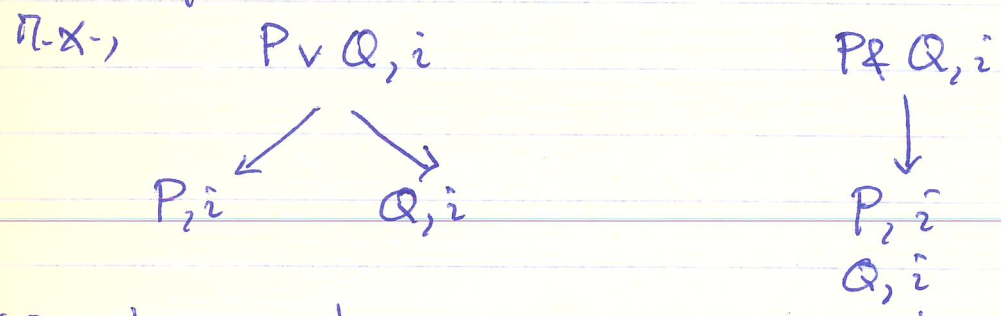


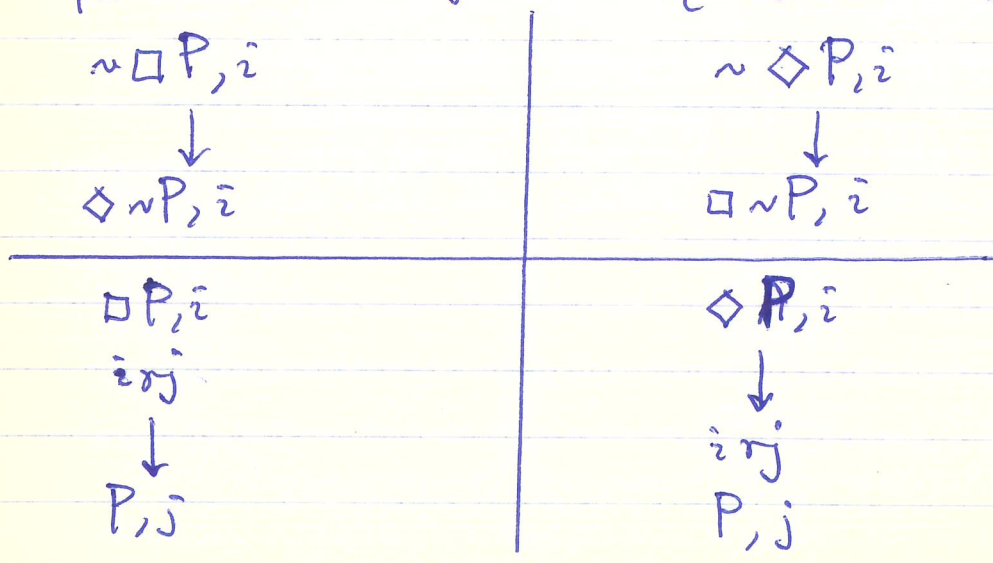
Σημειώσεις για μάθημα 31/3/2025

Τροπικοί σημασιολογικοί πίνακες (Tableaux)

- (1) σε κάθε κόμβο θα υπάρχει P, i (όπου P συμβολίζει ένα προτασιακό τύπο και i ένα φυσικό αριθμό) ή $i \tau j$ (όπου i, j είναι φυσικοί αριθμοί και το τ αντιστοιχεί στη σχέση προσβασιμότητας μεταξύ δυνατών κόσμων)
- (2) στον αρχικό κόμβο, θα υπάρχει η ακολουθία $P, 0$ (όπου P συμβολίζει την υπόθεση και το 0 συμβολίζει ένα αρχικό κόμβο) και $\neg Q, 0$ (όπου Q συμβολίζει το υποψήφιο συμπέρασμα και το 0 τον αρχικό κόμβο)
- (3) οι πίνακες για τους συνδέσμους θα είναι ίδιοι με πριν, αλλά θα εμφανίζονται δίπλα στους προτασιακούς τύπους και σύμβολα $i, j, \dots$, που αντιστοιχούν σε δυνατούς κόσμους.



(4) υπάρχουν πίνακες για τους τροπικούς τελεστές:



Παράδειγμα. $\Box(P \rightarrow Q) \ \& \ \Box(Q \rightarrow R) \vdash \Box(P \rightarrow R)$.

