Σημειώσεις για μάθημα 17/3/2025

Αν αγοράσω καινούρια γυαλιά, θα ξοδέψω το περιεχόμενο του κουμπαρά μου. Θα πάω στην Αράχωβα για Πάσχα αν και μόνον αν δεν ξοδέψω το περιεχόμενο του κουμπαρά μου. Αν δεν πάω στην Αράχωβα για Πάσχα, θα περάσω το Πάσχα με τους γονείς μου στην Άρτα. Άρα θα περάσω το Πάσχα με τους γονείς μου στην Άρτα ή δεν θα αγοράσω καινούρια γυαλιά.

p: αγοράζω καινούρια γυαλιά
q: ξοδεύω το περιεχόμενο του κουμπαρά μου
r: πάω στην Αράχωβα για Πάσχα
s: περνάω το Πάσχα με τους γονείς μου στην Άρτα

1η υπόθεση: $p \rightarrow q$

2η υπόθεση: $r \leftrightarrow \sim q$

3η υπόθεση: $\sim r \rightarrow s$

Συμπέρασμα: $s \vee \sim p$

<u>Ερώτημα:</u> Είναι έγκυρη η επιχειρηματική μορφή;

<u>Σημασιολογικός έλεγχος:</u> Για να ελέγξουμε αν οι (τρεις) υποθέσεις συνεπάγονται λογικά το συμπέρασμα, ελέγχουμε αν το συμπέρασμα παίρνει τιμή 1 <u>σε όλες τις περιπτώσεις</u> που οι (τρεις) υποθέσεις παίρνουν <u>ταυτόχρονα</u> τιμή 1.

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας.

$\sim p$	p	q	r	s	$\sim q$	$\sim r$	$p \to q$	$r \leftrightarrow \sim q$	$\sim r \to s$	$s \vee \sim p$
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1

Πράγματι είναι λογικά έγκυρη η συγκεκριμένη επιχειρηματική μορφή (και το αντίστοιχο επιχείρημα).

Συντακτικός ή τυπικός έλεγχος: Χωρίς κατασκευή πινάκων αλήθειας, αλλά με χρήση αξιωμάτων και αποδεικτικών (ή παραγωγικών) κανόνων.

1η μέθοδος: semantic tableaux

2η μέθοδος: κανόνες φυσικής παραγωγής (natural deduction)

3η μέθοδος: αξιώματα και αποδεικτικός κανόνας.

Σημασιολογικοί πίνακες (semantic tableaux)

Evert W. Beth (1908-1964)

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sim P \qquad Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim(P \to Q) \\ \downarrow \\ P \\ \sim Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim\sim P \\ \downarrow \\ P \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \swarrow \quad \searrow \\ P \qquad Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim(P \vee Q) \\ \downarrow \\ \sim P \\ \sim Q \end{array}$$

