeugung 119, 123
Bruch 60–2

Cantor 56, 58

Dedekind-Schnitt 148–51, 153, 186
Dedekinds Theorem, s. Dedekind-Schnitt
Definition 65–6, 76, 84, 87, 90, 91, 174
Demonstration, s. Beweis
Denken 18, 34–5, 41, 121, 123, 171
Denkgesetz 41
Dezimalsystem 66, 69, 70–1, 74, 84–5, 89, 90, 91–2
Diagonalverfahren (-Regel, -Zahl) 54–8
Division durch Null 100–1, 108, 109, 166, 168–9

Einleuchten (s.a. Axiom) 113–4
Einsehen (s.a. Einleuchten, Intuition) 123, 125
einprägen (einprägsam, s.a. Bild) 10, 14, 15, 25, 26, 62
Empirie (Empirismus), s. Grenzen der E.
endlos (s.a. unendlich) 57, 59, 136–7, 138–9, 141, 144
entdecken (Entdecker, Entdeckung) 47, 59, 127
Erfahrungssatz 32, 80, 114, 159–60, 173, 178, 187
  u. Axiom 113–4
  u. Beweis 122
Erfahrungstatsache (s.a. Tatsache) 27, 28, 126
erfinden (Erfinder) 47, 59, 140
Erklärung (s.a. Beschreibung) 101, 104, 108, 110
Erlaubnis (s.a. Gebot) 57
Erwartung 129–30
Euklid (s.a. Beweis) 8, 30, 50, 90
Existenz (mathematische) 115, 138–45, 185
Existenzbeweis (s.a. Existenz) 147, 155
Experiment 13–14, 19, 24–30, 123, 126
  u. Beweis 13–14, 45–6, 65, 69, 75, 81, 82, 90, 91, 96
  u. Mathematik 175, 187–90
  u. Rechnung 46, 88, 95–7, 134, 164, 171–3, 178, 180
  u. Regel 194
Extension 57, 58
extensional 149–53

Familie (Familienähnlichkeit) 138, 155, 180, 186
Finitismus 63, 150
Folgen, s. Regelfolgen
folge(r)n, s. schließen u. Schluß
Form 15, 16, 19, 22, 25, 127, 128, 153
Frage 49
Frege 9, 41, 44, 62, 104, 119, 123, 135, 171, 186
Funktion 151–3

Gebot 34, 35, 118, 140–4, 184, 190
Gebrauch (s.a. Anwendung, Bedeutung, Sinn) 4, 6, 7, 8, 54, 63, 133, 165
Gegenstand
  idealer G. 136
  mathematischer G. 60, 136, 142
Gesetz, s. Gebot, Schluß, Regel
  vom ausgeschlossenen Dritten 138–45, 149
  d. Identität, s. Identität
Gestalt (s.a. Form) 23, 70, 73
glauben (einen mathematischen Satz gl.) 31–3
gleich (s.a. Gleichheit, Übereinstimmung) 3, 91, 92, 93, 98, 99, 184, 196
Gleichheit (s.a. Übereinstimmung) 90, 121, 126, 161
gleichzahlig, s. Zahlengleichheit
Gödel (Gödels Problem, Gödels Satz) 50–54, 174, 176–7
Grammatik 32, 40, 57, 58, 59, 77, 79, 80, 81, 119, 161, 164, 171, 182
Grenzen der Empirie (des Empirismus) 95, 121, 171, 176
Grund 59
Grundgesetz, s. Axiom
Grundlagen (Grundlegung) d. Mathematik 83, 111, 171

heterologisch 102, 178
Heine-Borel Theorem 152

Identität(sgesetz) 41, 69, 125, 183
Induktionsbeweis, s. Rekursion
intensional, s. extensional
Intention 40
Intuition 3, 71, 120, 121, 126, 164
Irrationalzahl (s.a. Dedekind-Schnitt) 54, 57–8, 138, 148–51, 167, 185