1α. $\Box(P \rightarrow Q) \ \& \ \Box(Q \rightarrow R), 0$
 1β. $\sim \Box(P \rightarrow R), 0$ } αρχικές υποθέσεις



2α. $\Box(P \rightarrow Q), 0$
 2β. $\Box(Q \rightarrow R), 0$ } προκύπτουν από τον τύπο 1α,
 με βάση το tableau για τον &



3. $\Diamond \sim(P \rightarrow R), 0$ } προκύπτει από τον τύπο 1β,
 με βάση το tableau για $\sim \Box$



4α. $0 \vee 1$
 4β. $\sim(P \rightarrow R), 1$ } προκύπτουν από τον τύπο 3,
 με βάση το tableau για $\Diamond$



5α. $P, 1$
 5β. $\sim R, 1$ } προκύπτουν από τον τύπο 4β,
 με βάση το tableau για $\sim \rightarrow$



6. $P \rightarrow Q, 1$ } προκύπτει από τους τύπους 2α, 4α,
 με βάση το tableau για $\Box$



7. $Q \rightarrow R, 1$ } προκύπτει από τους τύπους 2β, 4α,
 με βάση το tableau για $\Box$



8α. $\sim P, 1$ } προκύπτουν από τον
 8β. $Q, 1$ } τύπο 6, με βάση το
 tableau για τη $\rightarrow$

×



9α. $\sim Q, 1$ } προκύπτουν από τον
 9β. $R, 1$ } τύπο 7, με βάση το
 tableau για τη $\rightarrow$.

×

×

Παράδειγμα. $\vdash \Diamond(P \& Q) \rightarrow (\Diamond P \& \Diamond Q).$

1. $\neg(\Diamond(P \& Q) \rightarrow (\Diamond P \& \Diamond Q)), 0$

χρήση υποψήφιου συμπέρασματος



2α. $\Diamond(P \& Q), 0$

2β. $\neg(\Diamond P \& \Diamond Q), 0$

{ προκύπτουν από τον τύπο 1,
με βάση το tableau για $\neg \rightarrow$

3α. $\neg \Diamond P, 0$

3β. $\neg \Diamond Q, 0$

{ προκύπτουν από
τον τύπο 2β, με
βάση το tableau
για $\neg \&$

4α. $\Box \neg P, 0$

4β. $\Box \neg Q, 0$

{ προκύπτουν, αντίστοιχα,
από τους τύπους 3α, 3β,
με βάση το tableau
για $\neg \Diamond$

5α. $0 \text{ or } 1$

5β. $P \& Q, 1$

5γ. $0 \text{ or } 1$

5δ. $P \& Q, 1$

{ προκύπτουν, αντίστοιχα,
από τον τύπο 2α, με
βάση το tableau για $\Diamond$

6α. $P, 1$

6β. $Q, 1$

6γ. $P, 1$

6δ. $Q, 1$

{ προκύπτουν, αντίστοιχα,
από τους τύπους 5β, 5δ,
με βάση το tableau για $\&$

7α. $\neg P, 1$

7β. $\neg Q, 1$

προκύπτουν, αντίστοιχα,
από τους τύπους 4α και 5α,
4β και 5γ, με βάση το
tableau για $\Box$

X

X

(Αντι)παράδειγμα. $\nabla (\Diamond p \& \Diamond \neg q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$.

(4)

1. $\neg[(\Diamond p \& \Diamond \neg q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p], 0$ άρτηση υποφ. υπερτάσεως

2α. $\Diamond p \& \Diamond \neg q, 0$

} προκύπτουν από τον τύπο 1,
με βάση το tableau για $\neg \rightarrow$

2β. $\neg \Diamond \Box \Diamond p, 0$

3α. $\Diamond p, 0$

} προκύπτουν από τον τύπο 2α,
με βάση το tableau για $\&$

3β. $\Diamond \neg q, 0$

4. $\Box \neg \Box \Diamond p, 0$

} προκύπτει από τον τύπο 2β,
με βάση το tableau για $\neg \Diamond$

5α. $\Box r 1$

} προκύπτουν από τον τύπο 3α,
με βάση το tableau για $\Diamond$

5β. $p, 1$

6. $\neg \Box \Diamond p, 1$

} προκύπτει από τους τύπους 4, 5α,
με βάση το tableau για $\Box$

7. $\Diamond \neg \Box \Diamond p, 1$

} προκύπτει από τον τύπο 6,
με βάση το tableau για $\neg \Box$

8α. $1 r 2$

} προκύπτουν από τον τύπο 7,

8β. $\neg \Diamond p, 2$

} με βάση το tableau για $\Diamond$

9. $\Box \neg p, 2$

προκύπτει από τον 8β, λόγω του tableau για $\neg \Diamond$.

10α. $\Box r 3$

} προκύπτουν από τον τύπο 3β,

10β. $\neg q, 3$

} λόγω του tableau για $\Diamond$

11. $\neg \Box \Diamond p, 3$

προκύπτει από 4 και 10α, λόγω tableau για $\Box$

12. $\Diamond \neg \Box \Diamond p, 3$

προκύπτει από 11, λόγω tableau για $\neg \Box$

13α. $3 r 4$

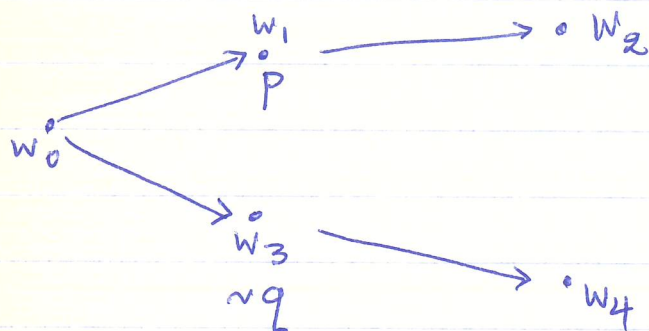
} προκύπτουν από τον τύπο 12,
με βάση το tableau για $\Diamond$

13β. $\neg \Diamond p, 4$

14. $\Box \neg p, 4$

προκύπτει από τον τύπο 13,
με βάση το tableau για $\neg \Diamond$.