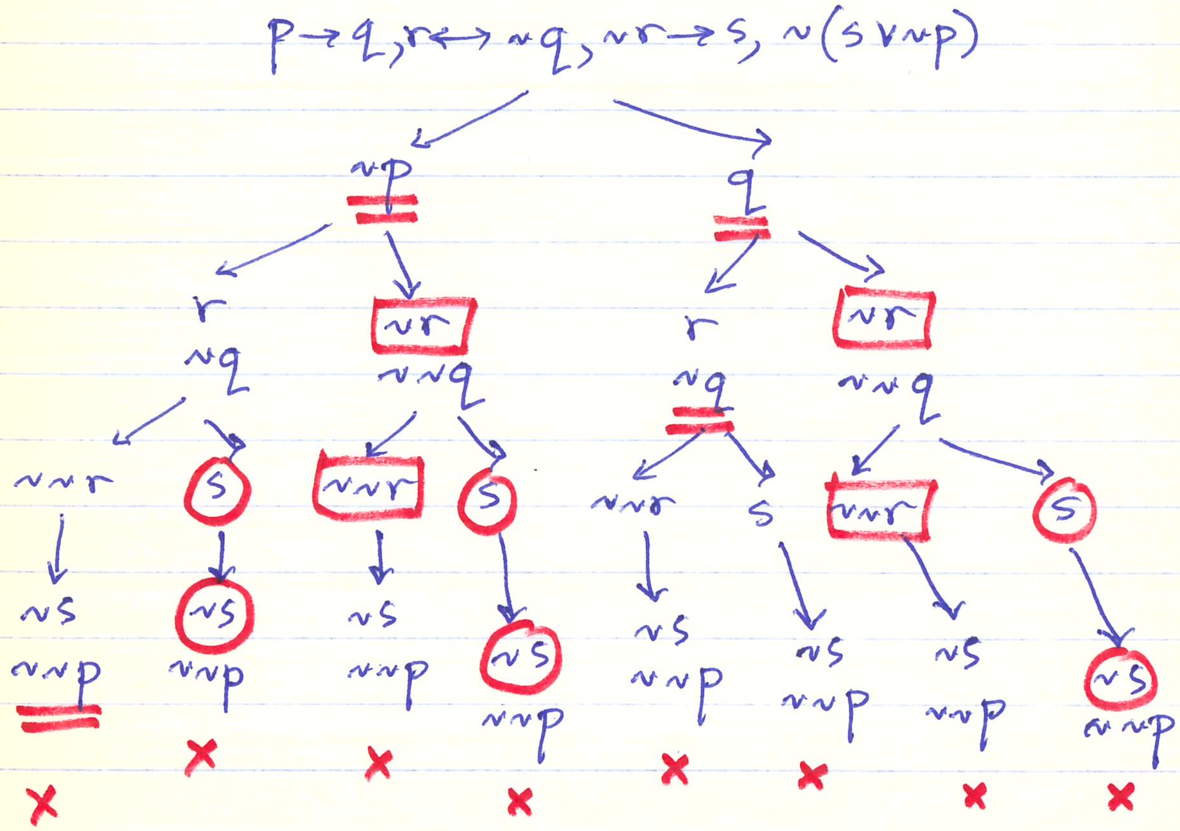
$$\begin{array}{c} \sim(P \,\&\, Q) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sim P \qquad \sim Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P \,\&\, Q \\ \downarrow \\ P \\ Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} P \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim P \\ \sim Q \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim(P \leftrightarrow Q) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \sim P \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \\ \sim Q \end{array} \end{array}$$

<u>Εφαρμογή στο Παράδειγμα</u>: Για να ελέγξουμε αν από τις υποθέσεις $p \to q$, $r \leftrightarrow \sim q$, $\sim r \to s$ προκύπτει, με λογικά έγκυρο τρόπο, το συμπέρασμα $s \vee \sim p$, κατασκευάζουμε ένα "δένδρο", ξεκινώντας με τις υποθέσεις και την άρνηση του συμπεράσματος. Αν το "δένδρο" "κλείσει", τότε είναι έγκυρη η επιχειρηματική μορφή. Αν τουλάχιστον ένα "κλαδί" μένει "ανοικτό", η επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη.



Το "δένδρο" έχει όλα τα κλαδιά "κλειστά", οπότε η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Αντιπαράδειγμα (counter-example ή counter-model).

Αν ο αριθμός κρουσμάτων γίνει διψήφιος, θα σταματήσει το lockdown ή αν αρχίσει ο εμβολιασμός, θα σταματήσει το lockdown. Συνεπώς, αν ο αριθμός κρουσμάτων γίνει διψήφιος ή αρχίσει ο εμβολιασμός, θα σταματήσει το lockdown.