Kalkül, s. Frege, Rechnung, Russell
Kardinalzahl 55, 57, 59, 61, 62, 66, 186
Kausalität, s. Beweis, Rechnung
Konstante (logische) 79
Konstruktion (konstruieren, Konstruierbarkeit) 77, 79, 80, 127, 147, 151, 155, 176–7

Logik (s.a. Konstante, Maschine, Muß, Russell, Schluß) 72–3
  u. Arithmetik (s.a. L. u. Mathematik) 67, 81, 109
  Fluch d. L. 76, 145, 146, 147, 155, 156, 185

Logik u. Mathematik 47, 83, 84, 89, 145–7
als Ultra-Physik 6
der Lügner 51, 130–1, 170, 183

Maschine (s.a. Rechenmaschine)
logische (s.a. mechanisch) 36, 106, 127
mathematische, s. logische M.
als Symbol 37–9, 123, 127, 195
Maß, s. Beweis, Messen
Mathematik (Alg. Bem.) 47, 84, 88, 99, 173, 174, 190
angewandte u. reine Mathematik 110, 118, 137–8, 163, 188
u. Grammatik 119
u. Maß 99
ohne Sätze 43, 49, 118–9, 137, 180
mechanisch (mechanische Mittel, mechanische Sicherung, Mechanisierung d. Mathematik) 106, 107, 109, 110, 167, 168
meinen 2–3, 6, 7, 15, 32
Mengenlehre 56, 134, 137
messen 4–5, 6, 15, 27, 37, 42, 67, 75, 80, 86, 87–8, 98, 120, 159–60, 170–1, 173–4, 178, 194
möglich (Möglichkeit) 15, 17, 25, 27, 37, 38, 39, 107, 108, 111, 114–5, 116, 122,
Multiplikativ-Axiom 146, 181
Muss (s.a. notwendig) 37, 42, 47, 69, 78, 81, 121, 122, 127, 184, 190, 193–4
Muster, s. Paradigma

Naturgeschichte
der mathematischen Gegenstände (der Zahlen) 60, 116, 117
des Menschen 20, 43, 94, 97, 110, 160, 180
Negation, s. Verneinung
Norm (normativ) (s.a. Gebot) 190, 194
notwendig (Notwendigkeit) (s.a. Muß) 4, 153
numerierbar 141

Ordnung 101, 105, 107

Paradigma (Muster) (s.a. Beweis, Bild) 11–13, 16, 31, 45, 46, 69, 70, 72, 75, 78, 79, 80, 82
Philosophie 57, 68, 109, 157, 170
Plato 22
Prophezeiung, s. Vorhersage
Prozeß (u. Resultat) 26, 45, 125

Realität (logische, mathematische) (s.a. Gegenstand) 45, 77
Rechenfehler 41, 42, 71, 95, 97, 105, 111, 120, 190
Rechenmaschine 119, 121, 133–4
Rechnung, s.a. Anwendung, Beweis, Experiment, Vorhersage
u. Erfahrung 95
u. Experiment, s. Experiment u. Rechnung
u. Kausalität 173, 190
u. Verständigung (s.a. R. u. Übereinstimmung) 164
u. Verwirrung (s.a. Verwirrung) 172
u. Vorhersage 94–8, 103
u. Weg 96
u. Übereinstimmung (Consensus, Zustimmung) 94–6, 97, 187
u. Übersehbarkeit 88
Rechtfertigung 63, 82, 98, 184, 193
Rechnen, s. Zählen
Reductio ad absurdum 147
reelle Zahl 55–7, 62, 148–51
Regel 2–3, 5–6, 13, 26, 33, 34, 47, 73, 77, 78, 80, 81, 97, 115, 116, 120, 125, 127, 159–60, 183, 186, 193, 194
Regelfolgen (s.a. Regel) 3, 73, 75, 94, 116, 121, 162–3, 183, 184, 186, 193
Reihe 3–4, 55–6, 60–2
Rekursion 85, 90, 105
Resultat, s. Prozeß
Russell (R-Beweis, R-Kalkül, R-Logik) 8, 9, 50, 62, 65–73, 78, 81, 83–6, 88–9, 91–2, 117–8, 133–4, 174, 185, 191
Russells Widerspruch (Paradox) 131, 166, 170, 182–3

