

Απόδειξη (7.14)

1. $q \rightarrow q$ προτασιακός λογισμός
2. $\Box(q \rightarrow q)$ 1, κανόνας RN
3. $\Box q$ 2, ορισμός τελεστή $\Box$ μέσω N.

Απόδειξη (7.15)

Με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, για να δείξουμε τον τύπο $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$, αρκεί με υποθέσεις τους τύπους $\Box(p \rightarrow q)$, $\Box p$ να δείξουμε τον $\Box q$, δηλαδή από τους τύπους $\Box(p \rightarrow q)$, $\Box(q \rightarrow p)$ να δείξουμε τον $\Box(q \rightarrow q)$.

1. $\Box(p \rightarrow q)$ υπόθεση
2. $\Box(q \rightarrow p)$ υπόθεση
3. $\Box(\Box(p \rightarrow q) \& \Box(q \rightarrow p)) \rightarrow \Box((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p))$ δεώρ. τροπικής λογικής
4. $\Box(p \rightarrow q) \& \Box(q \rightarrow p)$ 1, 2, κανόνας σύμφωνης
5. $\Box((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p))$ 3, 4, Modus Ponens
6. $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q)$ δεώρ. προτ. λογισμίου
7. $\Box([(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)] \rightarrow (q \rightarrow q))$ 6, rule of necessitation
8. $\Box([[(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)] \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow (\Box((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)) \rightarrow \Box(q \rightarrow q))$ αξίωμα K
9. $\Box((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)) \rightarrow \Box(q \rightarrow q)$ 7, 8, Modus Ponens
10. $\Box(q \rightarrow q)$ 5, 9, Modus Ponens

Απόδειξη (7.16)

(2)

Για να δείξουμε τον τύπο $\Box p \rightarrow Op$ αρκεί, λόγω της μεθόδου υποδεικνύουσας απόδειξης, να δείξουμε ότι με υπόθεση τον τύπο $\Box p$ μπορεί να δείξουμε τον Op .

1. $\Box p$ υπόθεση
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ αξίωμα προτασ. λογισμών
3. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ 2, κανόνας necessitation
4. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow p))$ αξίωμα K
5. $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)$ 3, 4, Modus Ponens
6. $\Box(q \rightarrow p)$ 1, 5, Modus Ponens
7. Op 6, με βάση τον ορισμό του O μέσω του $\Box$

Θα δείξουμε ότι ο τύπος $O(Op \rightarrow p)$ δεν αποδεικνύεται στην SDL (πρότυπη δεοντική λογική).

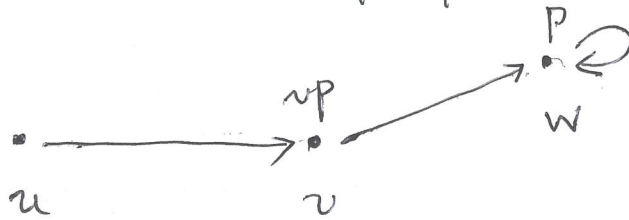
Αυτό θα γίνει δίνοντας ένα μοντέλο στο οποίο αληθεύουν τα αξιώματα και ισχύουν οι κανόνες της SDL, αλλά δεν αληθεύει ο τύπος $O(Op \rightarrow p)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα ~~μοντέλο~~ ^{μοντέλο} δυνατών κόσμων είναι μία τριάδα $\langle W, R, I \rangle$, όπου W είναι ένα σύνολο δυνατών κόσμων, R είναι η σχέση προσβασιμότητας ή αναγκαστικότητας και I είναι μία ερμηνεία που αντιστοιχεί σε κάθε προτασιακή μεταβλητή ένα υποσύνολο του W .

Λέμε ότι η R είναι σειριακή (serial) αν για κάθε $w \in W$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $v \in W$ τέτοιο που Rwv (ή wRv).

Είναι γνωστό ότι, αν θεωρήσουμε μόνο μοντέλα σε οποία η σχέση R είναι σειριακή, τότε τα αξιώματα της SDL αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα αυτά και οι κανόνες της SDL διατηρούν την αλήθεια.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ένα μοντέλο στο οποίο δεν αληθεύει ο τύπος $\neg (Op \rightarrow p)$.



$$W = \{u, v, w\}$$

$$R = \{ \langle u, v \rangle, \langle v, w \rangle, \langle w, w \rangle \}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση R είναι σειριακή. πράγματι, ο u έχει πρόσβαση στον v , ο v έχει πρόσβαση στον w και ο w έχει πρόσβαση στον εαυτό του.

Θα δείξουμε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο αληθεύει ότι $\neg (Op \rightarrow p)$

ή, με άλλα λόγια, είναι ψευδής ο $Op \rightarrow p$ σε τουλάχιστον ένα κόσμο που ανήκει στο W .

Παρατηρούμε ότι στον κόσμο v

(i) αληθεύει ο τύπος Op και

(ii) δεν αληθεύει ο τύπος $Op \rightarrow p$.

Για το (i), βλέπουμε ότι ο p αληθεύει σε όλους τους κόσμους στους οποίους έχει πρόσβαση ο v (δηλαδή ακριβώς στον κόσμο w).

(4)

Για το (ii), βγέ πουμε ότι (λόγω του (i)), αληθεύει ο $\neg \phi$,
αλλά δεν αληθεύει ο ϕ (αφού στον ν αληθεύει ο $\neg \phi$).
Κατά συνέπεια, υπάρχει κόσμος στον οποίο έχει προέκταση
ο μ και στον οποίο δεν αληθεύει ο τύπος $\neg \phi \rightarrow \phi$
(πράγματι, ένας τέτοιος κόσμος είναι ο ν).

Συνεπώς δεν αληθεύει στον κόσμο μ ο τύπος

$$\neg(\neg \phi \rightarrow \phi)$$

και άρα αληθεύει ο $\neg \neg(\neg \phi \rightarrow \phi)$ στον μ (και στο (W, R)).

Λέμε ότι η R είναι "δευτερευόντως αναγκαστική", αν για
κάθε κόσμο $\mu \in W$ και κάθε ν στο οποίο έχει προέκταση
ο μ ισχύει $\mu R \nu$ (ή $R \mu \nu$).

Θα δείξουμε ότι σε κάθε μοντέλο της SDL αληθεύει ο
τύπος $\neg(\neg \phi \rightarrow \phi)$, αν θεωρήσουμε μόνο R δευτερ.αναγκαστική.

Έστω λοιπόν μοντέλο (W, R) , με R δευτερ.αναγκαστική και

$\mu \in W$. Θα δείξουμε ότι ο $\neg(\neg \phi \rightarrow \phi)$ αληθεύει στο μ .

Προς άτοπο, έστω ότι στον κόσμο μ αληθεύει ότι $\neg \neg(\neg \phi \rightarrow \phi)$.

Τότε υπάρχει επόμενος κόσμος ν στον οποίο είναι ψευδής

ο τύπος $\neg \phi \rightarrow \phi$. Έπεται ότι υπάρχει ν επόμενος του μ

τέτοιος που (α) ο $\neg \phi$ αληθεύει στον ν και

(β) ο ϕ δεν αληθεύει στον ν .

Όμως, επειδή η R είναι δευτερευόντως αναγκαστική, ισχύει

$\mu R \nu$ και άρα, λόγω της σημασιολογικής συμπεριφοράς
του τελεστή $\Box$, έπεται ότι (γ) ο ϕ αληθεύει στον ν .

Προφανώς όμως τα (β) και (γ) αντιφάσκουν.