Σημειώσεις για μάθημα 28/4/2025

Το 1919, όλοι χρησιμοποιούσαν τη λέξη "αυτοδιάθεση". Ήθελα να κατανοήσω πλήρως τη λέξη αυτή. Αλλά τότε, φυσικά, σκόνταψα στις δυσκολίες και τα σκοτεινά σημεία που αφορούσαν την έννοια "θάπρεπε", και το πρόβλημα άλλαξε. Η έννοια "θάπρεπε" είναι η βασική έννοια όλης της ηθικής. Αυτή μπορεί μόνο να παίξει το ρόλο ενός χρήσιμου θεμελίου για την ηθική όταν συλληφθεί από ένα σύστημα αξιωμάτων. Στα επόμενα θα παρουσιάσω ένα τέτοιο αξιωματικό σύστημα.

(Εισαγωγή του βιβλίου του E. Mally)

E. Mally: Elemente des Sollens. Grundgesetze der Logik des Willens, Lenschner & Lubensky, Graz, 1926.

K. Menger: A logic of the doubtful: On operative and imperative logic, in K. Menger (ed.), Reports of a Mathematical Colloquium, 2nd series, 2nd issue, pp. 53-64, Indiana University Press, 1939.

Στο σύστημα του Mally, αποδεικνύεται ότι ισχύει $OP \leftrightarrow P$, για κάθε προτασιακό τύπο P.

Αρκεί να δείξουμε ότι, στο σύστημα αυτό αποδεικνύεται και ότι $P \rightarrow OP$ και ότι $OP \rightarrow P$, για κάθε προτ. τύπο P.

Για τις αποδείξεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μέσω αξιωμάτων και του αποδεικτικού κανόνα Modus Ponens, που είδαμε (βιαστικά) σε προηγούμενο μάθημα. Θα χρησιμοποιήσουμε και κάποια "θεωρήματα του προτασιακού λογισμού".

Jan Łukasiewicz (1878–1956)

Αξιώματα και αποδεικτικός κανόνας

A1. $P \to (Q \to P)$

A2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3. $(\sim Q \to \sim P) \to ((\sim Q \to P) \to Q)$.

Κανόνας Modus Ponens: $\dfrac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$

Παράδειγμα: Ο τύπος $P \to P$ αποδεικνύεται τυπικά. Κατασκευάζουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη.

1. $[P \to ((P \to P) \to P)] \to [(P \to (P \to P)) \to (P \to P)]$ προκύπτει από το A2 με κατάλληλη αντικατάσταση
2. $P \to ((P \to P) \to P)$ προκύπτει από το A1 με κατάλληλη αντικατάσταση
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ προκύπτει από τους τύπους 1 και 2, με εφαρμογή Modus Ponens
4. $(P \to (P \to P))$ προκύπτει από το A1
5. $P \to P$ προκύπτει από τους τύπους 3 και 4 με εφαρμογή του Modus Ponens

Θεώρημα ορθότητας: Αν $\Sigma \vdash P$, τότε $\Sigma \models P$.

Θεώρημα πληρότητας: Αν $\Sigma \models P$, τότε $\Sigma \vdash P$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $OP \to P$, για κάθε προτασιακό τύπο P.

1. $[(u \to OP) \& (P \to n)] \to (u \to On)$ — αξίωμα MA1

2. $\sim(u \to On)$ — αξίωμα MA5

3. $\sim(u \to On) \to \sim[(u \to OP) \& (P \to n)]$ — από προτασιακό λογισμό και τον τύπο 1

(επεξήγηση: από τον προτασιακό λογισμό είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $Q \to R$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $\sim R \to \sim Q$. Θέτοντας ως Q τον $[(u \to OP) \& (P \to n)]$ και ως R τον τύπο $(u \to On)$, με βάση τον τύπο στο 1, που είναι της μορφής $Q \to R$, προκύπτει ο τύπος στο 3, που είναι της μορφής $\sim R \to \sim Q$)

4. $\sim[(u \to OP) \& (P \to n)]$ — 2, 3, Modus Ponens

(επεξήγηση: ο τύπος στο 3 έχει τη μορφή $Q \to R$ και ο τύπος στο 2 έχει τη μορφή Q, οπότε, με βάση τον κανόνα Modus Ponens, προκύπτει ο τύπος R, δηλ. ο 4)

5. $\sim(u \to OP) \vee \sim(P \to n)$ — 4, προτασ. λογισμός

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $\sim(Q \& R)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $\sim Q \vee \sim R$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον τύπο $(u \to OP)$ και ως R τον $(P \to n)$, με βάση το βήμα 4, προκύπτει το βήμα 5)

6. $(u \& \sim OP) \vee (P \& \sim n)$ από 5 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $\sim(Q \to R)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \& \sim R$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον τύπο u και ως τύπο R τον τύπο OP, από τον $\sim(u \to OP)$ προκύπτει ο τύπος $u \& \sim OP$. Όμοια, προκύπτει ο τύπος $(P \& \sim n)$ από τον $\sim(P \to n)$.)