Satz 49, 118, 134, 166, 182
d. Logik 53, 79, 118
d. Mathematik (mathematischer S.) 32, 33, 43, 47, 76–8, 80, 85, 89, 94, 114–6, 118, 120, 121, 124, 127, 140–1, 146–7, 153, 154–5, 160, 161, 163, 181, 184, 190, 195
synthetischer *a priori* 125–6
satzartiges Gebilde 54
schließen, s. logischer Schluß
Schluß (logischer) 4–6, 7, 8–9, 11–12, 13, 30, 33, 34, 36, 43, 45, 78, 80, 82, 83, 133, 135, 163, 179, 181, 183, 190–3
Schlußregel (-gesetz) (s.a. Schluß) 45, 80, 82, 83, 163, 168, 176, 179–80, 181, 190
Sicherheit 88, 129, 135, 169, 181
Sinn (s.a. Anwendung, Bedeutung, Gebrauch) 52, 54, 76, 77, 98, 103, 113, 115, 118, 139, 140, 144, 145, 151, 153, 154, 164–5, 166
Sinnbestimmung u. Sinnverwendung 80
Spiel 21, 40, 61, 99–100, 109, 133–5, 137, 139, 155, 168
Sprache 4, 8, 20, 21, 44, 45, 47, 49, 78, 80, 96, 103, 120

Sprachspiel 8, 40, 50, 57, 96, 99, 102, 103, 110, 117, 120, 130, 144, 145, 147, 154, 155, 156, 162, 163, 164, 166, 173, 178, 179, 181, 182, 184, 186, 188, 190, 195
Sprachverwirrung (s.a. Verwirrung) 96
Stetigkeit 152
Subjekt-Prädikat Form 153

Tatsache (s.a. Erfahrungstatsache) 173–4
Tautologie 66, 67, 68, 69, 73, 78, 82, 85, 117, 140, 155, 178
Typen-Theorie 182

Übergang, s. Regel, Schluß
Übereinstimmung (s.a. Beweis, Gleichheit, Rechnung, Regel) 10, 13, 21, 44, 94–8, 115, 122, 164, 184, 187
Überraschung 18, 20, 22
Übersichtlichkeit (Übersehbarkeit) (s.a. Beweis, Rechnung) 45, 65–71, 73, 75, 81, 83–4, 88, 91, 125, 175
Überzeugung (s.a. Beweis, Schluß) 7, 10, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 71, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 85, 91, 92, 121, 126, 154–5, 177, 195–6
Umformung (s.a. Schluß) 46, 160
Umkehrung (einer Reihe, eines Wortes) 128–9
unabzählbar, s. abzählbar
unbeweisbar s. beweisbar
unendlich (s.a. endlos) 63, 135, 136–7, 138–40, 141, 143, 144, 145
unerbittlich (s.a. Muß, notwendig, Zwang) 3–4, 20, 35–6
unmöglich, s. möglich

Verbot, s. Gebot
Verifizierung 160–1
Verneinung 103
  u. Axiom 114
  doppelte V. 53
  u. Gebot 141–4
verrechnen, s. Rechenfehler
verstehen 115, 146–7, 153, 154–5, 181
Verwendung (s.a. Anwendung, Bedeutung, Gebrauch, Sinn) 38, 40, 113, 115
Verwirrung 96, 98–9, 100, 172
Vorhersage (Voraussage) (s.a. Beweis, Experiment, Rechnung) 52, 94, 95, 96, 97, 103, 109, 110, 120, 123, 124, 137–8, 145, 159, 161–2
Vorstellung (vorstellen) 26, 29, 40, 113, 114, 115, 137, 150