p: ο αριθμός κρουσμάτων γίνεται διψήφιος

q: αρχίζει ο εμβολιασμός

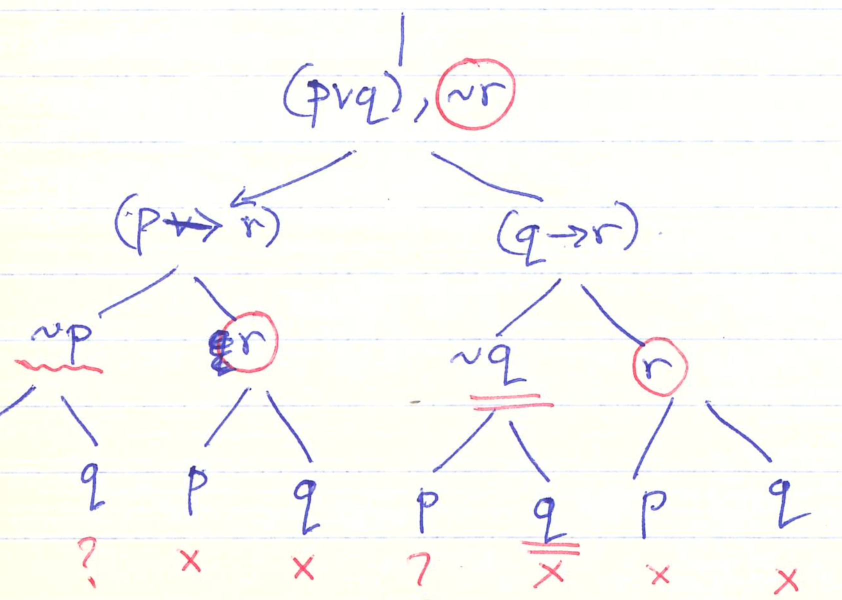
r: σταματά το lockdown

Υπόθεση: $(p \to r) \vee (q \to r)$

Συμπέρασμα: $(p \vee q) \to r$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σημασιολογικών πινάκων για να ελέγξουμε τη λογική εγκυρότητα του επιχειρήματος

$$(p \to r) \vee (q \to r),\ \sim((p \vee q) \to r)$$



Δύο κλαδιά του tableau έχουν παραμείνει ανοικτά, πράγμα που σημαίνει ότι προκύπτουν "αντιπαραδείγματα", δηλαδή, αποτιμήσεις οι οποίες δίνουν τιμή 1 στην υπόθεση και, ταυτόχρονα, τιμή 0 στο συμπέρασμα.

Πράγματι, από το ανοικτό κλαδί στο αριστερό μέρος του tableau, βλέπουμε ότι, αν οι προτασιακές μεταβλητές p,r πάρουν τιμή αλήθειας 0 και η προτασιακή μεταβλητή q πάρει τιμή 1, τότε οι τύποι $p \to r$, $q \to r$, $p \vee q$ παίρνουν (αντίστοιχα) τιμή 1, 0 και 1, οπότε ο προτασιακός τύπος $(p \to r) \vee (q \to r)$ παίρνει τιμή 1, ενώ ο προτασιακός τύπος $(p \vee q) \to r$ παίρνει τιμή 0.

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$(p \to r) \vee (q \to r) \not\models (p \vee q) \to r,$$

οπότε το αρχικό επιχείρημα είναι άκυρο.

Με άλλα λόγια, στην κατάσταση πραγμάτων, όπου
(1) ο αριθμός κρουσμάτων δεν γίνεται διψήφιος
(2) αρχίζει ο εμβολιασμός
(3) δεν σταματάει το lockdown,
θα είναι αληθής η υπόθεση, αλλά ψευδές το συμπέρασμα.

<u>Σημείωση</u>. Θα μπορούσαμε, με όμοιο τρόπο, να έχουμε χρησιμοποιήσει το άλλο ανοικτό κλαδί του tableau.

Κανόνες φυσικής παραγωγής (natural deduction)

Gerhard Gentzen (1909 – 1945)

$\begin{array}{c} P \to Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$	Modus Ponens	$\begin{array}{c} P \to Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$	Modus Tollens
$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline P \to R \end{array}$	Υποθετικός Συλλογισμός	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$	Διαζευκτικός Συλλογισμός
$\begin{array}{c} P \& Q \\ \hline P \end{array}$	Απλοποίηση	$\begin{array}{c} P \\ \hline P \vee Q \end{array}$	Πρόσθεση
$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \& Q \end{array}$	Σύζευξη		

Κατασκευάζουμε μια "τυπική απόδειξη" (formal proof) του συμπεράσματος, ξεκινώντας από τις υποθέσεις και εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και οποιαδήποτε ταυτολογία).

1. $p \to q$ — υπόθεση
2. $r \leftrightarrow \sim q$ — υπόθεση
3. $\sim r \to s$ — υπόθεση
4. $(r \to \sim q) \,\&\, (\sim q \to r)$ — 2, νόμος διπλής συνεπαγ.
5. $r \to \sim q$ — 4, απλοποίηση
6. $\sim\sim q \to \sim r$ — 5, νόμος αντιθετοαναστροφής
7. $q \to \sim r$ — 6, νόμος διπλής άρνησης
8. $p \to \sim r$ — 1, 7, υποθετ. συλλογισμός
9. $p \to s$ — 3, 8, υποθετικός συλλογισμός
10. $\sim p \vee s$ — 9, νόμος συνεπαγωγής
11. $s \vee \sim p$ — 10, νόμος αντιμεταθετικότητας

Η τυπική απόδειξη παραπάνω είναι "άμεση", δηλαδή, κατασκευάστηκε ξεκινώντας από τις υποθέσεις και εφαρμόζοντας (αμέσως) κάποιους κανόνες φυσικής παραγωγής σε αυτές και σε τύπους που παράγονται κατά τη διαδικασία.

