

Σημειώσεις για μάθημα 12/5/2025

①

Θα δείξουμε ότι το 7.1 αποδεικνύεται στην SDL

Υπενθυμίζουμε τη μέθοδο υποδεικνύουσας απόδειξης:
Αν δέχουμε με υπόθεση γ να αποδείξουμε ένα τύπο της μορφής $A \rightarrow B$, αρκεί με υπόθεση $\gamma + A$ να αποδείξουμε τον τύπο B .

Επομένως, να δείξουμε τον τύπο $O(p \& q) \rightarrow Op \& Oq$, αρκεί να πάρουμε ως υπόθεση τον τύπο $O(p \& q)$ και να αποδείξουμε τον τύπο $Op \& Oq$.

1. $O(p \& q)$ υπόθεση
2. $p \& q \rightarrow p$ θεώρημα του SDL (επειδή είναι ταυτολογία)
3. $O((p \& q) \rightarrow p)$ από το 2, λόγω του κανόνα RND
4. $O((p \& q) \rightarrow p) \rightarrow (O(p \& q) \rightarrow Op)$ αξίωμα KD
5. $O(p \& q) \rightarrow Op$ 3, 4, Modus Ponens
6. Op 1, 5, Modus Ponens
7. Oq όπως στα βήματα 2-6, αλλά με q αντί για p
8. $Op \& Oq$ 6, 7, κανόνας σύζευξης

Ας δούμε τώρα γιατί είναι θεώρημα ο 7.5, δηλαδή,
ο τύπος $Pp \rightarrow P(p \vee q)$.

1. $p \rightarrow (p \vee q)$ ταυτολογία (λόγος αξιωματικού)
2. $0(p \rightarrow (p \vee q))$ 1, κανόνας RND
3. $0(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (Pp \rightarrow P(p \vee q))$ τύπος 7.4
4. $Pp \rightarrow P(p \vee q)$ 2, 3, Modus Ponens

Προχωρούμε δείχνοντας ότι ο τύπος $\neg 0 \perp$ είναι θεώρημα.
Το σύμβολο $\perp$ αναπροσωπεί την αντίφαση, δηλαδή,
είναι λογικά ισοδύναμο με $\neg T$ (δηλαδή, την άρνηση μιας
ταυτολογίας).

1. $0T$ θεώρημα 7.8
2. $0T \rightarrow \neg 0 \neg T$ αξιωματικό DD
3. $\neg 0 \neg T$ 1, 2, Modus Ponens

Τέλος, ας δούμε γιατί ο κανόνας RND είναι παραγόμενος
κανόνας της SDL.

1. $p \rightarrow q$ θεώρημα (υποθέτουμε ότι είναι).
2. $0(p \rightarrow q)$ 1, κανόνας RND
3. $0(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$ αξιωματικό KD
4. $Op \rightarrow Oq$ 2, 3, Modus Ponens

(3)

Ας δούμε γιατί είναι θεωρημα ο τύπος 7.12.
 Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο απόδειξης με απαγωγή σε άτοπο,
 δηλαδή, θα πάρουμε ως προσωρινή υπόθεση την άρνηση
 του τύπου 7.12 και θα καταλήξουμε σε αντίφαση.

1. $\neg(\underline{Op} \vee (\underline{Pr} \& \underline{Pr} \neg p) \vee \underline{O} \neg p)$ υπόθεση
2. $\neg Op \& \neg(\underline{Pr} \& \underline{Pr} \neg p) \& \neg O \neg p$ 1, νόμος De Morgan
3. $\neg Op$ 2, απλοποίηση
4. $\neg(\underline{Pr} \& \underline{Pr} \neg p)$ 2, απλοποίηση
5. $\neg O \neg p$ 2, απλοποίηση
6. $\neg Pr \vee \neg Pr \neg p$ 4, νόμος De Morgan
7. Pr 5, ορισμός P μέσω του O
8. Pr $\rightarrow \neg Pr \neg p$ 6, νόμος ανακατάστασης συνεπαγωγής (κάθε τύπος της μορφής $\neg A \vee B$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $A \rightarrow B$)
9. $\neg Pr \neg p$ 7, 8, Modus Ponens
10. Op 9, ορισμός O μέσω P