Wahrheit 4, 8, 41, 45, 49–53, 79, 81, 85, 92, 97, 98, 117, 121, 186
Wahrheitsfunktion 49
Wesen 12, 13, 23, 26, 29, 30–1, 125
Widerspruch (s.a. Widerspruchsfreiheitsbeweis) 51–3, 101–11, 130–1, 166–71, 178–9, 181–3, 186
Widerspruchsfreiheit(sbeweis) 101, 106–111, 167–8
wissen 160, 163

Zahl, s. Irrationalzahl, Kardinalzahl, reelle Z.
Zahlengerade (-Linie) 58, 148, 151
Zahlengleichheit 10–12, 73, 88
Zahlzeichen 70, 73, 88, 156
Zeichenspiel (s.a. Spiel) 133–5, 137, 155
zugeben, anerkennen 13, 18, 19, 20, 35, 44
Zuordnung (eins-eins-Zuordnung) (s.a. Zahlengleichheit) 10–12, 47–8, 70, 72–3, 153
Zwang (s.a. Beweis, Muß, notwendig, Regel, Schluß, unerbittlich) 3–4, 13, 18, 20, 33, 34, 35, 36, 42, 72, 73, 90, 122, 193
Zweifel 3, 21, 75, 81, 83, 163
Zählen 3–4, 24, 42, 68–70, 72, 74, 88, 122, 178, 187

INDEX

Abbreviation 65, 66, 70–1, 73–4, 83, 84, 86, 88, 90, 91
Absoluteness, of mathematics 168
Admission, acknowledgment, etc. 13, 18, 19, 20, 35, 44
Agreement (see Calculation, Identity, Proof, Rule, Same) 10, 13, 21, 44, 94–8, 115, 122, 164, 184, 187
All (see Generality) 6–8
Application (use, employment)
  and proof 76, 79, 93
  and sense (see also Meaning) 166, 179
  of mathematics (calculation) 67, 74, 77, 78, 83, 84, 87, 89, 133, 134–5, 146, 148, 151, 152, 154, 163, 170, 172
Applied mathematics, see Mathematics
Arithmetic (see Logic, Mathematics) 49, 109, 116
Aspect 70, 85–8
Axiom (fundamental laws, Pps.) 50, 79, 82, 113–4, 163, 168, 176

Behaviourism 63
Believing a mathematical proposition 31–3

Calculating machine 119, 121, 133–4
Calculation (see Application, Experiment, Proof, Prophecy)
  and agreement 94–6, 97, 187
  and causality 173, 190
  and confusion (see Confusion) 172
  and experience 95
  and experiment, see Experiment and calculation
  and making oneself understood, see Calculation and agreement
  and path 96
  and prophecy 94–8, 103
  and surveyability 87
Calculus, see Calculation, Frege, Russell
Cantor 56, 58
Cardinal number 55, 57, 59, 61, 62, 66, 186
Causality, see Proof, Calculation
Certainty 88, 129, 135, 169, 181
Command 34, 35, 118, 140–4, 184, 190
Compulsion (see Inexorability, Inference, Must, Necessity, Proof, Rule) 3–4, 13, 18, 20, 33, 34, 35, 36, 42, 72, 73, 90, 122, 193
Concept 186, 194–5
  and language-game 195
  and prediction 124
  and proof 61, 76, 78–9, 82, 85–6, 122, 127, 154–5, 177–8 ,195–6
  linking (conceptual path, connexion of concepts) 188, 195
  mathematical 129, 180, 186, 188
  new, see Concept and proof
Concept-formation (see Concept) 121–3
Confusion 96, 98–9, 100, 172
Consistency (consistency proof) 101, 106–111, 167–8
Constants, logical 79
Construction (constructibility) 77, 79, 80, 127, 147, 151, 155, 176–7
Continuity 152
Contradiction (see Consistency proof) 51–3, 101–11, 130–1, 166–71, 178–9, 181–3, 186
Conviction (see Inference, Proof) 7, 10, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 71, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 85, 91, 92, 121, 126, 154–5, 177, 195–6
Correlation, 1—1 (see Equality of number) 10–12, 47–8, 70, 72–3, 153
Counting 3–4, 24, 42, 68–70, 72, 74, 88, 122, 178, 187

