

SDL	LKA
KD. $O(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$	K. $N(p \rightarrow q) \rightarrow (Np \rightarrow Nq)$
DD. $Op \rightarrow \neg O\neg p$	T. $Np \rightarrow p$
RND. Αν $\vdash p$, τότε $\vdash Op$.	RN. Αν $\vdash p$, τότε $\vdash Np$.
<u>Ορισμός P</u>	M.g. Mg
$Pp \leftrightarrow \neg O\neg p$	<u>Ορισμός O</u>
	$Op \leftrightarrow N(g \rightarrow p)$
M = möglich ($\Diamond$)	<u>Ορισμός P</u>
N = nötig ($\Box$)	$Pp \leftrightarrow M(g \& p)$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι ο ορισμός του P μέσω του ^(όσο SDL) O προκύπτει από τους ορισμούς των O και P στο LKA.

$$\begin{aligned}
 \neg O\neg p &\leftrightarrow \neg N(g \rightarrow \neg p) && \text{χάρη ορισμό O στο LKA} \\
 &\leftrightarrow M \neg(g \rightarrow \neg p) && \text{χάρη ορισμό M μέσω N} \\
 &\leftrightarrow M(g \& \neg\neg p) && \text{νόμος άρνησης συνεπαγωγής} \\
 &\leftrightarrow M(g \& p) && \text{νόμος διπλής άρνησης} \\
 &\leftrightarrow Pp && \text{χάρη ορισμό P στο LKA.}
 \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι το αξίωμα ΚD αποδεικνύεται στο ~~LKA~~ ⁽²⁾ LKA

Δηλαδή, θα δείξουμε ότι αποδεικνύεται στο LKA ότι :

$$\vdash O(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq).$$

Λόγω της μεθόδου υποθετικής απόδειξης, αρκεί να δείξουμε ότι $O(p \rightarrow q) \vdash Op \rightarrow Oq$.

Πάλι λόγω της ίδιας μεθόδου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{O(p \rightarrow q), Op\} \vdash Oq.$$

1. $O(p \rightarrow q)$ υπόθεση
2. Op "
3. $N(q \rightarrow (p \rightarrow q))$ από 1 και ορισμό O μέσω N
4. $N(q \rightarrow p)$ από 2 και ορισμό O μέσω N
5. $N(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$ λόγω αξιώμ. T
6. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ 3, 5, MP
7. $N(q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow p)$ λόγω αξιώμ. T
8. $q \rightarrow p$ 4, 7, MP
9. $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q))$ αξίωμα Πρωτ. Λογ.
10. $(q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q)$ 6, 9, MP
11. $q \rightarrow q$ 8, 10, MP
12. $N(q \rightarrow q)$ 11, κανόνας RN
13. Oq 12, ορισμός O μέσω N

(3)

Θα αποδείξουμε το αξίωμα DD στην LKA, δηλ. τον τύπο $Op \rightarrow \neg O\neg p$. Λόγω της μεθόδου απαγωγής σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι ο τύπος $\neg (Op \rightarrow \neg O\neg p)$ οδηγεί σε αντίφαση. Όμως ο τύπος αυτός είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $Op \& O\neg p$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι αυτός οδηγεί σε αντίφαση.

- | | |
|---|-----------------------|
| 1. $Op \& O\neg p$ | υπόθεση |
| 2. Op | 1, απλοποίηση |
| 3. $O\neg p$ | 1, " |
| 4. <u>$N(g \rightarrow p)$</u> | 2, ορισμός O |
| 5. <u>$N(g \rightarrow \neg p)$</u> | 3, ορισμός O |
| 6. <u>$N(g \rightarrow p) \rightarrow (g \rightarrow p)$</u> | αξίωμα T |
| 7. $g \rightarrow p$ | 4, 6, Modus Ponens |
| 8. <u>$N(g \rightarrow \neg p) \rightarrow (g \rightarrow \neg p)$</u> | αξίωμα T |
| 9. $g \rightarrow \neg p$ | 5, 8, Modus Ponens |
| 10. $(g \rightarrow \neg p) \rightarrow ((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g)$ | θεώρημα προτ. λογικής |
| 11. <u>$N((g \rightarrow \neg p) \rightarrow ((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g))$</u> | 10, κανόνας RN |
| 12. <u>$N((g \rightarrow \neg p) \rightarrow ((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g)) \rightarrow$</u>
<u>$(N(g \rightarrow \neg p) \rightarrow N((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g))$</u> | αξίωμα K |
| 13. $N(g \rightarrow \neg p) \rightarrow N((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g)$ | 11, 12, Modus Ponens |
| 14. <u>$N((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g)$</u> | 5, 13, Modus Ponens |
| 15. <u>$N((g \rightarrow p) \rightarrow \neg g) \rightarrow (N(g \rightarrow p) \rightarrow N\neg g)$</u> | αξίωμα K |
| 16. $N(g \rightarrow p) \rightarrow N\neg g$ | 14, 15, Modus Ponens |
| 17. $N\neg g$ | 4, 16, Modus Ponens |
| 18. $\neg Mg$ | 17, ορισμός M μέσω N |

(4)

Θα δείξουμε τώρα ότι ο κανόνας RND της SDL είναι παραγόμενος κανόνας της LKA.

Έστω λοιπόν ότι $\vdash p$.

Με βάση την παρακάτω απόδειξη, προκύπτει $\vdash q \rightarrow p$:

1. p θεώρημα
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ αξίωμα προτ. λογικής
3. $q \rightarrow p$ 1, 2, MP.

Τώρα όμως κατασκευάζουμε την ακόλουθη απόδειξη:

1. $q \rightarrow p$ θεώρημα
2. $N(q \rightarrow p)$ από 1 και κανόνα RN
3. $\neg p$ από 2 και ορισμό 0 μέσω N.

Συνεπώς $\vdash \neg p$, δηλαδή, ισχύει το ζητούμενο.