Σημειώσεις για μάθημα 24/3/2025

Αναλυτικά πρότερα 8.

Ἐπεὶ δ᾽ ἕτερόν ἐστιν ὑπάρχειν τε καὶ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν καὶ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν (πολλὰ γὰρ ὑπάρχει μέν, οὐ μέντοι ἐξ ἀνάγκης· τὰ δ᾽ οὔτ᾽ ἐξ ἀνάγκης οὔθ᾽ ὑπάρχει ὅλως, ἐνδέχεται δ᾽ ὑπάρχειν), δῆλον ὅτι καὶ συλλογισμὸς ἑκάστου τούτων ἕτερος ἔσται, καὶ οὐχ ὁμοίως ἐχόντων τῶν ὅρων, ἀλλ᾽ ὁ μὲν ἐξ ἀναγκαίων, ὁ δ᾽ ἐξ ὑπαρχόντων, ὁ δ᾽ ἐξ ἐνδεχομένων.

πρόχειρη μετάφραση:

Επειδή, λοιπόν, άλλο είναι η απλή απόδοση, άλλο η αναγκαία και άλλο η ενδεχομενική (καθότι πολλά κατηγορούνται μεν, όχι όμως αναγκαία, ενώ άλλα δεν κατηγορούνται ούτε αναγκαία, ούτε απλά, είναι όμως ενδεχόμενα), είναι φανερό ότι και ο συλλογισμός καθενός από τα παραπάνω θα είναι διαφορετικός, και με όχι όμοια διακείμενους τους όρους, αλλά ο ένας θα είναι με αναγκαίους, ο άλλος με απλής απόδοσης, ο τρίτος με ενδεχομενικούς.

Τροπική Προτασιακή Λογική (Modal Propos. Logic)

(α) προτασιακές μεταβλητές
(β) σύνδεσμοι
(γ) παρενθέσεις

} όπως στην κλασική προτασιακή λογική

(δ) τροπικοί τελεστές : □ (είναι αναγκαίο ότι)
◇ (είναι δυνατό ότι)

<u>Σημείωση.</u> Αντί για το σύμβολο □, μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το N (από τη λέξη "necessary" στα αγγλικά ή "nötig" στα γερμανικά) και αντί για το σύμβολο ◇, μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το P (από τη λέξη "possible" στα αγγλικά) ή το M (από τη λέξη "möglich" στα γερμανικά).

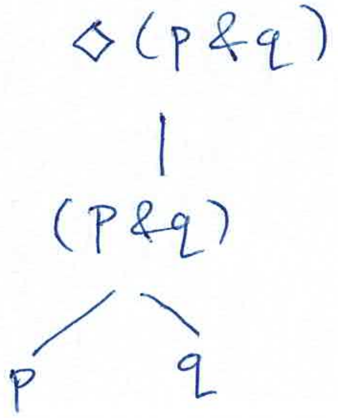
Οι τροπικοί προτασιακοί τύποι ορίζονται με τρόπο όμοιο με αυτόν που κατασκευάζονται οι προτασιακοί τύποι. Δηλαδή:

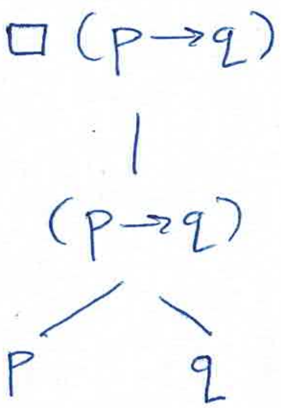
(1) κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι τροπικός προτασ. τύπος
(2) αν P είναι ήδη κατασκευασμένος τροπικός προτασ. τύπος, η έκφραση ∼P είναι επίσης τροπικός προτασ. τύπος.
(3) αν P, Q είναι ήδη κατασκευασμένοι τροπικοί προτασ. τύποι, οι εκφράσεις (P&Q), (P∨Q), (P→Q) και (P↔Q) είναι επίσης τροπικοί προτασιακοί τύποι.
(4) αν P είναι ήδη κατασκευασμένος τροπικός προτασ. τύπος, οι εκφράσεις □P, ◇P είναι επίσης τροπικοί προτασ. τύποι.

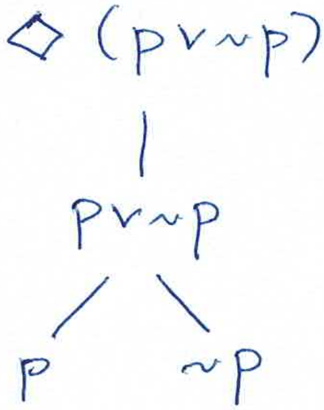
Παραδείγματα τροπικών προτασιακών τύπων

$\Diamond(p \& q)$, $\Diamond\Box p$, $\Box(p \to q)$, $\Diamond(p \vee \sim p)$.