Decimal system 66, 69, 70–1, 74, 84–5, 89, 90, 91–2
Dedekind cut 148–51, 153, 186
Definition 65–6, 76, 84, 87, 90, 91, 174
Denumerable, Non-denumerable 56, 141
Derivation, see Inference
Description 115, 160–1, 163
  and explanation 101, 104, 108, 110
Diagonal procedure (-rule, -number) 54–8
Discovery (discoverer) 47, 59, 127
Division by 0 100–1, 108, 109, 166, 168–9
Doubt 3, 21, 75, 81, 83, 163

Empirical fact (see Fact) 27, 28, 126
Empirical proposition 32, 80, 114, 159–60, 173, 178, 187
  and axiom 113–4
  and proof 122
Empiricism, see Limits of empiricism
Equality of number 10–12, 72, 88
Essence 12, 13, 23, 26, 29, 30–1, 125
Euclid (see Proof) 8, 30, 50, 90
Existence, mathematical 115, 138–45, 185
Existence proofs (see Existence) 147, 155
Expectation 129–30
Experiment 13–14, 19, 24–30, 123, 126
  and calculation 46, 88, 95–7, 134, 164, 171–3, 178, 180
  and mathematics 175, 187–90

Experiment and proof 13–14, 45–6, 65, 69, 75, 81, 82, 90, 91, 96
and rule 194
Explanation (see Description) 101, 104, 108, 110
Extension 57
Extensional 149–53

Fact 173–4
Family (family resemblance) 138, 155, 180, 186
Finitism 63, 150
Form, Shape 15, 16, 19, 22, 25, 127, 128, 153
Foundations of mathematics 83, 111, 171
Fraction 60–2
Frege 9, 41, 44, 62, 104, 119, 123, 135, 171, 186
Function 151–3
Fundamental law, see Axiom

Game 21, 40, 61, 99–100, 109, 133–5, 137, 139, 155, 168
Generality 146, 151, 153, 156
Gödel 50–4, 174, 176–7
Grammar 32, 40, 57, 58, 59, 77, 79, 80, 81, 119, 161, 164, 171, 182
Grounds 59

Heine-Borel theorem 152
Heterological 102, 178

Identity, Law of, 41, 183
Identity (equality) (see Same, Agreement) 3, 69, 90, 92, 93, 96, 121, 125, 161, 184, 196
Imagining (image) 26, 29, 40, 113, 114, 115, 137, 150
Impossibility, see Possibility
Impress, see Memorable
Inductive proof, see Recursive
Inexorability (see Compulsion, Must, Necessity) 3–4, 20, 35–6
Inference, logical 4–6, 7, 8–9, 11–12, 13, 30, 33, 34, 36, 43, 45, 78, 80, 82, 83, 133, 135, 163, 179, 181, 183, 190–3
rule (law) of 45, 80, 82, 83, 163, 168, 176, 179–80, 181, 190
Infinite, infinity 57, 59, 63, 135, 136–7, 138–40, 141, 144, 145
Intensional, see Extensional
Intention 40
Intuition 3, 71, 120, 121, 126, 164
Invention (inventor) 47, 59, 140
Irrational number (see Dedekind cut) 54, 57–8, 138, 148–51, 167, 185