Μερικές φορές, όμως, δεν είναι εύκολη η κατασκευή μίας τέτοιας απόδειξης, οπότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της έμμεσης απόδειξης ("απαγωγή σε άτοπο") ή τη μέθοδο της υποθετικής απόδειξης.

Ας δούμε το προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο "έμμεσης απόδειξης". Η ιδέα είναι ότι θα ξεκινήσουμε με τις (τρεις) υποθέσεις, παίρνοντας επιπλέον ως βοηθητική υπόθεση την άρνηση του (επιθυμητού) συμπεράσματος, και θα επιδιώξουμε να καταλήξουμε σε αντίφαση.

1. $p \to q$	υπόθεση
2. $r \leftrightarrow \sim q$	"
3. $\sim r \to s$	"
4. $\sim(s \vee \sim p)$	βοηθητική υπόθεση
5. $\sim s \,\&\, \sim\sim p$	4, ν. DeMorgan
6. $\sim s$	5, απλοποίηση
7. $\sim\sim r$	3, 6, Modus Tollens
8. r	7, νόμος διπλής άρνησης
9. $(r \to \sim q) \,\&\, (\sim q \to r)$	2, νόμος διπλής συνεπαγωγής
10. $r \to \sim q$	9, απλοποίηση
11. $\sim q$	8, 10, Modus Ponens
12. $\sim p$	1, 11, Modus Tollens
13. $\sim\sim p \,\&\, \sim s$	5, νόμος αντιμεταθετικότητας
14. $\sim\sim p$	13, απλοποίηση.

Τώρα βλέπουμε ότι οι τύποι με αριθμούς 12 και 14 αποτελούν αντίφαση. Έπεται λοιπόν ότι η $s \vee \sim p$ πράγματι αποτελεί συμπέρασμα όταν έχουμε ως υποθέσεις τους τύπους με αριθμούς 1, 2 και 3.

Προχωρούμε με ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου υποθετικής απόδειξης. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται μόνον αν το επιθυμητό συμπέρασμα είναι συνεπαγωγή, δηλαδή, είναι τύπος της μορφής $P \to Q$, όπου P, Q οποιοιδήποτε προτασιακοί τύποι.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, παίρνουμε ως επιπλέον βοηθητική υπόθεση τον τύπο P και κατασκευάζουμε απόδειξη του τύπου Q.

Παράδειγμα. Ας αποδείξουμε το συμπέρασμα $p \to s$ από τις υποθέσεις $p \to \sim q$, $r \to q$, $\sim r \to s$.

1.	$p \to \sim q$	υπόθεση
2.	$r \to q$	"
3.	$\sim r \to s$	"
4.	p	βοηθητική υπόθεση
5.	$\sim q$	1, 4, Modus Ponens
6.	$\sim r$	2, 5, Modus Tollens
7.	s	3, 6, Modus Ponens

Η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου μας εξασφαλίζει ότι, το να αποδείξουμε τον τύπο s από τους τύπους $p \to \sim q$, $r \to q$, $\sim r \to s$ και τον (βοηθητικό) p, είναι το ίδιο με το να αποδείξουμε τον τύπο $p \to s$ από τους τύπους $p \to \sim q$, $r \to q$ και $\sim r \to s$.

Jan Łukasiewicz (1878–1956)

Αξιώματα και αποδεικτικός κανόνας

A1. $P \to (Q \to P)$

A2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3. $(\sim Q \to \sim P) \to ((\sim Q \to P) \to Q)$.

Κανόνας Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Ο τύπος $P \to P$ αποδεικνύεται τυπικά.
Κατασκευάζουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη.

1. $[P \to ((P \to P) \to P)] \to [(P \to (P \to P)) \to (P \to P)]$ προκύπτει από το A2 με κατάλληλη αντικατάσταση
2. $P \to ((P \to P) \to P)$ προκύπτει από το A1 με κατάλληλη αντικατάσταση
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ προκύπτει από τους τύπους 1 και 2, με εφαρμογή Modus Ponens
4. $(P \to (P \to P))$ προκύπτει από το A1
5. $P \to P$ προκύπτει από τους τύπους 3 και 4 με εφαρμογή του Modus Ponens

<u>Θεώρημα ορθότητας</u>: Αν $\Sigma \vdash P$, τότε $\Sigma \models P$.

<u>Θεώρημα πληρότητας</u>: Αν $\Sigma \models P$, τότε $\Sigma \vdash P$.