Δενδροδιαγράμματα τροπικών προτασιακών τύπων







Υπενθύμιση για σημασιολογία κλασικής προτασιακής λογικής

αποτίμηση (valuation) v

$$\begin{array}{cccc} P_0, & P_1, & P_2, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \tau_0, & \tau_1, & \tau_2, & \dots \end{array}$$

όπου τ_i είναι 1 ή 0.

πίνακες αλήθειας συνδέσμων

$v(P)$	$v(\sim P)$
1	0
0	1

$v(P)$	$v(Q)$	$v(P \& Q)$	$v(P \vee Q)$	$v(P \to Q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Σημασιολογία τροπικής προτασιακής λογικής

σημασιολογία δυνατών κόσμων (possible worlds semantics)

David Lewis (1941–2001)

Saul Kripke (1940–2022)

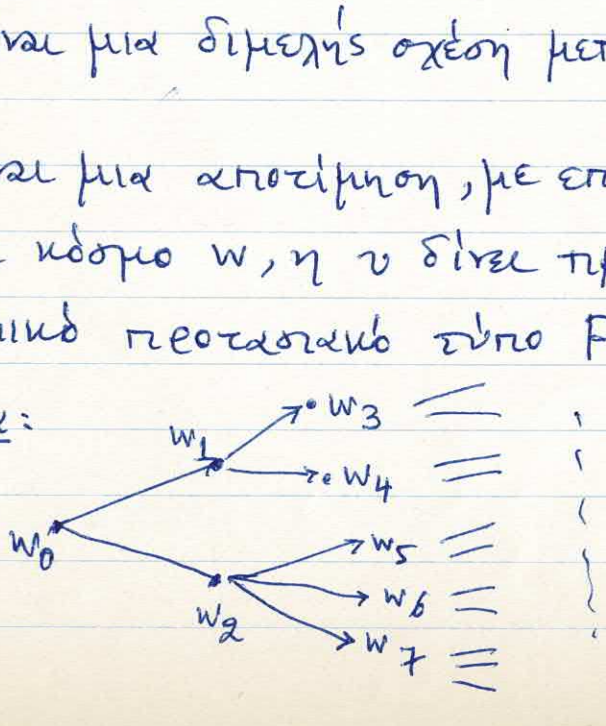
μια ερμηνεία είναι μια τριάδα (W, R, v), όπου

W συμβολίζει ένα σύνολο κόσμων (worlds)

R είναι μια διμελής σχέση μεταξύ κόσμων (accessibility relation)

v είναι μια αποτίμηση, με επεκτεταμένη έννοια (για κάθε κόσμο w, η v δίνει τιμή αλήθειας 1 ή 0 σε κάθε τροπικό προτασιακό τύπο P).

Εικόνα:



Για ευκολία, χρησιμοποιούμε σχήματα για να περιγράψουμε μια ερμηνεία, όπως παρακάτω

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & w_1 \quad p, q \\
\sim p, \sim q \quad w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & w_2 \arrow[loop above] \quad p, \sim q
\end{tikzcd}$$

Το σχήμα αυτό αντιστοιχεί στην ερμηνεία

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$

$R = \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_0, w_2 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$

$v_{w_0}(p) = 0$, $v_{w_0}(q) = 0$

$v_{w_1}(p) = 1$, $v_{w_1}(q) = 1$

$v_{w_2}(p) = 1$, $v_{w_2}(q) = 0$.

Οι πίνακες αλήθειας για τους συνδέσμους παραμένουν ίδιοι, ενώ οι σημασιολογικές συνθήκες για τους τροπικούς τελεστές είναι οι ακόλουθες:

$v_w(\Box P) = 1$ ανν για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P) = 1$.

$v_w(\Diamond P) = 1$ ανν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και ισχύει $v_{w'}(P) = 1$.