Justification 63, 82, 98, 184, 193

Knowing 160, 163

Language 4, 8, 20, 21, 44, 45, 47, 49, 78, 80, 96, 103, 120
Language-game 8, 40, 50, 57, 96, 99, 102, 103, 110, 117, 120, 130, 144, 145, 147, 154, 155, 156, 162, 163, 164, 166, 173, 178, 179, 181, 182, 184, 186, 188, 190, 195
Law, see Command, Inference, Rule
of excluded middle 138–45, 149
of thought 41
Liar, The 51, 130–1, 170, 183
Licence (see Command) 57
Limits of Empiricism 96, 121, 171, 176
Logic (see Constants, Inference, Machine, Must, Russell) 72–3
and arithmetic 67, 81, 109
curse of 76, 145, 146, 147, 155, 156, 185
and mathematics 47, 83, 84, 89, 145–7,
as ultra-physics 6

Machine, see Calculating machine.
logical (mathematical) 36, 106, 127
as symbol 37–9, 123, 127, 195
Mathematics (Gen. remarks) 47, 84, 88, 89, 173, 174, 190
and grammar 119
and measure 99
pure and applied 110, 118, 137–8, 163, 188
without propositions 43, 49, 118–9, 137, 180
Meaning (see Application, Use, Sense) 7, 63, 133, 142, 165, 179
Mean, to 2, 3, 6, 7, 15, 32
Measure (measuring, measurement) 4–5, 6, 15, 27, 37, 42, 67, 75, 80, 86, 87–8, 98, 120, 159–60, 170–1, 173–4, 178, 194
Mechanical (means, assurance, mechanization of mathematics) 106, 107, 109, 110, 167, 168
Memorable (see also Picture) 10, 14, 15, 25, 26, 62
Miscalculation (mistake in calculating) 41, 42, 71, 95, 97, 105, 111, 120, 190
Multiplicative Axiom 146, 181
Must (see Necessity) 37, 42, 78, 81, 121, 122, 184, 190, 193–4

Natural history
of mankind 20, 43, 94, 97, 110, 160, 180
of mathematical objects, numbers, 60, 116, 117
Necessity (see Must) 4, 47, 69, 127, 153
Negation 103
and axioms 114
and commands 141–4
double 53
Non-denumerable, see Denumerable
Norm, normative (see Command) 190, 194

Number, see Equality of —, Irrational —, Cardinal —, Real —
Number line 58, 148, 151
Numerable 141
Numeral 70, 73, 88 156

Object, ideal 136
  mathematical 60, 136, 142
Order, see Command
Order 101, 105, 107