7. $(u \& \sim OP) \vee (\sim n \& P)$ από 6 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $Q \& R$ είναι ισοδύναμος με τον $R \& Q$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον P και ως R τον $\sim n$, προκύπτει ο τύπος $(\sim n \& P)$ από τον $P \& \sim n$ και, επομένως, ο 7 από τον 6)

8. $(u \& \sim OP) \vee (u \& P)$ από τον 7 και το γεγονός ότι, εξ ορισμού, ο u είναι ισοδύναμος με τον $\sim n$

9. $u \& (\sim OP \vee P)$ από τον 8 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $(Q \& R) \vee (Q \& S)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \& (R \vee S)$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον u, ως R τον $\sim OP$ και ως S τον P, προκύπτει ο 9 από τον 8)

10. $\sim OP \vee P$ από τον 9 με βάση τον (παραγόμενο) κανόνα απλοποίησης, σύμφωνα με τον οποίο από κάθε τύπο της μορφής $Q \& R$ μπορούμε να συμπεράνουμε τον τύπο Q ή τον τύπο R

11. $OP \to P$ από τον 10 και προτασ. λογισμό (κάθε τύπος της μορφής $\sim Q \vee R$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \to R$)

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, ότι στο σύστημα του Mally αποδεικνύεται ο τύπος $P \to OP$, για κάθε προτασιακό τύπο P.

Όπως πριν, θα χρησιμοποιήσουμε τα αξιωματικά σχήματα του Mally, τα σχήματα του προτασιακού λογισμού και τον κανόνα Modus Ponens.

1.	$OP \to OP$	προτασ. λογισμός
2.	$(OP \to OP) \to [(P \to Q) \to (OP \to OP)]$	αξ. σχήμα 1
3.	$[(P \to Q) \to (OP \to OP)]$	1, 2, MP
4.	$(P \to Q) \to (P \to Q)$	προτασ. λογισμός
5.	$(P \to Q) \to [(OP \to OP) \& (P \to Q)]$	3, 4 προτ. λογισμός
6.	$[(OP \to OP) \& (P \to Q)] \to (OP \to OQ)$	αξ. MA1
7.	$(P \to Q) \to (OP \to OQ)$	5, 6, προτ. λογισμός
8.	$(OP \to OP) \leftrightarrow O(OP \to P)$	αξ. MA3
9.	$O(OP \to P)$	1, 8, προτ. λογισμός
10.	$P \to P$	προτασ. λογισμός
11.	$(P \to P) \to [(OP \to P) \to (P \to P)]$	αξ. σχήμα 1
12.	$(OP \to P) \to (P \to P)$	10, 11, Modus Ponens
13.	$[(OP \to P) \to (P \to P)] \to [O(OP \to P) \to O(P \to P)]$	ειδ. περ. 7
14.	$O(OP \to P) \to O(P \to P)$	12, 13, MP
15.	$O(P \to P)$	9, 14, MP
16.	$(P \to OP) \leftrightarrow O(P \to P)$	αξ. MA3
17.	$P \to OP$	15, 16, MP.

Στο ίδιο άρθρο του, ο Menger παρατηρησε:

"This result seems to me to be detrimental for Mally's theory, however. It indicates that the introduction of the sign ! is superfluous in the sense that it may be cancelled or inserted in any formula at any place we please. But this result (in spite of Mally's philosophical justification) clearly contradicts not only our use of the word "ought" but also some of Mally's own correct remarks about this concept, e.g. the one at the beginning of his development to the effect that $p \to (!q \text{ or } !r)$ and $p \to !(q \text{ or } r)$ are not equivalent. Mally is quite right that these two propositions are not equivalent according to the ordinary use of the word "ought". But they are equivalent according to his theory by virtue of the equivalence of p and $!p$."