Για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, με βάση τις συνθήκες αλήθειας για τους συνδέσμους και τους τροπικούς τελεστές, υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας οποιουδήποτε προτασιακού τύπου σε οποιοδήποτε κόσμο (της ερμηνείας):

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & w_1 \quad \begin{array}{c} p, q \\ (p \& q), \sim \Diamond q \end{array} \\
\begin{array}{c} \sim p, \sim q \quad w_0 \\ \Diamond(p \& q), \Diamond \Box p \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & w_2 \arrow[loop above] \quad \begin{array}{c} p, \sim q \\ \Box p, \Diamond \sim (p \to q) \end{array}
\end{tikzcd}$$

Για την ερμηνεία της σελ. 5, θα ελέγξουμε ότι ο τύπος $\Diamond(p\&q)$ είναι αληθής στον κόσμο w_0, με άλλα λόγια, ότι $v_{w_0}(\Diamond(p\&q))=1$.

Επειδή ο δοθείς τύπος είναι της μορφής $\Diamond P$, με βάση τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(P)=1$.

Εξετάζοντας την δεδομένη ερμηνεία, βλέπουμε ότι υπάρχει ο κόσμος w_1 για τον οποίο ισχύει ότι $w_0 R w_1$ και $v_{w_1}(p\&q)=1$.

Το πρώτο, δηλαδή, ότι $w_0 R w_1$ είναι προφανές από το διάγραμμα στο κάτω μέρος της σελ. 5.

Το δεύτερο, δηλαδή, ότι $v_{w_1}(p\&q)=1$ προκύπτει από το γεγονός ότι $v_{w_1}(p)=1$ και $v_{w_1}(q)=1$, που φαίνεται επίσης στο διάγραμμα.

Για την ίδια ερμηνεία, θα ελέγξουμε ότι $v_{w_1}(\sim\Diamond q)=1$, δηλαδή, ότι ο τύπος $\sim\Diamond q$ αληθεύει στον κόσμο w_1.

Με βάση το σημασιολογικό ρόλο της άρνησης $\sim$, αρκεί να δείξουμε ότι $v_{w_1}(\Diamond q)=0$.

Με άλλα λόγια, με βάση τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$, αυτό ισοδυναμεί με το ότι δεν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και $v_{w'}(q)=1$. Πράγματι, αφού δεν υπάρχει κανένας κόσμος στον οποίο έχει πρόσβαση ο w_1, κατά μείζονα λόγο, δεν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και $v_{w'}(q)=1$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Για την ίδια ερμηνεία, θα ελέγξουμε ότι

$$v_{w_2}(\Diamond \sim(p \to q)) = 1.$$

Με βάση το σημασιολογικό ρόλο του τελεστή $\Diamond$, αρκεί να ελέγξουμε ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_2 R w'$ και ισχύει $v_{w'}(\sim(p \to q)) = 1$.

Με βάση τον ορισμό της ερμηνείας, ο μόνος κόσμος w' στον οποίο έχει πρόσβαση ο w_1 είναι ο ίδιος ο w_2.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $v_{w_2}(\sim(p \to q)) = 1$.

Λόγω του σημασιολογικού ρόλου της $\sim$, αρκεί να ελέγξουμε ότι $v_{w_2}(p \to q) = 0$. Αυτό όμως ισχύει, διότι, στην ερμηνεία αυτή έχουμε $v_{w_2}(p) = 1$ και $v_{w_2}(q) = 0$ (διότι $v_{w_2}(\sim q) = 1$).

Για την ίδια ερμηνεία, θα ελέγξουμε ότι

$$v_{w_0}(\Diamond \Box p) = 1.$$

Λόγω της σημασιολογικής συνθήκης για τον τελεστή $\Diamond$, αρκεί να υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και να ισχύει $v_{w'}(\Box p) = 1$.

Οι κόσμοι στους οποίους έχει πρόσβαση ο w_0 είναι οι w_1 και w_2.

Εξετάζουμε πρώτα τον w_1, δηλαδή, θα ελέγξουμε αν $v_{w_1}(\Box p) = 1$.

Για να ισχύει αυτό, πρέπει σε όλους τους κόσμους (8)
w' με $w_1 R w'$ να ισχύει $v_{w'}(p)=1$.
Όμως δεν υπάρχει κανένας κόσμος στον οποίο έχει πρόσβαση ο w_1. Άρα, με κενή έννοια, ισχύει $v_{w'}(p)=1$ σε όλους τους κόσμους w' που ικανοποιούν $w_1 R w'$.

Δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με τον κόσμο w_2, αλλά, χάριν εξάσκησης, ας δούμε αν ισχύει $v_{w_2}(\Box p)=1$.
Για να ισχύει αυτό, πρέπει για όλους τους κόσμους w' τέτοιους που $w_2 R w'$ να ισχύει ότι $v_{w'}(p)=1$.
Ο μόνος κόσμος w' για τον οποίο ισχύει $w_2 R w'$ είναι ο ίδιος ο w_2. Επειδή όμως, λόγω του ορισμού της ερμηνείας, ισχύει ότι $v_{w_2}(p)=1$, είναι αλήθεια ότι $v_{w_2}(\Box p)=1$. Επαληθεύεται λοιπόν πάλι ότι

$$v_{w_0}(\Diamond \Box p)=1.$$

Λογική συνεπαγωγή στην τροπική προτασιακή λογική

Σ σύνολο τροπικών προτασιακών τύπων

P τροπικός προτασιακός τύπος

$\Sigma \models P$ αν για κάθε ερμηνεία (W, R, v) και κάθε κόσμο w,
αν $v_w(Q)=1$ για κάθε $Q \in \Sigma$, τότε $v_w(P)=1$.

(Υπενθύμιση για κλασική προτασιακή λογική:
$\Sigma \models P$ αν για κάθε αποτίμηση v,
αν $v(Q)=1$ για κάθε $Q \in \Sigma$, τότε $v(P)=1$.)

Παράδειγμα λογικής συνεπαγωγής στην τροπική προτ. λογική

$$(\Box P \,\&\, \Box Q) \models \Box(P \,\&\, Q).$$

Θεωρούμε τυχούσα ερμηνεία (W, R, v). Πρέπει να δείξουμε ότι,
για κάθε κόσμο $w \in W$, αν $v_w(\Box P \,\&\, \Box Q)=1$, τότε ισχύει
$v_w(\Box(P \,\&\, Q))=1$.

Ας πάρουμε λοιπόν τυχόντα κόσμο w και ας υποθέσουμε
ότι $v_w(\Box P \,\&\, \Box Q)=1$.

Με βάση τον πίνακα της $\&$, πρέπει να ισχύει ότι
$v_w(\Box P)=1$ και $v_w(\Box Q)=1$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τη συνθήκη αλήθειας για τον $\Box$,
προκύπτει ότι
(α) για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P)=1$.
(β) " " " " " " " ισχύει $v_{w'}(Q)=1$.

Από τις (α) και (β) έπεται ότι
για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P \,\&\, Q)=1$.

Επομένως, πάλι με βάση τη συνθήκη αλήθειας για τον $\Box$,
προκύπτει ότι $v_w(\Box(P \,\&\, Q))=1$, δηλ., το ζητούμενο.

Παράδειγμα όπου δεν ισχύει λογική συνεπαγωγή

$$\Box(p\vee q) \not\models (\Box p \vee \Box q).$$

Αρκεί να βρούμε μια ερμηνεία (W,R,v) τέτοια που υπάρχει κόσμος w για τον οποίο ισχύει

$$v_w(\Box(p\vee q))=1, \text{ αλλά } v_w(\Box p\vee \Box q)=0.$$

Θεωρούμε την ερμηνεία που αντιστοιχεί στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{tikzcd} & w_1 \quad p, \sim q \\ w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & w_2 \quad \sim p, q \end{tikzcd}$$

(οι τιμές των p,q στον κόσμο w_0 δεν έχουν σημασία).
Ισχυριζόμαστε ότι $v_{w_0}(\Box(p\vee q))=1$ και $v_{w_0}(\Box p\vee\Box q)=0$.

(α) Θα δείξουμε ότι $v_{w_0}(\Box(p\vee q))=1$, δηλαδή, ότι

για κάθε w' τέτοιο που w_0Rw', ισχύει $v_{w'}(p\vee q)=1$.

για τον κόσμο w_1, προφανώς ισχύει $v_{w_1}(p\vee q)=1$ και
" " " w_2, " " $v_{w_2}(p\vee q)=1$.
Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

(β) Θα δείξουμε ότι $v_{w_0}(\Box p\vee\Box q)=0$, δηλαδή, ότι
$v_{w_0}(\Box p)=0$ και $v_{w_0}(\Box q)=0$.

ότι $v_{w_0}(\Box p)=0$ έπεται από το γεγονός ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που w_0Rw' και $v_{w'}(p)=0$ (πράγματι, ο w_2 είναι τέτοιος κόσμος).

ότι $v_{w_0}(\Box q)=0$ έπεται από το γεγονός ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που w_0Rw' και $v_{w'}(q)=0$ (πράγματι, ο w_1 είναι τέτοιος κόσμος).

CAMBRIDGE INTRODUCTIONS TO PHILOSOPHY

An Introduction to Non-Classical Logic

From If to Is

GRAHAM PRIEST

Second Edition