Paradigm, pattern (see Proof, Picture) 11–13, 16, 31, 45, 46, 69, 70, 72, 75, 78, 79, 80, 82
Pattern, see Paradigm
Perspicuity, see Proof and P., Surveyable
Philosophy 57, 68, 109, 157, 170
Picture 11, 61, 113, 116–7, 119
  and conviction 119, 123
  and experiment 13, 26
  and meaning 7, 63
  and proof 18, 19, 22, 37–8, 42, 65, 75, 76, 79, 81, 82, 83, 119–20, 164, 173, 195–6
  and proposition 127, 128, 157
  memorable 10, 26, 62, 69
Plato 22
Possibility, possible 15, 17, 25, 27, 37, 38, 39, 107, 108, 111, 114–5, 116, 122
Prediction, see Prophecy
Process and result 26, 45, 125
Prohibition, see Command
Proof
  and acceptance 78, 80, 81, 91, 125, 173
  and agreement 21, 44, 96, 122, 164
  and application, see Application
  and causality 125, 173
  and certainty 83
  and compulsion 13, 18, 20, 42, 90, 122
  and concept, see Concept
  and concept-formation, see Concept-formation
  and consistency, see Consistency proof
  and construction (constructibility) 75, 77, 78, 80
  and conviction 15, 17, 19, 20, 22, 71, 76, 77, 79, 81, 83, 90, 92, 93, 126, 154–5, 177, 195–6
  and decision 77, 122
  and definition, see Definition
  and doubt 75, 81, 83, 163
  and essence 29, 123
  and experience 122
  and experiment, see Experiment
  and internal property (relation) 29, 163, 196
  and knowledge 77
  and language 44, 96
  and making oneself understood 96
  and measure 75, 76, 77
  and movement, see Proof a path
  and pattern (paradigm) 69, 70, 71, 72, 77, 78–9, 80, 82
  and perspicuity 45, 65–71, 75, 81, 83–4, 91, 125, 175
  and picture, see Picture
  and prediction (prophecy) 52, 96, 120 123
  and reproducibility 65, 69, 70, 75, 83, 84 91, 125
  and result 76, 77
  and rule, see Rule
  and sense, see Sense
  and the (mathematical) proposition 76, 163, 195
  and truth 186
  and understanding 154
  a path (road, route) 46, 47, 81, 82, 122, 154
  as part of an institution 80
  geometrical conception of 52, 80–4, 88, 90, 107–8
  in Euclid 65, 78, 89, 90
  in Russell's logic (Russellian proof) 65–8, 71–3, 78, 79, 83–6, 88–9, 91, 92, 117–8
  of existence, see Existence proof
  plain to view 83, 122
  puffed-up 56
  several proofs of the same proposition 92–3, 164–5, 186
Prophecy (see Calculation, Experiment, Proof) 52, 94, 95, 96, 97, 103, 109, 110, 120, 123, 124, 137–8, 145, 159, 161–2
Proposition 49, 118, 134, 166, 182
  logical 53, 79, 118
  mathematical 32, 33, 43, 47, 76–8, 80, 85, 89, 94, 114–6, 118, 120, 121, 124, 127, 140–1, 146–7, 153, 154–5, 160, 161, 163, 181, 184, 190, 195
  synthetic *a priori* 125–6
Proposition-like structure 54
Provability, provable 50–3, 77, 176

Question 49

Reality, logical, mathematical (see Object) 45, 77
Realization (see Self-evident, Intuition) 123 125
Real number 55–7, 62, 148–51
Recursive 85, 90, 105
Reductio ad absurdum 147
Reversal of a sequence, of a word, 128–9
Rule 2–3, 5–6, 13, 26, 33, 34, 47, 73, 77, 78, 80, 81, 97, 115, 116, 120, 125, 127, 159–60, 183, 186, 193, 194
Rule, following a 3, 34, 73, 75, 94, 116, 121, 162–3, 183, 184, 186, 193

Russell (Russell's calculus, logic; Russellian proof) 8, 9, 50, 62, 65–73, 78, 81, 83–6, 88–9, 91–2, 117–8, 133–4, 174, 185, 191
Russell's contradiction (paradox) 131, 166, 170, 182–3

Same (see Identity, Agreement) 98, 99
Sample, see Paradigm
Self-evidence (see Axioms) 113–4
Sense (see Application, Meaning, Use) 52, 54, 76, 77, 98, 103, 113, 115, 118, 139, 140, 144, 145, 151, 153, 154, 164–5, 166
  determination of and employment of 80
Series 3–4, 55–6, 60–2
Set theory 56, 134, 137
Shape (see Form) 70, 73
Statement 49, 50, 53
Subject-predicate form 153
Surprise 18, 20, 22
Surveyable, surveyability (see Calculation, Proof) 45, 65–71, 73, 75, 81, 83–4, 88, 91, 125, 175

Task (mathematical) 174–5
Tautology 66, 67, 68, 69, 73, 78, 82, 85, 117, 140, 155, 178
Theory of Types 182
Thinking 18, 34–5, 41, 121, 123, 173
Transformation (see Inference) 46, 119, 124, 160
Transition, see Rule, Inference
Truth 4, 8, 41, 45, 49–53, 79, 81, 85, 92, 97, 98, 117, 121, 186
Truth-function 49

Understanding 115, 146–7, 153, 154–5, 181
Unprovable, see Provable
Use (see Application, Meaning, Sense) 4, 6, 7, 8, 54, 63, 133, 165

Way of seeing, see Aspect