

SDL

$$KD. O(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$$

$$DD. Op \rightarrow \neg O\neg p$$

$$RND. \text{Av } \vdash p, \text{ τότε } \vdash Op.$$

ορισμός P

$$Pp \leftrightarrow \neg O\neg p$$

M = möglich (◇)

N = nötig (□)

LKA

$$K. N(p \rightarrow q) \rightarrow (Np \rightarrow Nq)$$

$$T. Np \rightarrow p$$

$$RN. \text{Av } \vdash p, \text{ τότε } \vdash Np.$$

$$Mg. Mg$$

ορισμός O

$$Op \leftrightarrow N(q \rightarrow p)$$

ορισμός P

$$Pp \leftrightarrow M(q \& p)$$

VW

$$KD. O(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$$

$$DD. \neg O\perp$$

$$MP. \text{Av } \vdash p \text{ και } \vdash p \rightarrow q, \text{ τότε } \vdash q$$

$$RMD. \text{Av } \vdash p \rightarrow q, \text{ τότε } \vdash Op \rightarrow Oq$$

(2)

Θα χρειασούμεε ένα θεώρημα του SDL, ~~και~~ την απόδειξη του οποίου θα κάνουμε παρακάτω. Συγκεκριμένα, θέλουμε να αποδείξουμε τον τύπο

$$(Op \& Oq) \rightarrow O(p \& q).$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, αρκεί να αποδείξουμε τον $O(p \& q)$, έχοντας ως βοηθητική υπόθεση τον τύπο $Op \& Oq$.

1. $Op \& Oq$ βοηθητική υπόθεση
2. $p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q))$ θεωρ. προτασ. λογισμύ
3. Op $\rightarrow O(q \rightarrow (p \& q))$ 2, κανόνας RMD του VW
4. Op 1, αληγοποίηση
5. $O(q \rightarrow (p \& q))$ 3, 4, Modus Ponens
6. $O(q \rightarrow (p \& q))$ $\rightarrow (Oq \rightarrow O(p \& q))$ αξίωμα KD.
7. $Oq \rightarrow O(p \& q)$ 5, 6, Modus Ponens
8. Oq 1, αληγοποίηση
9. $O(p \& q)$ 7, 8, Modus Ponens

Από την VW αποδεικνύεται η $DD. Op \rightarrow \neg O \neg p$.

Με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, αρκεί, έχοντας τα αξιώματα και τους κανόνες της VW, να πάρουμε τον Op ως βοηθητική υπόθεση και να αποδείξουμε τον $\neg O \neg p$. Στη συνέχεια, μπορούμε να πάρουμε ως δεύτερη βοηθητική υπόθεση, με βάση τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο, τον τύπο $\neg O \neg p$ και να επιδιώξουμε να καταλήξουμε σε αντίφαση.

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. Op | βοηθητική υπόθεση |
| 2. $\neg O \neg p$ | " " |
| 3. $O \neg p$ | 2, νόμος διπλής άρτησης |
| 4. <u>$Op \& O \neg p$</u> | 1, 3, σύζευξη |
| 5. <u>$Op \& O \neg p$</u> $\rightarrow O(p \& \neg p)$ | θεώρημα σελίδας 2 |
| 6. <u>$O(p \& \neg p)$</u> | 4, 5, Modus Ponens |
| 7. $p \& \neg p \rightarrow \perp$ | θεώρ. περ. λογισμ. |
| 8. <u>$O(p \& \neg p)$</u> $\rightarrow O \perp$ | 7, κανόνας RMD |
| 9. $O \perp$ | 6, 8, Modus Ponens |
| 10. $\neg O \perp$ | αξίωμα OD του VW |

όμως οι τύποι στο 9 και στο 10 αντιφάσκουν!

Επομένως $Op \vdash \neg O \neg p$

και άρα $\vdash Op \rightarrow \neg O \neg p$, που είναι το ζητούμενο.