Από την προηγούμενη κατασκευή, προκύπτει ως αντι-παράδειγμα η ακόλουθη τροπική ερμηνεία:



Με άλλα λόγια, προκύπτει η τριάδα (W, R, v) , όπου

$$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$R = \{ \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_0, w_3 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle \}$$

$$v_{w_1}(p) = 1, \quad v_{w_3}(q) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα (που έγινε την 24/3/2025), μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$v_{w_0}(\Diamond p \ \& \ \Diamond \neg q) = 1$$

$$v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p) = 0,$$

οπότε θα ισχύει ότι $v_{w_0}((\Diamond p \ \& \ \Diamond \neg q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p) = 0$,

δηλαδή, ο τύπος $(\Diamond p \ \& \ \Diamond \neg q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$ δεν αποτελεί τροπική ταυτότητα.

Άσκηση. Θα ελέγξουμε ότι, για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, ισχύει ότι $v_{w_0}(\Diamond p \ \& \ \Diamond \neg q) = 1$.

Αρκεί να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond p) = 1$ και $v_{w_0}(\Diamond \neg q) = 1$.

(α) Για να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond p) = 1$, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(p) = 1$. Πράγματι υπάρχει τέτοιος κόσμος (είναι ο w_1).

(6)

(β) Για να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond \neg q) = 1$, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(\neg q) = 1$. Πράγματι υπάρχει τέτοιος κόσμος (είναι ο w_3).

Άσκηση. Να ελέγξετε ότι, για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, ισχύει ότι $v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p) = 0$.

Αρχή λύσης. Υπενθυμίζουμε ότι η σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$ είναι η ακόλουθη:

$v_w(\Diamond P) = 1$ αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w R w'$ και ισχύει ότι $v_{w'}(P) = 1$.

Ο τύπος που έχουμε είναι της μορφής $\Diamond P$, όπου με P συμβολίζουμε τον τύπο $\Box \Diamond p$. Έτσι, για να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p) = 0$,

αρκεί να ελέγξουμε ότι δεν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και να ισχύει ότι $v_{w'}(P) = 1$.

Επειδή οι μόνοι κόσμοι (στην ερμηνεία) στους οποίους έχει πρόσβαση ο w_0 είναι οι w_1 και w_3 , αρκεί να δείξουμε ότι

(α) δεν ισχύει $v_{w_1}(\Box \Diamond p) = 1$ και

(β) δεν ισχύει ότι $v_{w_3}(\Box \Diamond p) = 1$.

Συνεχίζουμε τώρα, χρησιμοποιώντας, και για το (α) και για το (β), τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Box$, δηλαδή, την ακόλουθη:

$v_w(\Box P) = 1$ αν για κάθε κόσμο w' τέτοιο που $w R w'$ ισχύει ότι $v_{w'}(P) = 1$,

όπου, βέβαια, αυτή τη φορά το P συμβολίζει τον τύπο $\Diamond p$.

Αξιώματα και κανόνες τροπικής προτασιακής λογικής

(όλες οι περιπτώσεις προτασιακών ταυτολογιών)

Κατανομή: $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

Δυσικότητα: $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$

Modus Ponens (όπως συνήθως)

Αρχή Αντεκατάστασης: Από τυχόντα προτασιακό τύπο ϕ , παράγεται κάθε τύπος που προκύπτει με (ομοιόμορφη) αντεκατάσταση προτασιακών μεταβλητών από οποιονδήποτε τύπο

Γενίκευση (ή εξαναγκασμός): αν $\vdash p$, τότε $\vdash \Box p$.

K: όλα τα παραπάνω (αξιώματα και κανόνες)

K4: K και επιπλέον το αξίωμα $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$

S4: K4 και επιπλέον το αξίωμα $p \rightarrow \Box p$

Παράδειγμα: $K \vdash (\Box p \& \Box q) \rightarrow \Box(p \& q)$.

Κατασκευάσαμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q))$ ταυτολογία
2. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q)))$ 1, κανόνας γενίκευσης
3. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ αξίωμα K
4. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q))) \rightarrow [\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \& q))]$
3, αρχή ανεικατάστασης
5. $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \& q))$ 2, 4, Modus Ponens
6. $\Box(q \rightarrow (p \& q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \& q))$
3, αρχή ανεικατάστασης
7. $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \& q))$ 5, 6, κανόνας υποδεικτικού συλλογισμού
8. $(\Box p \& \Box q) \rightarrow \Box(p \& q)$ 7, νόμος εξαγωγής (πρόστασ. συλλογισμού)